

普通高等院校“十二五”规划教材



有限元法

——原理、建模及应用

（第2版）

杜平安 于亚婷 刘建涛 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

责任编辑：丁福志　　ding@ndip.cn
责任校对：钱辉玲
封面设计：王晓军　　xjwang@ndip.cn

有限元法

——原理、建模及应用（第2版）



▶ 上架建议：机械类 ◀



http://www.ndip.cn
ISBN 978-7-118-07563-2
9 787118 075632 >



定价：42.00 元（含光盘）

普通高等院校"十二五"规划教材

有限元法
——原理、建模及应用
（第2版）

杜平安　于亚婷　刘建涛　编著

国防工業出版社
·北京·

内 容 简 介

本书介绍有限元法的原理、建模及应用。全书共分3篇28章。第1篇介绍有限元法的基本原理,包括平面问题、轴对称问题、杆件系统、空间问题、薄板弯曲问题、动态分析、热分析、电磁场分析、非线性问题以及多物理场耦合问题的有限元法;第2篇介绍有限元建模方法,内容包括建模概述、建模基本原则、几何模型建立、单元类型及特性定义、网格划分、模型检查与处理、边界条件建立等;第3篇介绍有限元分析软件 ANSYS,包括 ANSYS 的特点、组成、功能、几何建模、单元类型、网格划分、求解设置、后处理以及二次开发技术等内容,并给出了分析实例。

考虑到工科学生的特点,本书在原理介绍时尽量做到简练易懂,力求避免复杂繁琐的数学推导,以使读者易于理解复杂的原理;在介绍建模方法时,列举了大量实例,并尽量采用图示说明,以增加内容的直观性和可读性;在介绍软件应用时,注重有限元分析系统共性功能和特点的介绍,以便读者举一反三。在内容方面,强调有限元法涉及的理论、建模方法和软件应用的集成,注重有限元法应用的知识体系建立,旨在将理论和应用相结合,既加强学生理论基础的学习,更注重培养学生解决实际问题的能力。

本书可用作工科类研究生、本科生的学习教材,也可作为工程技术人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

有限元法:原理、建模及应用 / 杜平安,于亚婷,刘建涛编著. —2版. —北京:国防工业出版社,2011.8
普通高等院校"十二五"规划教材
ISBN 978-7-118-07563-2

Ⅰ.①有... Ⅱ.①杜... ②于... ③刘... Ⅲ.①有限元法-高等学校-教材 Ⅳ.①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第155449号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

开本 787×1092 1/16 印张 25 字数 571 千字
2011年8月第2版第1次印刷 印数 1—4000册 定价 42.00元(含光盘)

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474
发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　言

有限元法是根据变分原理求解数学物理问题的一种数值方法。自20世纪50年代提出以来，随着矩阵理论、数值分析方法、特别是计算机技术的发展，有限元法无论是在基础理论还是在实现技术研究上都取得了巨大进步。它从最初的固体力学领域拓展到传热学、电磁学、流体力学以及声学等其他物理场，从简单的静力分析发展到动态、非线性、多场耦合等复杂问题的计算。有限元法是目前最有效的数值计算方法之一，广泛用于机械、电子、航空航天、汽车、船舶、建筑以及石油化工等领域。

本书是在国防工业出版社2004年出版的《有限元法——原理、建模及应用》一书的基础上通过修订、扩充、完善形成的。全书共分3篇28章。第1篇介绍有限元法的基本原理，共包括11章，分别介绍平面问题、轴对称问题、杆件系统、空间问题、薄板弯曲问题、动态分析、热分析、电磁场分析、非线性问题以及多物理场耦合问题的有限元法。本篇目的是使读者了解有限元法的基本概念、思想和原理，形成有限元理论的一个主体框架；第2篇介绍有限元建模方法，内容包括7章，分别介绍建模概述、建模基本原则、几何模型建立、单元类型及特性定义、网格划分、模型检查与处理、边界条件建立等7章内容。该篇是使读者了解建立有限元模型的基本过程、原则和方法，其内容是应用有限元法的基础和关键；第3篇为有限元法的应用，介绍目前常用的有限元分析软件ANSYS。该篇包括10章内容，分别介绍ANSYS的特点、组成、功能、几何建模、单元类型、网格划分、求解设置、后处理以及二次开发技术等内容，并给出了ANSYS分析实例。该篇目的是期望读者掌握有限元方法的应用手段，并能对前面的原理和建模方法进行实践和体会，形成有限元方法的初步应用能力。

考虑到工科学生的特点，本书在原理介绍时尽量做到简练易懂，力求避免复杂繁琐的数学推导；在介绍建模方法时，列举了大量实例，并尽量采用图示说明，以增加内容的直观性和可读性；在介绍软件应用时，注重有限元分析系统共性功能和特点的介绍，以便读者举一反三。在内容方面，强调有限元法涉及的理论、建模和软件应用的集成，注重应用有限元法的完整知识体系的建立，旨在将理论和应用相结合，既加强学生理论基础的学习，更注重培养学生解决实际问题的能力。

本书由杜平安、于亚婷、刘建涛编著，由杜平安担任主编并进行统稿。其中第1章、第2章、第7章、第12章～第18章由杜平安编写，第3章～第6章、第8章～第11章由于亚婷编写，第19章～第28章由刘建涛编写。

由于编著者水平有限，书中难免有不妥之处，诚恳希望读者指正！

编著者
2011年5月

目　　录

第1篇　有限元法的基本原理

第2篇 有限元建模方法

第3篇 有限元法应用——ANSYS软件介绍

第1篇　有限元法的基本原理

第1章　绪　论

1.1　有限元法的产生与基本思想

工程中的许多问题都可用微分方程和相应的边界条件来描述。例如图1-1中的等截面悬臂梁，当自由端受集中力 F 作用时，其变形后的挠度 y 满足微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{F}{EI}(l-x)$$

和边界条件

$$y|_{x=0}=0 \tag{1-1}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$$

式中：E 为梁材料的弹性模量；I 为梁截面对中性轴 z 的惯矩；l 为悬臂梁长度。

再如，对于图1-2所示结构，其内部温度分布满足微分方程

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}=0$$

和边界条件

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\Gamma+\alpha(T-T_m)=0 \tag{1-2}$$

式中：λ 为热传导系数；α 为换热系数；T_m 为介质温度；Γ 为结构边界。

式(1-1)和式(1-2)是对物理问题的数学描述，称为数学模型。这种由微分方程和相应边界条件构成的数学问题称为微分方程边值问题。

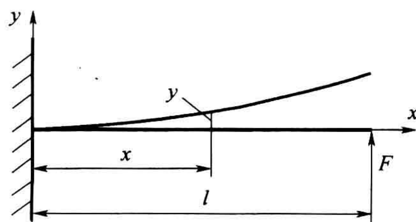


图1-1　受集中载荷的悬臂梁

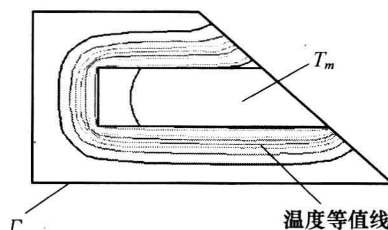


图1-2　结构温度场

求解物理问题的数学模型，通过所得到的解便可获知物理规律。例如求解式(1-1)，可求得悬臂梁的弯曲变形挠度为

$$y = \frac{F}{EI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

从上式可知，梁变形后其质心轴为一条三次曲线。在梁的自由端（$x = l$ 处），梁的变形挠度最大，为 $Fl^3/3EI$。求解物理问题的基本思路可用图 1－3 表示。

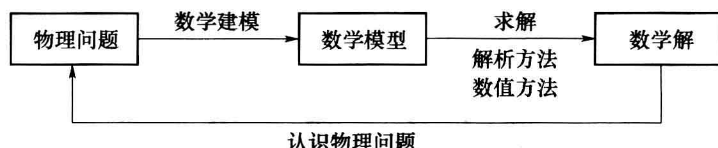


图 1－3　求解物理问题的基本思路

求解数学模型通常有两种方法：一种是解析法，它通过严格的数学推导求出问题的精确解，或称解析解；另一种是数值法，它通过一定的算法和程序，利用计算机计算出问题的近似解，又称数值解。

在实际工程问题中，由于物理对象几何形状、材料特性和边界条件的复杂性，使得边值问题的求解非常困难。通常除少数简单问题可用解析法求出精确解外，一般都只能通过数值方法求其近似解。

常见的数值方法主要有以下几种。

1.1.1　差分法

差分法的基本思想是用均匀的网格离散求解域，用离散点的差分代替微分，从而将连续的微分方程和边界条件转换为网格节点处的差分方程，并用差分方程的解作为边值问题的近似解。由于差分方程是一组线性代数方程，因而容易求解。

下面用图 1－4 中的一维问题来说明差分法原理。设未知函数 $y(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，边值问题为

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) + y(x) = f(x) \quad (a < x < b) \\ y(a) = d_1 \quad y(b) = d_2 \end{cases} \tag{1-3}$$

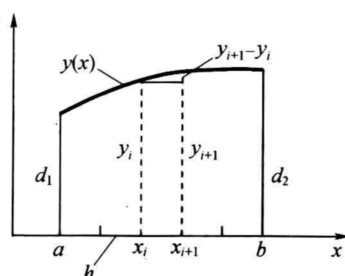


图 1－4　一维问题差分法

式中：$f(x)$ 为已知函数；d_1、d_2 为未知函数 $y(x)$ 在边界 a、b 处的值，即边界条件。

首先将区间 $[a,b]$ 划分为 n 等分，即将连续区域 $[a,b]$ 划分为 n 个均匀的直线网格，该过程称为离散。离散形成的 $(n-1)$ 个等分点以及两个端点称为节点，共 $(n+1)$ 个，设为 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$。相邻两节点之间的距离 h 称为步长，$h=(b-a)/n$。

对于每个内节点 $x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，若用节点处的差分近似代替微分，有

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

将 $y(x_{i+1})$、$y(x_i)$、$y'(x_i)$ 简记为 y_{i+1}、y_i、y'_i（以下类似），则上式为

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \tag{1-4}$$

从图 1－4 可以看出，网格划分越密，即 h 越小，上式的近似误差越小。

同理，对于 x_i 处的二阶微分，其差分形式为

$$y''(x_i) \approx \frac{\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h}}{h}$$

$$= \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}$$

$$= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \tag{1-5}$$

将式(1－4)、式(1－5)代入式(1－3)，得

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - y_i = f_i (i = 1,2,\cdots,n-1)$$

式中：f_i 为函数 $f(x)$ 在节点 x_i 处的值。上式整理后，得

$$(1-h)y_{i+1} - (2 - h - h^2)y_i + y_{i-1} = f_i (i = 1,2,\cdots,n-1) \tag{1-6}$$

再由式(1－3)中的边界条件有

$$y_0 = d_1 \qquad y_n = d_2 \tag{1-7}$$

式(1－6)和式(1－7)组成一个封闭的关于 y_0、y_1、…、y_n 的线性方程组，共有$(n+1)$个方程，因此可求出 y_0、y_1、…、y_n 共$(n+1)$个未知量。这些量便是差分法求得的未知函数 $y(x)$ 在节点 x_i 上的数值解。数值解是一种近似值，差分网格越密，近似误差越小。

对于相邻节点 x_i、x_{i+1} 之间其他各点的 y 值，可通过 y_i、y_{i+1} 插值求得，这样便可求出区间$[a,b]$内任一点的 y 值。

对于二维和三维问题，差分法要求采用均匀大小的正交网格，即正方形或正方体。由于正交网格边界逼近曲线和曲面的能力较差，因此当求解区域的边界形状复杂时，差分法的求解精度就会受到限制。

1.1.2 变分法

变分法是利用变分原理求解边值问题的一种方法。变分原理是指，微分方程边值问题的解等价于相应泛函极值问题的解。利用这一原理，就可将边值问题的求解转换为相对简单的泛函极值的求解。

里兹法是求解泛函极值的一种直接解法。其基本思想是选择一个定义于整个求解域并满足边界条件的试探函数，试探函数的形式一般为含有 n 个待定系数的多项式；然后将试探函数代入泛函表达式中，并利用泛函有极值的条件——泛函对各待定系数的偏微分为零，建立起 n 个关于待定系数的线性方程；联立求解这些方程计算出各个待定系数，就确定了使泛函实现极值的试探函数，该函数就是原边值问题的近似解。

下面用一个简单示例说明里兹法的基本原理。

设有边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y + 1 = 0 \\ y(0) = 0 \quad y(1) = 0 \end{cases} \tag{1-8}$$

通过数学推导,求得其泛函为

$$I[y(x)] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}y^2 - y \right) dx \tag{1-9}$$

现用一个试探函数近似原边值问题的解,试探函数设为以下多项式形式

$$\varphi(x) = \alpha_1(x - x^2) + \alpha_2(x - x^3) + \alpha_3(x - x^3) + \cdots + \alpha_n(x - x^{n+1}) \tag{1-10}$$

式中:α_1、α_2、…、α_n 为待定系数。

因此有

$$y(x) \approx \varphi(x)$$

试探函数中所取的项数越多,逼近的精度越高。

将试探函数代入式(1-9),可以得到关于 n 个待定系数的泛函表达式,简记为

$$I[y(x)] \approx I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$$

根据多元函数有极值的必要条件,有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha_n} I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n) = 0 \end{cases} \tag{1-11}$$

上式是关于待定系数 α_1、α_2、…、α_n 的由 n 个线性方程组成的方程组,求解该方程组便可求出这 n 个待定系数。再将这些系数代回到式(1-10),就可得到试探函数 $\varphi(x)$,即求出原边值问题的近似解。

1.1.3 有限元法

有限元法是在差分法和变分法的基础上发展起来的一种数值方法,它吸取了差分法对求解域进行离散处理的启示,又继承了里兹法选择试探函数的合理方法。从实质上看,有限元法与里兹法是等效的,它属于里兹法的范畴,多数问题的有限元方程都是利用变分原理来建立的。但由于有限元法采用了离散处理,使其计算更简单,并能处理更复杂的问题,因而具有更广泛的实用价值。

有限元法的基本思想可归结为两个方面,一是离散,二是分片插值。

1. 离散

"离散"就是将一个连续的求解域人为划分为一定数量的单元(element),又称网格

(mesh)。单元之间的连接点称为节点(node),单元间的相互作用只能通过节点传递。通过离散,可将一个具有无穷多质点的连续体分割为由有限个单元和节点组成的组合体,如图1-5所示。

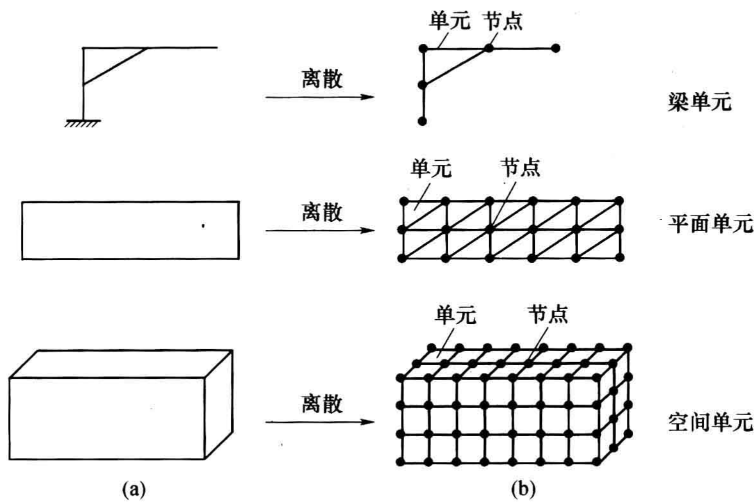


图1-5　连续体的离散

(a) 连续体;(b) 组合体。

离散处理的目的,就是将原来连续体具有无限自由度的连续变量微分方程和边界条件,转换为只包含组合体有限个节点变量的代数方程组,以利于用计算机求解。

有限元法的离散思想借鉴于差分法,但做了适当改进。首先,差分法是对计算对象的微分方程和边界条件进行离散,而有限元法是对计算对象的物理模型本身进行离散,即使该物理模型的微分方程尚不能列出,离散过程依然能够进行;其次,有限元法的单元可以变形状和变密度。变形状是指网格不一定要求是规则网格(如平面网格可以是任意四边形),变密度是指不同区域的网格可以大小不同。这样,在处理具有复杂几何形状和边界条件、以及在处理具有像应力集中这样的局部特性时,有限元法适应性更强,离散精度更高。

例如图1-6所示的齿轮轮齿,图(a)是差分法的均匀网格离散,离散后的形状有明显锯齿,与齿形相差较大;如果采用图(b)的有限元网格,则能较好地逼近轮廓曲线,同时在齿根应力集中部位也能通过加密网格来提高精度。

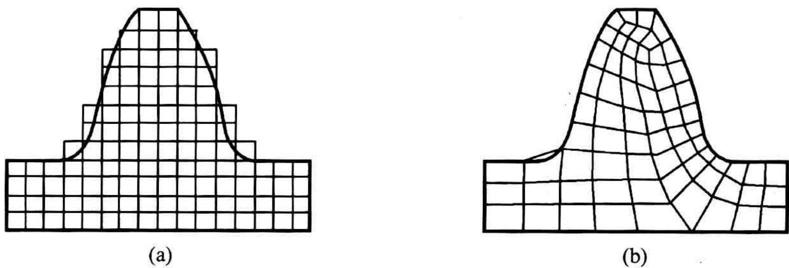


图1-6　齿轮轮齿的差分法和有限元法离散

(a)差分法网格划分;(b)有限元法网格划分。

2. 分片插值

变分法是在整个求解域用一个统一的试探函数逼近真实函数,当真实函数性态在求解域内趋于一致时,这种处理是合理的。但如果真实函数的性态较复杂,再用统一的试探函数就难以得到较高的逼近精度。即便是要得到较高的精度,就需要更高阶次的试探函数,使得求解非常复杂。同时由于不能在求解域的不同部位对试探函数提出不同的精度要求,往往由于局部精度要求较高而使求解很困难。所以这类方法一般用于求解域较规则和边界条件较简单的问题。

分片插值是有限元法与里兹法的一个重要区别,它是针对每一个单元选择试探函数(也称插值函数),积分计算也是在单元内完成。由于单元形状简单,所以容易满足边界条件,且用低阶多项式就可获得整个区域的适当精度。对于整个求解域而言,只要试探函数满足一定条件,当单元尺寸缩小时,有限元解就能收敛于实际的精确解。

下面用一维函数来说明分片插值的思想。图 1-7 中,$[a,b]$是求解域,设真实函数曲线为 c_1,若用定义在$[a,b]$上的整体试探函数 c_2 来逼近 c_1,则 c_2 应具有较高的阶次,而且这种试探函数对曲线局部特性的逼近也很不理想。若将求解域划分为若干长度不等的小区间(一维单元)后,则在每个小区间内用一条直线(即试探函数阶次为 1)就能很好地逼近曲线,且可在局部加密小区间来提高逼近精度。小区间越多,折线就越逼近曲线,计算精度也就越高。

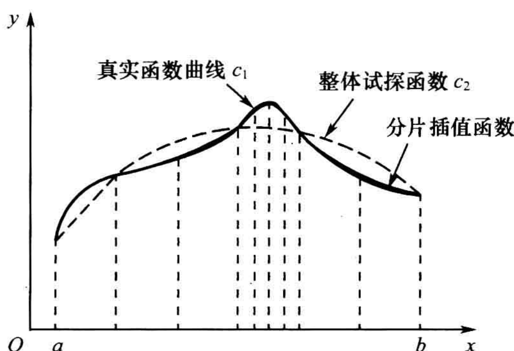


图 1-7　一维函数的整体插值和分片插值

从以上分析可知,有限元法是差分法的一种发展,又可以看成是里兹法的一种新形式。它继承了两者的优点,同时克服了各自的不足,因而具有更大的优越性和实用性。

1.2　有限元法的应用特点

基于有限元法的离散处理思想,其应用具有以下特点。

1.2.1　能够分析形状复杂的结构

由于单元不限于均匀的规则网格,单元形状有一定任意性,单元大小可以不同,且单元边界可以是曲线或曲面,因此分析结构可以具有非常复杂的形状。它不仅可以是复杂的平面或轴对称结构,也可以是三维曲面或实体结构。

1.2.2 能够处理复杂的边界条件

在有限元法中,边界条件不需引入每个单元的特性方程,而是在求解结构代数方程时对有关特性矩阵进行处理,所以对内部和边界上的单元都采用相同的场变量函数。而当边界条件改变时,场变量函数不需要改变,因此边界条件的处理和程序编制非常简单。

1.2.3 能够保证规定的工程精度

当单元尺寸减小或插值函数的阶次增加时,有限元解收敛于实际问题的精确解。因此可通过网格加密或采用高阶插值函数来提高解的精度,从而使分析解具有一定的实用价值。

1.2.4 能够处理不同类型的材料

有限元法可用于各向同性、正交各向同性、各向异性及复合材料等多种类型材料的分析,还可处理随时间或温度变化的材料以及非均匀分布的材料。由于不同的单元可以独立赋予不同的材料特性,因此有限元法可以非常方便地处理由不同材料组成的结构,只需将不同材料划分为不同的单元,并对不同材料单元赋予相应的材料特性,如图 1－8 所示。

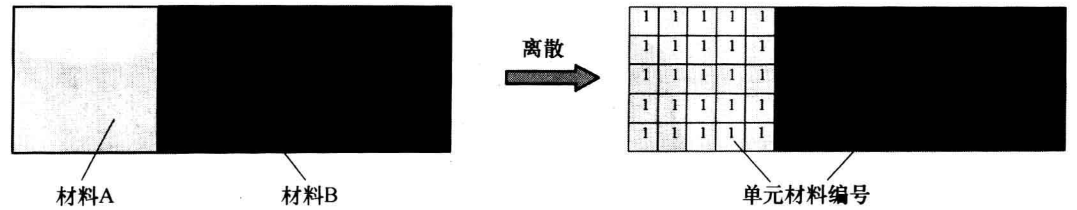


图 1－8 有限元法处理由不同材料组成的结构

1.3 有限元法的应用

有限元法是在 20 世纪 50 年代作为解决固体力学问题出现的,最初用于航空航天领域的强度、刚度计算。随着研究的深入,以及数值方法、矩阵理论的研究进展,特别是计算机技术的飞速发展,推动了有限元方法的广泛和深入应用。目前,有限元法已从它最初应用的固体力学领域,推广应用到温度场、流体场、电磁场、声场等其他连续介质领域。在固体力学领域,有限元法不仅可用于线性静力分析,也可用于动态分析,还可用于非线性、热应力、接触、蠕变、断裂、加工模拟、碰撞模拟等特殊问题的研究;有限元法已成为产品性能分析与仿真的一种非常有效的手段,也是现代设计方法的一个重要组成。

归纳起来,有限元法的应用领域主要有以下一些方面。

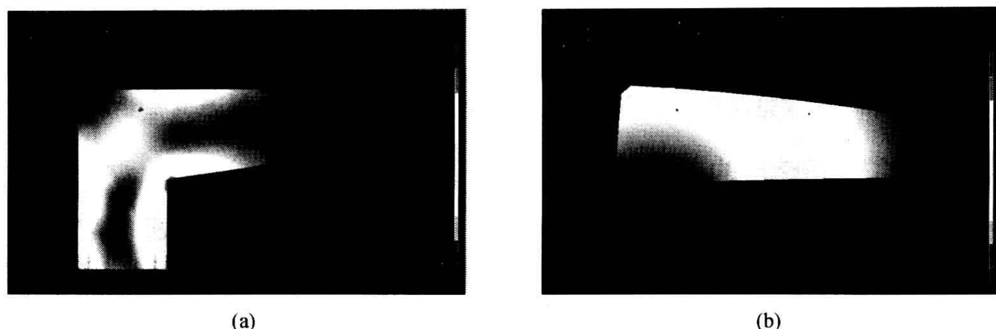
1.3.1 结构分析

结构分析包括静态和动态、线性和非线性分析等类型。

1. 线性静力分析

这是最简单、最基本也是应用最广的一类分析,主要计算结构在静力作用下的应力和

变形，从而进行产品的强度和刚度校核。图1－9(a)是一个机械零件的应力分布，图1－9(b)是零件的变形图。



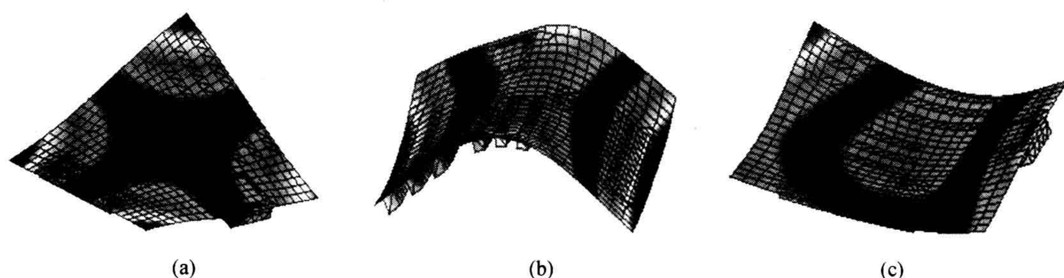
(a) (b)

图1－9　结构线性静力分析

(a)零件应力分布；(b)零件变形(虚线为原始形状)。

2. 动态分析

动态分析包括模态分析和响应分析。模态分析是计算由结构自身特性决定的固有频率、振型等模态参数，是响应分析的基础。图1－10为计算机主板的前三阶振型。



(a) (b) (c)

图1－10　计算机主板的前三阶模态振型

(a) 第一阶振型；(b) 第二阶振型；(c) 第三阶振型。

响应分析主要包括谐响应分析和随机响应分析。谐响应分析是计算结构在承受随时间正弦(简谐)变化载荷作用下的稳态响应，可以得到结构位移、应力等对频率的幅频特性。图1－11是航空发动机流场探针受简谐气流作用的位移—频率变化曲线。

3. 非线性分析

结构的非线性分析主要包括材料非线性、几何非线性和状态非线性三种类型。材料非线性是指由于材料本身非线性的应力应变关系导致结构非线性响应的现象。几何非线性是结构经受大变形，由其变化的几何形状引起结构非线性响应的现象，典型的几何非线性问题是曲屈分析，图1－12是某钢圈的屈曲变形云图。常见的状态非线性问题是结构的接触分析，图1－13是两齿轮啮合时的应力分布。

4. 过程模拟

物体碰撞、跌落、材料成形是一种高度非线性问题，用有限元法能对碰撞和跌落过程中的应力、变形等结果进行计算，图1－14(a)、(b)分别为汽车碰撞和冲压过程的有限元模拟。

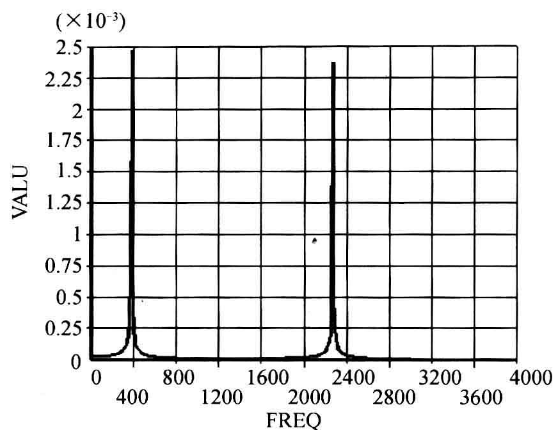


图 1－11　流场探针谐响应分析结果

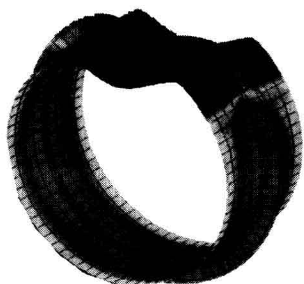


图 1－12　结构的屈曲变形云图

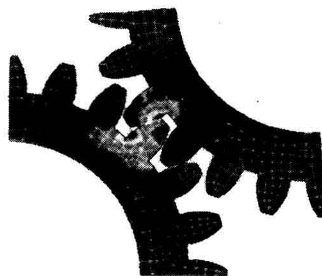
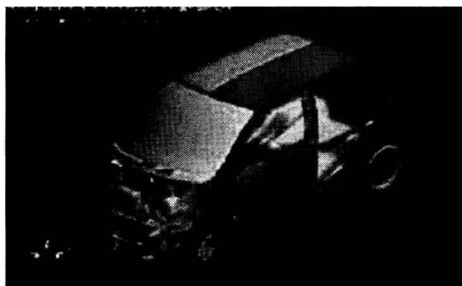
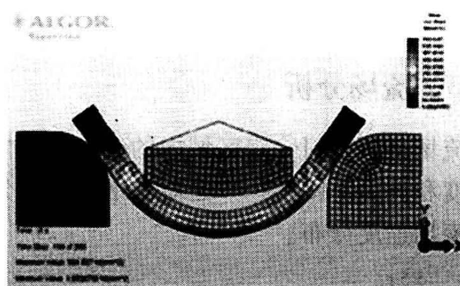


图 1－13　结构的接触分析



(a)



(b)

图 1－14　非线性过程的有限元模拟

(a)汽车碰撞模拟；(b)冲压过程模拟。

1.3.2　热分析

热分析是计算在热环境下结构(或区域)内部的温度分布和热流,以及由温度变化引起的热应力和热变形。有限元法可对稳态温度场和瞬态温度场进行计算。图 1－15 是叶轮工作时的温度分布,图 1－16 是移相器工作时的温度分布和热变形。

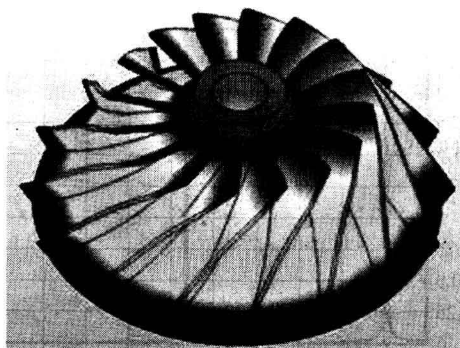


图 1 - 15　叶轮工作时的温度分布

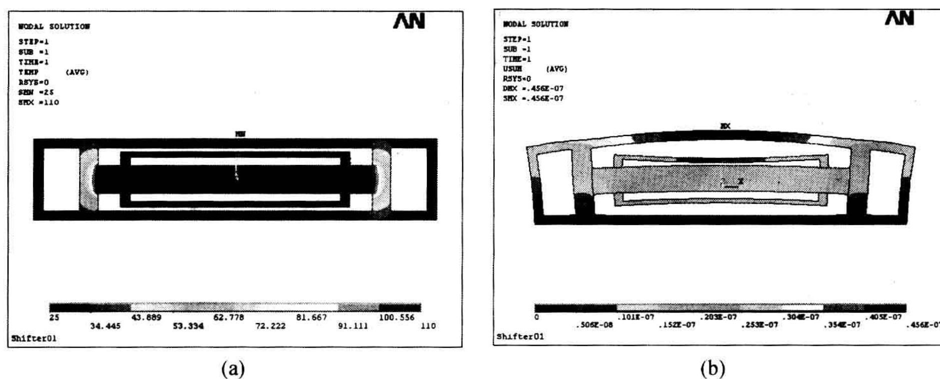


图 1 - 16　移相器工作时的温度分布和热变形

(a) 温度分布;(b) 热变形。

1.3.3　流场分析

流场分析是对一定区域内的流体(液体或气体)特性进行计算,计算的场变量主要包括速度和压力。图 1 - 17 是对二维流场的分析结果,图 1 - 18 是计算天线风载时得到的三维流场速度分布。

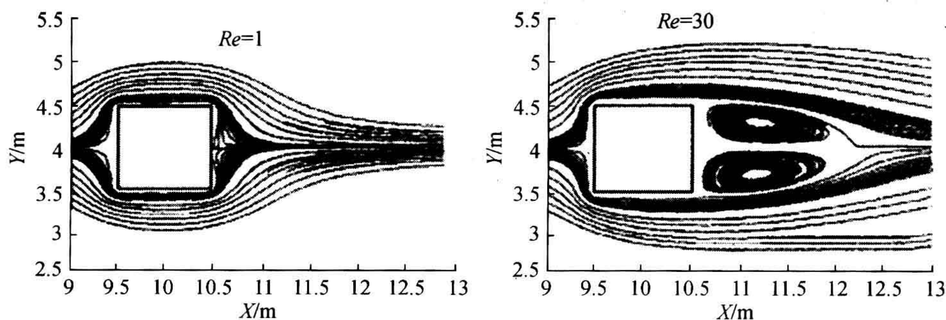


图 1 - 17　二维流场分析

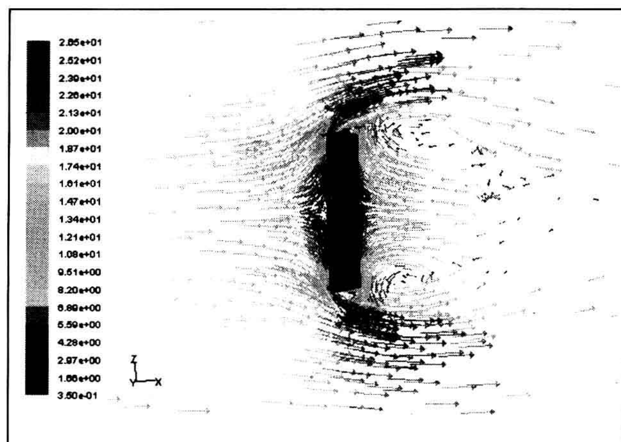


图 1－18　雷达天线附近流场纵剖面速度分布

1.3.4　电磁场分析

电磁场分析是对一定电磁环境下的电场特性和磁场特性进行计算，计算内容主要包括电场分布和磁场分布。图 1－19 是电涡流传感器在 1000MHz 激励电流作用下探头和被测体之间的磁场分布，图 1－20 为 E 型电机的磁场分布。

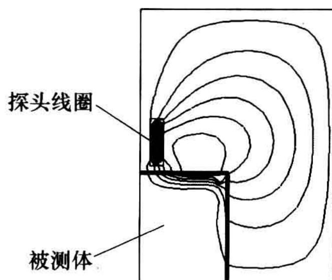


图 1－19　电涡流传感器的磁力线分布

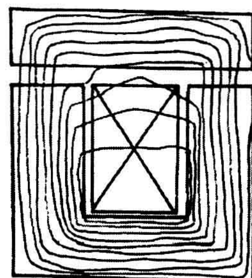


图 1－20　E 型电机的磁场分布

在电子设备的电磁兼容（EMC）设计中，利用有限元法可以对设备的电场和磁场分布及电磁屏蔽特性等进行数值计算，图 1－21 为服务器机箱表面电流分布。

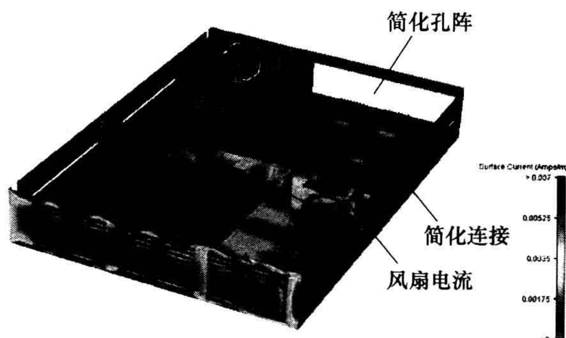


图 1－21　服务器机箱表面电流分布

1.3.5 声场分析

气流噪音分析通过流场计算，求出满足时间精度要求的各相关变量（压强、速度和密度）在音源曲面上的变化过程，然后利用求出的音源数据计算声音接收点处的声音压强信号。图 1－22 为服务器声场计算的噪音频谱图。

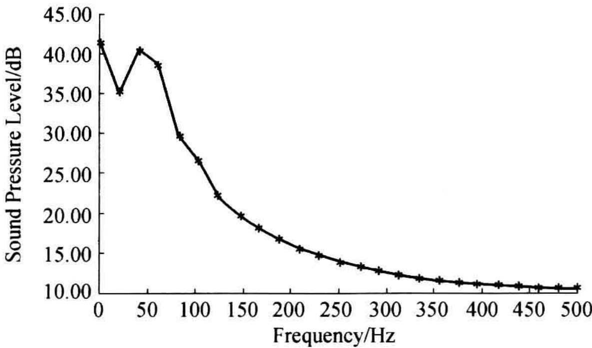


图 1－22 服务器噪音分析频谱图

1.4 有限元法在产品开发中的作用

在现代产品开发中，目前广泛使用 CAD/CAE/CAM 集成方法和手段。CAD 用于产品结构的表示，其作用是形成数字化产品；CAE 是对数字化产品的性能进行分析或仿真，其目的是在产品物理样机实现以前，对产品性能进行全面预测和优化，以提高产品性能和减小物理样机的制作次数；CAM 则是对产品制造过程进行设计，形成产品加工的工艺流程和数控代码，并利用数控设备进行制造。CAD、CAE、CAM 三种方法和手段的集成，能大大提高产品开发速度和质量，三者关系如图 1－23 所示。

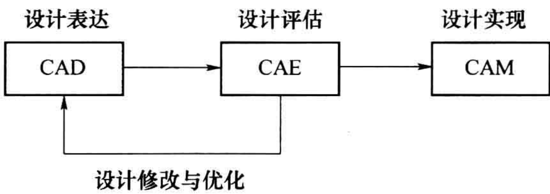


图 1－23 CAD/CAE/CAM 在产品开发中的作用

有限元法是 CAE 的主要方法，由于其独特的优越性，因此在产品开发中得到广泛应用。目前已开发出许多著名的有限元分析软件，如 ANSYS、NASTRAN、ABAQUS、ADINA、I－DEAS等。这些软件有很强的前后处理功能和丰富的计算能力，能够分析很多实际的工程和物理问题，因而大大推动了有限元法的应用。

1.5 本书编写说明

有限元法的实施过程大体需要经历 3 个环节，如图 1－24 所示。

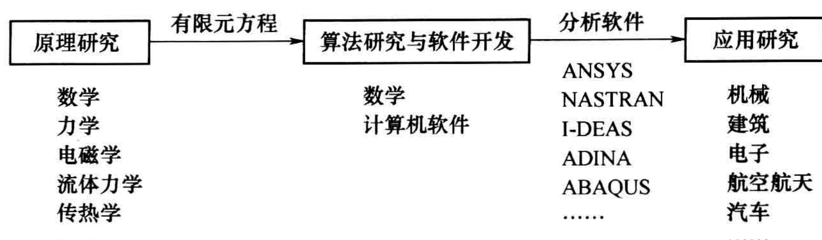


图 1－24　有限元法实施的 3 个环节

第 1 个环节是原理研究。它通过实际问题的物理规律，建立问题的数学描述即控制方程，并建立起求解数学问题的有限元方程。这部分工作是有限元法的基础理论研究，主要由从事数学、力学、传热学、电磁学等领域的研究人员完成。

第 2 个环节是算法研究与软件开发。它是基于所建立的有限元方程，研究合理、高效的数值算法，开发出求解有限元方程的软件。这部分工作主要由从事数学、计算机软件等专业的人员完成。

第 3 个环节就是应用研究。它是利用有限元分析软件解决工程和科研中的一些具体问题。由于已有许多功能很强的通用分析软件，所以应用者的职能不是开发软件，而是如何将具体的问题抽象为适合计算的有限元模型，并利用软件进行计算。从事这部分工作的人员包括机械、航空航天、建筑、汽车、电子、化工、船舶、石油等许多行业的科研和技术人员。

在涉及有限元法的人员中，绝大部分属于应用研究人员。本书编写的目的就是希望为广大应用人员提供原理、方法和应用的知识，以帮助他们培养和建立利用有限元法解决工程问题的能力。由于应用人员处于实施过程的末端，他们要应用好有限元法，除了掌握如何对分析对象进行建模外，还必须了解有限元法本身的概念和原理，同时还需掌握某种分析软件的使用和操作。

为此，本书内容共分为以下 3 篇。

第 1 篇为有限元法的基本原理。首先介绍有限元方法的基本概念和原理，然后介绍各类问题的有限元法。根据应用人员的特点，本篇采用了简要的原理介绍，力求避免复杂繁琐的理论推导，以使读者形成有限元法的一个基本理论框架。如果读者需要深入了解有限元理论，可参考有限元法的专著；

第 2 篇为有限元建模方法。本篇介绍有限元模型建立的基本过程、原则和方法。建模是将一个实际问题抽象为由单元、节点和边界条件组成的有限元模型，是应用有限元法的关键，它在很多程度上决定了计算结果的精度和计算时间的长短，同时分析人员的大量时间也主要用于建模上。

第 3 篇为有限元法的应用。本篇介绍目前常用的有限元分析软件 ANSYS，包括软件的主要功能、特点和基本使用方法。以便读者能对前面介绍的原理和建模方法进行实践和体会，形成有限元方法的初步应用能力。由于 ANSYS 功能很强，本书不能对其所有功能和应用方法进行全面介绍。如果希望熟练掌握软件的所有功能，请参考 ANSYS 的用户使用手册。

图 1－25 显示了整书的编排结构和内容体系。

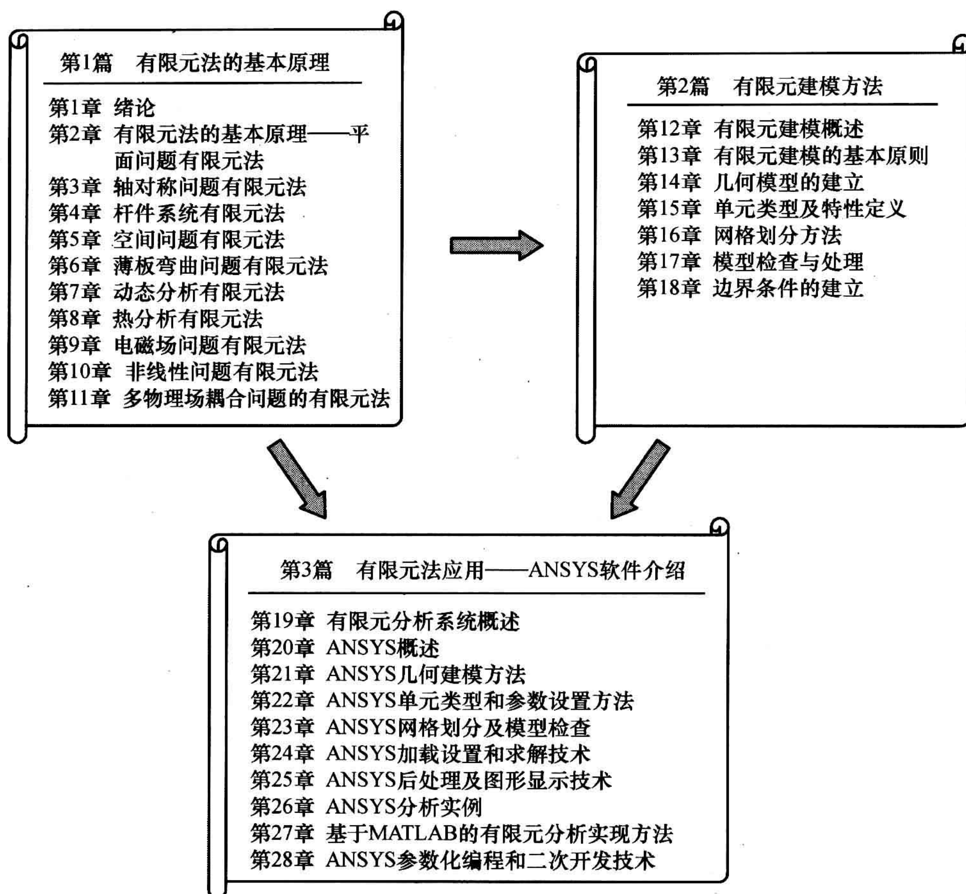


图 1－25 整书的编排结构和内容体系

第2章　有限元法的基本原理——平面问题有限元法

线性弹性平面问题的静力分析是力学特性分析中最简单、最基本的形式。线性是指结构的应力与应变的关系(本构关系)呈线性变化,是一类易于求解的问题,也是非线性问题求解的基础。弹性是指结构在外力拆除后能够完全恢复原有形状的特性,弹性问题的求解也是塑性问题计算的基础。静力分析则是指结构所受外力是不随时间变化的恒力,其有关的概念和方法也可推广应用到动态分析。

本章以线性弹性平面问题为对象,介绍有限元法的相关概念和基本原理。

2.1　弹性力学有关知识

为便于后面的叙述和推导,本节首先回顾弹性力学的相关知识。

2.1.1　弹性力学的物理量

载荷、应力、应变和位移是弹性力学的几个主要物理量。

1. 载荷

载荷是外界作用在弹性体上的力,又称为外力。它包括体力、面力和集中力三种形式。

体力是分布于整个弹性体体积内的外力,如重力和惯性力。在弹性体内任一点,单位体积的体力用 P_v 表示,它可分解为给定坐标系 x、y、z 三个坐标轴上的投影 p_{vx}、p_{vy}、p_{vz},称为体力分量。

体力的矩阵表示为

$$\{P_v\} = \{p_{vx} \quad p_{vy} \quad p_{vz}\}^{\mathrm{T}}$$

说明:本书用花括号“{ }”表示列矩阵,方括号“[ ]”表示方阵。为节省书写空间,列矩阵通常写成转置阵的形式,上角标 T 表示转置阵。

面力是作用于弹性体表面上的外力,如气体压力、液体压力和接触压力。在表面上任一点,作用在单位面积上的面力用 P_s 表示,它在坐标轴上的三个投影 p_{sx}、p_{sy}、p_{sz}称为面力分量。

面力的矩阵表示为

$$\{P_s\} = \{p_{sx} \quad p_{sy} \quad p_{sz}\}^{\mathrm{T}}$$

如果外力作用面很小,则可视为外力作用在物体表面的某一点,这种外力称为集中力。集中力用 P_c 表示,它在坐标轴上的投影 p_{cx}、p_{cy}、p_{cz}称为集中力分量。

集中力的矩阵表示为

$$\{P_c\} = \{p_{cx} \quad p_{cy} \quad p_{cz}\}^{\mathrm{T}}$$

力的单位常用牛顿，记为 N。

2. 应力

当弹性体受到载荷作用，其内部将产生内力。弹性体内某一点作用于某个截面单位面积上的内力称为应力（stress），它反映了内力在截面上的分布密度。应力单位常用 MPa，$1\mathrm{MPa} = 10^6\mathrm{Pa}$，$1\mathrm{Pa} = 1\mathrm{N/m^2}$。

为研究弹性体内某一点的应力，从该点附近切出一个微小的六面体，称为微分体，其棱边分别平行于三个坐标轴，如图 2－1 所示。

微分体表面上的应力可分解为一个正应力和两个剪应力。垂直于表面的应力称为正应力（normal stress），用字母 σ 表示，并附加一下角标，以表示应力的作用面和作用方向。如 σ_x 表示作用于垂直于 x 轴的平面上、沿 x 轴方向的正应力。平行于表面的应力称为剪应力（shear stress），又称切应力，用字母 τ 表示，并附加两个下角标，前一个表示 τ 的作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个表示作用方向。例如，τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的平面上且沿着 y 轴方向的剪应力。

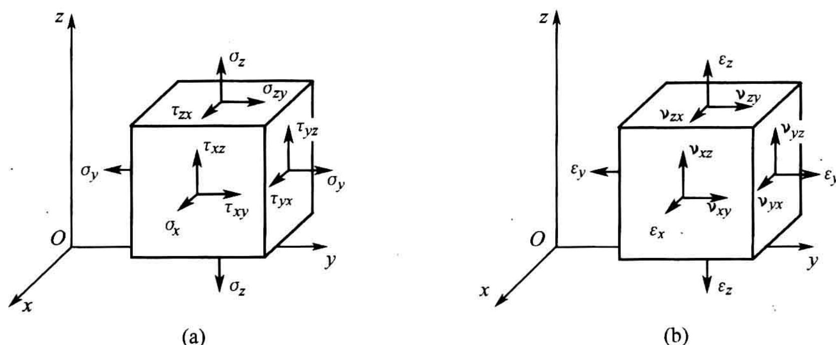


图 2－1 微分体的应力分量和应变分量

（a）微分体的应力分量；（b）微分体的应变分量。

根据剪应力互等定律，微分体上 6 个剪应力有如下关系：

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

因此，微分体上只有 6 个独立应力，即 3 个正应力 σ_x、σ_y、σ_z 和 3 个剪应力 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}，如图 2－1（a）所示。

某一点在不同方向截面上的应力是不同的，即同一点在不同方向上的应力不同，但任意截面上的应力都可通过上述 6 个应力求出，同时也可求得该点的最大、最小正应力和剪应力。也就是说，这 6 个应力决定了一点的应力状态，所以称之为该点的应力分量。

应力的矩阵表示为

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^{\mathrm{T}}$$

由于弹性体内各点的应力状态不一定相同，因此应力分量不是常量，而是坐标 x、y、z 的函数，由弹性体各质点应力组成的连续物理场称为应力场。

3. 应变

外力作用下弹性体将产生变形，因此微分体棱边的长度以及它们之间的夹角将发生

变化。各棱边每单位长度的伸缩量称为正应变(normal strain),各棱边之间的直角改变则称为剪应变(shear strain)。正应变用字母 ε 表示,下角标表示正应变的方向,如 ε_y 为 y 方向棱边的正应变。正应变以伸长为正,缩短时为负。剪应变用字母 ν 表示,两个下角标表示哪两个方向的棱边,如 ν_{yz} 为 y 与 z 两个方向的棱边之间的直角改变。剪应变以直角减小为正,增大为负。应变无量纲,其几何意义如图 2-2 所示。

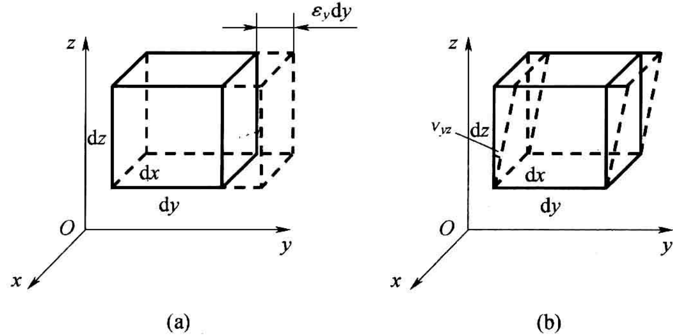


图 2-2　应变的几何意义

(a)正应变的几何意义;(b)剪应变的几何意义。

同样,微分体上存在 6 个独立应变 ε_x、ε_y、ε_z、ν_{xy}、ν_{yz}、ν_{zx},如图 2-1(b)所示。只要知道了这 6 个应变,便可求出该点任意方向棱边的正应变和任何两边之间的剪应变。即这 6 个应变决定了一点的应变状态,所以称为应变分量。

应变的矩阵表示为

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \nu_{xy} \quad \nu_{yz} \quad \nu_{zx}\}^{\mathrm{T}}$$

应变分量同样不是常量,也是坐标 x、y、z 的函数。

4. 位移

弹性体变形实际上是弹性体内质点的位置发生变化,质点位置的改变称为位移(displacement),用字母 d 表示。位移可分解为 x、y、z 三个坐标轴上的投影,称为位移分量。沿坐标轴正方向的位移分量为正,反之为负。

若用 u、v、w 分别表示 x、y、z 方向的位移分量,则位移的矩阵表示为

$$\{d\} = \{u \ v \ w\}^{\mathrm{T}}$$

弹性体发生变形时,各质点的位移不一定相同,因此位移也是 x、y、z 的函数。由弹性体各质点的位移组成的连续物理场称为位移场。

2.1.2　弹性力学基本方程

弹性力学基本方程描述弹性体应力、应变、位移以及外力之间的关系,包括平衡方程、几何方程和物理方程三类。

1. 平衡方程

弹性体受力后发生一定变形,然后处于新的平衡状态,因此微分体应力和体力在 x、y、z 三个方向满足以下平衡方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + p_{vx} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + p_{vy} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + p_{vz} = 0 \end{cases} \tag{2-1}$$

平衡方程是弹性体内部必须满足的条件，它说明 6 个应力分量不是独立的，它们通过 3 个平衡方程相互联系。

2. 几何方程

几何方程描述几何量应变和位移之间的关系，包括以下 6 个方程：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \nu_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \nu_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \nu_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \tag{2-2}$$

写成矩阵形式为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \nu_{xy} \\ \nu_{yz} \\ \nu_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{2-3}$$

式(2－3)说明一点的 6 个应变分量可用该点的 3 个位移分量表示，因此 6 个应变分量也不是独立的。

3. 物理方程

物理方程描述应力分量与应变分量之间的关系，这种关系与材料的物理特性有关。物理方程共有 6 个，其形式为

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) \\
\varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z - \mu\sigma_x) \\
\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y) \\
\nu_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \\
\nu_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz} \\
\nu_{zx} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx}
\end{cases}
\tag{2-4}
$$

式中:E 为材料的弹性模量;G 为剪切弹性模量;μ 为泊松比。它们满足式

$$
G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{2-5}
$$

从式(2-4)的前三式解出 σ_x、σ_y、σ_z,从后三式解出 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx},并考虑式(2-5)后,物理方程也可写成矩阵形式

$$
\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & \dfrac{\mu}{1-\mu} & \dfrac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\
\dfrac{\mu}{1-\mu} & 1 & \dfrac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\
\dfrac{\mu}{1-\mu} & \dfrac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \nu_{xy} \\ \nu_{yz} \\ \nu_{zx} \end{Bmatrix}
$$

简写为

$$
\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{2-6}
$$

式中

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\cdot\begin{bmatrix}1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix} \tag{2-7}$$

称为弹性矩阵，由弹性模量 E 和泊松比 μ 确定，与坐标无关。

由上可见，三类基本方程中共包括 15 个方程，含有 6 个应力分量、6 个应变分量和 3 个位移分量，共 15 个未知量，因而原则上可以解出这 15 个物理量。实际求解时并不是同时求出全部未知量，而是先求出一部分（称为基本未知量），再通过基本方程求出其他未知量。根据基本未知量的选法不同，也就产生了 3 种不同的解题方法——位移法、应力法和混合法。位移法以 3 个位移分量作为基本未知量，目前有限元法主要采用这种方法。

2.1.3 虚位移原理

变分原理是建立许多物理问题有限元方程的理论基础。虚位移原理是能量原理在力学特性分析中的一种具体形式。本章将利用这种原理建立单元特性方程。

1. 虚功与虚应变能

弹性体在外力作用下要发生变形，外力对弹性体做功。若不考虑变形中的热量损失、弹性体的动能及外界阻尼，则外力功将全部转换为储存于弹性体内的位能，这种位能称为应变能。当外力撤销后，应变能再使弹性体恢复原状。

图 2-3(a) 是从弹性体内取出的厚度为 1 的微分体。微分体在水平方向受拉力作用发生了位移 $\varepsilon_x \mathrm{d}x$，如果拉力是从零逐渐加大到 F，则拉力所做的功为

$$\mathrm{d}W=\frac{1}{2}F\varepsilon_x\mathrm{d}x$$

由于

$$F=\sigma_x\mathrm{d}y\times 1$$

则

$$\mathrm{d}W=\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-8}$$

储存在微分体内的应变能 $\mathrm{d}U$ 为

$$\mathrm{d}U=\mathrm{d}W=\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-9}$$

若用$\overline{U}$表示单位体积内的应变能,则

$$\overline{U} = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x \tag{2-10}$$

在应力—应变曲线上,$\overline{U}$就是图 2-3(b)中画垂线阴影部分的面积。应变能应为式(2-9)在整个结构区域内的积分,即

$$U = \frac{1}{2}\iint \sigma_x\varepsilon_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-11}$$

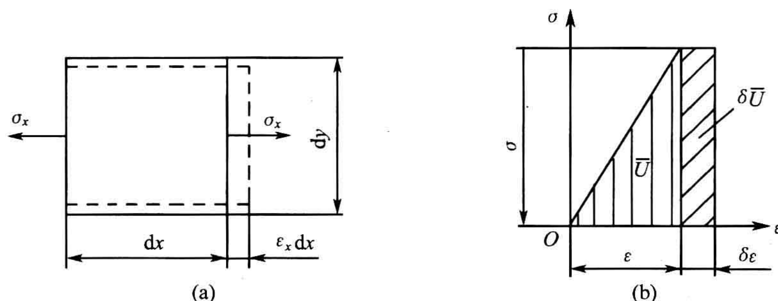


图 2-3 微分体的应变能

如果微分体上还有 σ_y 和 τ_{xy}的作用,根据力的独立作用原理,结构单位体积的应变能应为

$$\overline{U} = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\nu_{xy}) \tag{2-12}$$

写成矩阵形式,得

$$\overline{U} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\} \tag{2-13}$$

虚位移是指在约束条件允许的范围内弹性体可能发生的任意微小位移。它的发生与时间无关、与弹性体所受的外载无关。而弹性体在外载作用下产生的实位移是可能的虚位移。

同样,弹性体在平衡状态下发生虚位移时,外力要做虚功,大小为

$$\delta W = \{\delta f\}^{\mathrm{T}}\{R\} \tag{2-14}$$

式中:δW 为虚功;$\{\delta f\}$ 为虚位移;$\{R\}$ 为外力。

在发生虚位移的过程中,弹性体内将产生虚应变$\{\delta\varepsilon\}$。应力在虚应变上所做的虚功是储存在弹性体内的虚应变能,若用 δU 表示虚应变能,则

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\mathrm{d}V \tag{2-15}$$

式中:V 为弹性体体积。

单位体积内的虚应变能为

$$\delta\overline{U} = \{\delta\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\} \tag{2-16}$$

图 2-3(b)中右边画斜线的矩形面积表示 $\delta\overline{U}$的值。由于在平衡状态下发生虚位移时,外载已作用于弹性体,而且在位移过程中,外载和应力均保持不变,是恒力所做的功,

因此式(2－14)和式(2－15)中均不带有1/2因子。

2. 虚位移原理

虚位移原理又称虚功原理,是最基本的能量原理。它可叙述为:如果在虚位移发生之前弹性体是平衡的,那么在虚位移发生时,外力在虚位移上所做的虚功就等于弹性体的虚应变能,即

$$\delta W = \delta U \tag{2-17}$$

由式(2－14)和式(2－15),得

$$\{\delta f\}^{\mathrm{T}}\{R\} = \int_V \{\delta \varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\mathrm{d}V \tag{2-18}$$

上式就是虚位移原理的一般表达式。对于虚位移原理,在虚位移发生过程中,原有的外力、应力、温度及速度应保持不变,也就是说,不能有热能或动能的改变。

外力的形式有集中力$\{P_c\}$、体力$\{P_v\}$和表面力$\{P_s\}$,对于平面弹性体而言,上述外力的虚功为

$$\delta W = \{\delta f\}^{\mathrm{T}}\{P_c\} + \int_V \{\delta f\}^{\mathrm{T}}\{P_v\}\mathrm{d}V + \int_A \{\delta f\}^{\mathrm{T}}\{P_s\}\mathrm{d}s \tag{2-19}$$

2.1.4 平面问题定义

严格地讲,任何结构都是空间结构,但是当结构形状和载荷具有某种特殊性时,空间问题就可简化为平面问题。平面问题分为平面应力和平面应变问题。

1. 平面应力问题

当结构满足以下两个条件时,可认为是平面应力问题。

(1) 几何条件　厚度尺寸远远小于截面尺寸,即结构形状呈薄板形。

(2) 载荷条件　载荷平行于板平面且沿厚度方向均匀分布,垂直于板平面不受任何外力作用。

根据上述条件,在图2－4中,图(a)所示结构属于平面应力问题,而图(b)中结构的载荷与板平面不平行,图(c)中结构的厚度t与截面尺寸差不多,因此这两种结构不属于平面应力问题。一般地,当厚度$t \leqslant L/15$(L为截面特征尺寸)时,结构可作为平面应力问题。

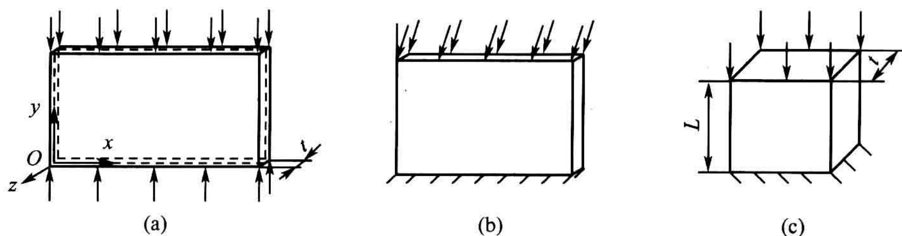


图2－4　平面应力问题与非平面应力问题

取平板结构的中面为坐标系的Oxy坐标面,厚度方向为z轴方向,建立坐标系如图2－4(a)所示。由于载荷垂直于z轴,板的端面($z=\pm t/2$)不承受载荷,因此端面各点应有

$$\sigma_z = 0 \text{ 和 } \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \tag{2-20}$$

板的内部存在上述应力,但由于板的厚度很小,这些应力也很小,可以不计。因此平面应力问题的应力特点为

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \tag{2-21}$$

根据物理方程,可得平面应力问题的应变特点为

$$\begin{cases} \nu_{zx} = \nu_{yz} = 0 \\ \varepsilon_z = \dfrac{\mu}{1+\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{cases} \tag{2-22}$$

即除 ε_z 外,平面应力问题沿厚度方向的应力和应变均为零。尽管 ε_z 不为零,但可由 ε_x、ε_y 求得,不是独立变量,可以不考虑。因此这类结构的应力分量和应变分量分别为

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^{\mathrm{T}} \tag{2-23}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \nu_{xy}\}^{\mathrm{T}} \tag{2-24}$$

这时几何方程变为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \nu_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{2-25}$$

物理方程变为

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{2-26}$$

式中

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{2-27}$$

称为平面应力问题的弹性矩阵。

工程中的许多结构都可作为平面应力问题来处理,如链传动中的链片、发动机中的连杆、内燃机的飞轮、轧机的机架和齿宽较小的直齿圆柱齿轮等。

2. 平面应变问题

满足以下两个条件的结构可视为平面应变问题。

(1) 几何条件　沿厚度方向的截面形状和大小相同且厚度尺寸远远大于截面尺寸,即结构呈等截面的细长形。

(2) 载荷条件　载荷垂直于厚度方向(平行横截面)且沿厚度均匀分布,两个端面不受力。

根据上述条件,在图 2-5 中,图(a)所示的水坝和受内压圆筒属于平面应变问题,图(b)中结构的载荷沿厚度方向不是均匀分布,图(c)中结构的截面形状沿厚度方向不相同,因此它们都不能简化为平面应变问题。

仍取结构的截面为坐标系的 Oxy 面,垂直截面的方向为 z 轴方向,如图 2-5(a)所

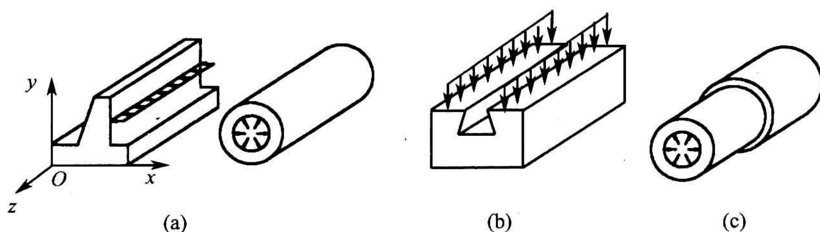


图 2－5 平面应变问题与非平面应变问题

示。根据平面应变问题的条件，结构沿 z 轴方向的位移分量应为零，即 $w=0$。因此由几何方程可得平面应变问题的应变特点为

$$\varepsilon_z = \nu_{yz} = \nu_{zx} = 0 \tag{2-28}$$

根据物理方程，可知这类结构的应力特点为

$$\begin{cases}\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \\ \sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)\end{cases} \tag{2-29}$$

由于 σ_z 是由 σ_x 和 σ_y 决定的非独立应力分量，因此在分析时可以不计。故平面应变问题的应力分量为

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^{\mathrm{T}} \tag{2-30}$$

应变分量为

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \nu_{xy}\}^{\mathrm{T}} \tag{2-31}$$

两者关系为

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{2-32}$$

式中

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \dfrac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{2-33}$$

称为平面应变问题的弹性矩阵。

比较式(2－27)和式(2－33)可知，把平面应力问题弹性矩阵中的 E 换成 $E/(2-\mu^2)$，μ 换成 $\mu/(2-\mu)$，则可得到平面应变问题的弹性矩阵。

工程中滚针轴承的滚针、轧钢机的轧辊、水坝、受内压管道、齿宽较大的直齿轮等都可按平面应变问题来处理。

综上所述，平面问题（包括平面应力和平面应变）只有 3 个应力分量 $\{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}^{\mathrm{T}}$、3 个应变分量 $\{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \nu_{xy}\}^{\mathrm{T}}$ 和 2 个位移分量 $\{u \ v\}^{\mathrm{T}}$，这些分量都是坐标 x、y 的函数，而与坐标 z 无关。因此平面问题的网格划分可在一个反映横截面形状的平面图形上进行。

但应指出，在平面应力问题中，虽然 $\sigma_z=0$，但 $\varepsilon_z\neq0$。而在平面应变问题中，虽然 $\varepsilon_z=0$，但 $\sigma_z\neq0$。只是这 2 个非零分量不是独立变量，所以在分析时未予考虑。

2.2 平面问题有限元法

本节以平面应力问题的静力分析为例，介绍有限元法的有关概念和基本原理。

2.2.1 结构离散

离散是有限元法处理问题的主要手段，无论什么类型的有限元分析，首先都要对分析对象进行离散。

如第一章所述，离散就是将一个连续的弹性体（实际上是描述弹性体形状和大小的几何区域，称为求解域）分割为一定数量的单元，从而将连续体转换为由有限个单元组成的组合体，离散的结果是形成单元和节点。图 2－6 是将一平面结构划分为 3 节点三角形单元的离散过程。

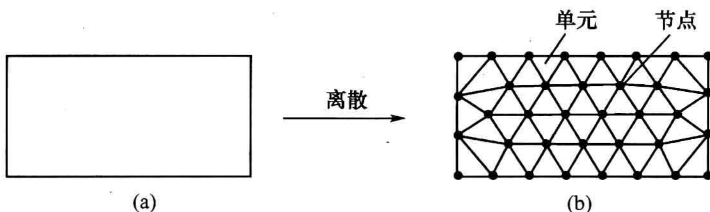


图 2－6　平面结构的离散过程

(a) 连续体；(b) 组合体。

由于单元在外观上表现为一定形状的栅格，所以仅从几何上看单元又称为网格，离散过程也称为划分网格，简称分网（meshing）。网格的形状可以是多样的，如平面网格有三角形、矩形和任意四边形，同一形状单元的节点数量也可以不同。

结构离散后，单元与单元之间的连接点称为节点，且单元之间仅通过节点连接，除此之外再无其他连接。也就是说，一个单元上的力只能通过节点传递到相邻单元。因此在图 2－7 中，图（a）、（b）、（c）、（d）均为不正确连接，只有图（e）为正确连接。

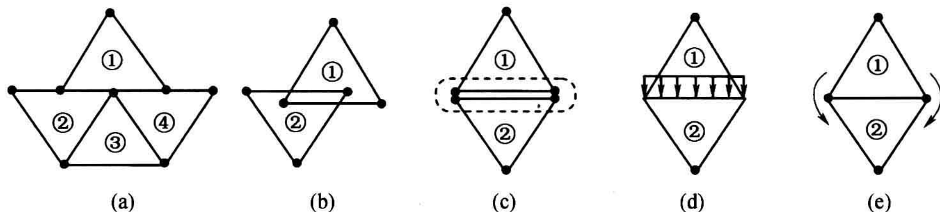


图 2－7　单元之间的错误与正确连接

(a) 单元①与其他单元之间没有通过节点连接，不能传递力；

(b) 单元之间重叠，无连接节点，不能传递力；

(c) 单元①、②只是简单堆放在一起，无公共节点，可相互错动、分离或重叠；

(d) 单元①与单元②通过边连接，力通过整个公共边传递；

(e) 单元①与单元②通过节点连接，力通过公共节点传递。

在结构分析中，选择节点位移作为基本未知量，又称为节点自由度。在平面问题中，三角形单元的每个节点有 x、y 两个方向的位移分量，即 2 个自由度，整个单元有 6 个自

由度。

结构离散以后，每个节点的位置已知（坐标系可任意定义），因此由若干节点组成的单元形状是确定的。同时，需要分别对每个节点和单元进行统一编号，该编号作为节点和单元的唯一标识符，因此不能重复。

2.2.2 单元分析

结构离散后形成单元和节点，单元分析的任务是形成每个单元的刚度矩阵，以建立单元特性方程。不失一般性，从组合体中任取一个单元，如图 2－8 所示。设单元编号为 e，3 个节点的编号为 i、j、m。在坐标系 Oxy 中，节点坐标为已知，分别设为 (x_i, y_i)、(x_j, y_j)、(x_m, y_m)。在平面内，每个节点有 x、y 两个方向的位移分量，分别表示为 (u_i, v_i)、(u_j, v_j)、(u_m, v_m)。

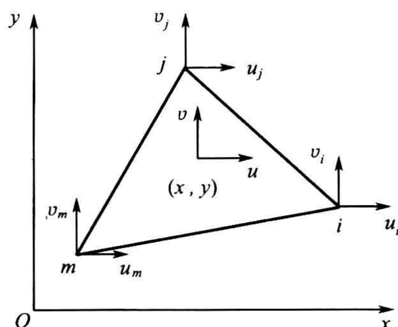


图 2－8　三角形 3 节点单元

1. 位移函数

按照有限元法分片插值思想，首先假设一种函数来近似表示单元内部的真实位移分布，该函数即为真实位移的插值函数，称为位移函数，又称位移模式。

根据数学理论，定义于某一闭域内的函数总可用一个多项式来逼近，所以位移函数常常取为多项式，一般形式为

$$\begin{cases} u = u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \cdots \\ v = v(x,y) = \alpha'_1 + \alpha'_2 x + \alpha'_3 y + \alpha'_4 x^2 + \alpha'_5 xy + \alpha'_6 y^2 + \cdots \end{cases} \tag{2-34}$$

式中：α_1、α_2、…、α_6 和 α'_1、α'_2、…、α'_n 为待定系数；u 表示 x 方向的位移分量，v 为 y 方向的位移分量。

多项式项数越多，逼近精度越高。项数的多少应根据单元自由度数确定。3 节点三角形单元有 6 个自由度，可以确定 6 个待定系数，故取式（2－34）中的前三项。因此这种三角形单元的位移函数为

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \tag{2-35}$$

式（2－35）为线性多项式，称为线性位移函数，相应的单元称为线性单元。如果单元节点越多，就可能构造阶次越高的位移函数，因此计算精度也就越高。线性位移函数的几何意义如图 2－9 所示。

由于节点 i、j、m 在单元上，它们的位移自然满足位移函数式（2－35）。将节点位移和

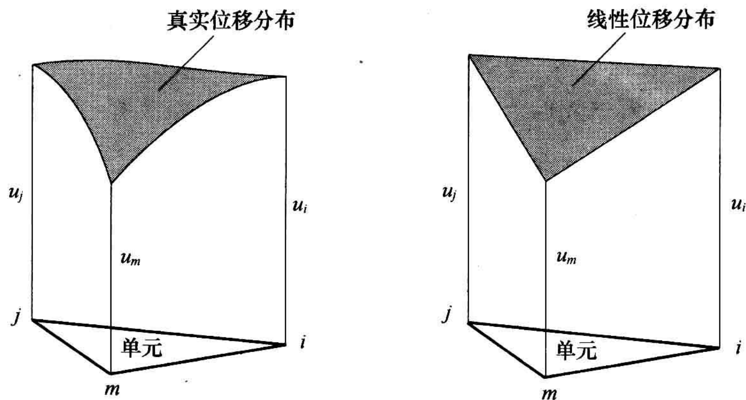


图 2-9　三角形单元线性位移函数的几何意义

节点坐标代入式(2-35),得

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ v_j = \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \\ v_m = \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m \end{cases} \tag{2-36}$$

式(2-36)共有 6 个方程,因而可以求出 6 个待定系数。根据 Gramer 法则,求出各待定系数为

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A}[(x_j y_m - x_m y_j)u_i + (x_m y_i - x_i y_m)u_j + (x_i y_j - x_j y_i)u_m]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A}[(y_j - y_m)u_i + (y_m - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_m]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A}[(x_m - x_j)u_i + (x_i - x_m)u_j + (x_j - x_i)u_m]$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2A}[(x_j y_m - x_m y_j)v_i + (x_m y_i - x_i y_m)v_j + (x_i y_j - x_j y_i)v_m]$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2A}[(y_j - y_m)v_i + (y_m - y_i)v_j + (y_i - y_j)v_m]$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{2A}[(x_m - x_j)v_i + (x_i - x_m)v_j + (x_j - x_i)v_m]$$

式中

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

为三角形单元的面积。

以上各式中,括号内都是节点坐标的代数式,为已知项。为书写方便,引入下列记号

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j,\ b_i = y_j - y_m,\ c_i = x_m - x_j$$

$$a_j = x_m y_i - x_i y_m, b_j = y_m - y_i,\ c_j = x_i - x_m$$

$$a_m = x_i y_j - x_j y_i, b_m = y_i - y_j,\ c_m = x_j - x_i$$

则 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ 的值为

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{2A}(a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{2A}(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \alpha_3 = \dfrac{1}{2A}(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) \\ \alpha_4 = \dfrac{1}{2A}(a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m) \\ \alpha_5 = \dfrac{1}{2A}(b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m) \\ \alpha_6 = \dfrac{1}{2A}(c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m) \end{cases} \tag{2-37}$$

将式(2-37)代入式(2-35),经整理,便可得到用节点坐标和节点位移表示的位移函数,即

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2A}[(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m] \\ v = \dfrac{1}{2A}[(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m] \end{cases} \tag{2-38}$$

为书写方便,再次引入记号

$$\begin{cases} N_i = \dfrac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j = \dfrac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_m = \dfrac{1}{2A}(a_m + b_m x + c_m y) \end{cases} \tag{2-39}$$

式中:N_i、N_j、N_m 为单元内各质点坐标的函数,称为形函数。它与节点坐标有关,而与节点位移无关。因此式(2-38)可以简写为

$$\begin{cases} u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{cases} \tag{2-40}$$

以矩阵表示为

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = [N]\{q\}^e \qquad (2-41)$$

式中：$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}$称为形函数矩阵；$\{q\}^e = \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m\}^T$称为单元节点位移列阵。

式(2-40)和式(2-41)就是单元位移的插值表达式，它表明只要知道了节点位移，就可通过形函数插值求出单元内任意一点的位移。例如，对于单元内某一点p，只要知道其坐标x_p、y_p，便可由式(2-39)求出该点的形函数值

$$N_{ip} = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x_p + c_i y_p)$$

$$N_{jp} = \frac{1}{2A}(a_j + b_j x_p + c_j y_p)$$

$$N_{mp} = \frac{1}{2A}(a_m + b_m x_p + c_m y_p)$$

再通过节点位移，便可插值出点p的位移为

$$\begin{cases} u_p = N_{ip}u_i + N_{jp}u_j + N_{mp}u_m \\ v_p = N_{ip}v_i + N_{jp}v_j + N_{mp}v_m \end{cases}$$

下面来考察一下形函数的性质。由式(2-40)可知，当$u_i = v_i = 1$，而其他节点的位移为零，即，$u_j = v_j = 0$及$u_m = v_m = 0$，有

$$u = N_i, \quad v = N_i$$

可见N_i的物理意义是：当节点i在某坐标方向发生单位位移而其他节点不动时，单元内的位移分布形状，如图2-10所示，这就是形函数的由来。

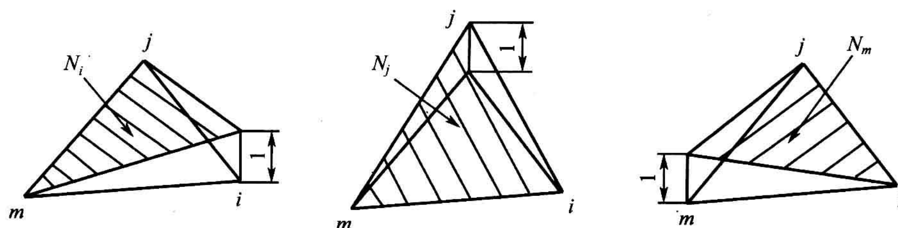


图2-10 形函数的形状

形函数是单元内各点坐标的函数，并不是节点位移的函数，其表达式与单元的位移函数有关，因此不同类型单元的形函数是不相同的。

形函数具有以下3条性质：

(1) N_i在i节点上的值为1，而在其他节点处为0，即

$$N_i(x_i,y_i) = 1,\ N_i(x_j,y_j) = N_i(x_m,y_m) = 0$$

同样有

$$N_j(x_j,y_j) = 1,\ N_j(x_i,y_i) = N_j(x_m,y_m) = 0$$

$$N_m(x_m,y_m) = 1,\ N_m(x_i,y_i) = N_m(x_j,y_j) = 0$$

(2) 在单元的任一点处,3 个形函数之和等于 1,即

$$N_i(x,y) + N_j(x,y) + N_m(x,y) = 1$$

(3) 单元每一条边的形函数只与该边上的节点位置有关,而与其他节点的位置无关。例如在边 i、j 上,有

$$N_i(x,y) = 1 - \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$$N_j(x,y) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

而

$$N_m(x,y) = 0$$

根据形函数的性质及其表达式,可以画出三角形单元的形函数变化图,如图 2 – 10 所示。

在选择位移函数时,应注意满足以下几个条件:

(1) 包括常数项　单元各点的位移一般包括两部分:一部分由单元自身变形引起;另一部分是由于其他单元变形时通过节点传递过来的,这部分位移与单元本身变形无关,它使单元发生整体移动,故称为刚体位移。由于刚体位移与点的位置无关,因此在位移函数中应该有常数项来反映这种位移。

(2) 包括一次项　单元各点的应变也包括两部分:一部分是与点的位置有关的变量应变,另一部分是与坐标位置无关的常应变。对于小变形问题,当单元尺寸缩小时,单元各点应变趋于相等,这时常应变为主要部分。为了反映这种应变状态,位移函数中就应该包括一次项,因为一次项求导后为常数。

(3) 尽量保证位移的连续性　弹性体实际变形时各点位移是连续的,即弹性体内部不会出现裂缝和材料重叠,因此离散后的组合体位移也应该连续。对于多项式位移函数,它在单元内部的连续性是自然满足的,关键是要求跨单元之间也应连续,即变形后相邻单元既不脱离,又不相互嵌入。

使位移函数满足上述 3 个条件的目的就是要满足有限元解的收敛性,即当单元尺寸逐渐缩小时,有限元解收敛于实际问题的精确解。第(1)项和第(2)项条件是有限元解收敛的必要条件,称为完备性条件,满足这种条件的单元称为完备单元。第(3)项条件是收敛的充分条件,又称协调条件,满足该条件的单元称为协调单元。协调单元的有限元解一定是收敛的,但非协调单元的解不一定不收敛。

位移函数式(2 – 35)显然满足完备性条件和单元内的连续性,下面来考察单元边界上的连续性。设两个相邻单元的公共边界为 ij,如图 2 – 11 所示,根据形函数的性质(3),在 ij 边上应有

$$N_m(x,y) = N_n(x,y) = 0$$

这时不论按哪个单元来计算,ij 边上的位移都为

$$u(x,y) = N_i u_i + N_j u_j$$

$$v(x,y) = N_i v_i + N_j v_j$$

上面两式说明,公共边上的位移由该边上两个节点的位移唯一确定,所以位移在公共边上是连续的,因此这种单元是协调单元。

(4) 几何各向同性　单元的位移分布不应与人为选取的坐标方位有关,即位移函数中坐标 x、y 应该是能够互换的。为满足这种几何各向同性要求,位移多项式应按图 2－12 所示的巴斯卡三角形来选择,即位移函数应包括三角形中某一行的所有项。例如,若取二次位移函数,则应包括 x^2、xy、y^2 三项,而不能只包含 x^2、xy 或 xy、y^2。

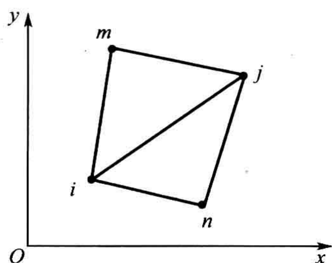


图 2－11　两个相邻三角形单元

$$
\begin{array}{c}
1 \\
x \quad y \\
x^2 \quad xy \quad y^2 \\
x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \\
x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4 \\
x^5 \quad x^4y \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5
\end{array}
$$

图 2－12　巴斯卡三角形

2. 单元应变和应力

通过上面的分析求出了单元位移函数,之后便可根据几何方程和物理方程求得单元应变和应力。将位移函数式(2－35)代入几何方程式(2－25),得

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \nu_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_6 \\ \alpha_3 + \alpha_5 \end{Bmatrix} \tag{2-42}$$

将式(2－37)中 α_2、α_6、α_3、α_5 的值代入式(2－42),得

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \nu_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2A}(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \frac{1}{2A}(c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m) \\ \frac{1}{2A}[(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) + (b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m)] \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A}\left[\begin{array}{cc:cc:cc} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

简记为

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}^e \tag{2-43}$$

式中

$$[B]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}=[B_i \quad B_j \quad B_m] \tag{2-44}$$

称为应变矩阵,其中每个子矩阵为

$$[B_l]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_l & 0 \\ 0 & c_l \\ c_l & b_l \end{bmatrix}(l=i,j,m) \tag{2-45}$$

应变矩阵$[B]$的每个非零元素均由节点坐标决定,由于节点坐标为定值,所以矩阵$[B]$为常数矩阵,因此3节点三角形单元是常应变单元。这是由于单元线性位移函数所引起的。

由式(2-26)和式(2-43),得

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}=[D][B]\{q\}^e=[S]\{q\}^e \tag{2-46}$$

式中

$$[S]=[D][B]=[S_i \quad S_j \quad S_m] \tag{2-47}$$

称为应力矩阵。其中每个子矩阵

$$[S_l]=\frac{E}{2(1-\mu^2)A}\begin{bmatrix} b_l & \mu c_l \\ \mu b_l & c_l \\ \frac{1-\mu}{2}c_l & \frac{1-\mu}{2}b_l \end{bmatrix}(l=i,j,m) \tag{2-48}$$

由于矩阵$[D]$、$[B]$均为常数矩阵,所以应力矩阵$[S]$也是常数矩阵,故3节点三角形单元也是常应力单元。由于相邻单元的应力是不同的常数,故单元边界的应力值将发生突变。

3. 单元刚度矩阵

单元分析的目的是建立单元的刚度矩阵,简称单刚。建立单刚的方法有直接法、变分法等,下面利用变分原理中的虚位移原理来建立。

设作用在单元节点上的力为F_i、F_j、F_m,它们在x、y方向上的分量为F_{ix}、F_{iy}、F_{jx}、F_{jy}、F_{mx}、F_{my},则单元节点力列阵为

$$\{F\}^e=\{F_i \quad F_j \quad F_m\}^T=\{F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{jx} \quad F_{jy} \quad F_{mx} \quad F_{my}\}^T$$

若单元在节点处发生虚位移

$$\{\delta q\}^e=\{\delta u_i \quad \delta v_i \quad \delta u_j \quad \delta v_j \quad \delta u_m \quad \delta v_m\}^T$$

相应的虚应变为

$$\{\delta\varepsilon\}^e=\{\delta\varepsilon_x \quad \delta\varepsilon_y \quad \delta\nu_{xy}\}^T$$

则节点力在虚位移上所做的虚功为

$$\delta W=\delta u_iF_{ix}+\delta v_iF_{iy}+\delta u_jF_{jx}+\delta v_jF_{jy}+\delta u_mF_{mx}+\delta v_mF_{my}=\{\delta q\}^{eT}\{F\}^e \tag{2-49}$$

根据式(2－15)，单元内存储的应变能为

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\mathrm{d}V = \iint \{\delta\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中：V 为单元体积；t 为单元厚度。

由于

$$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta q\}^e$$

所以

$$\{\delta\varepsilon\}^{\mathrm{T}} = \{\delta q\}^{e\mathrm{T}}[B]^{\mathrm{T}}$$

且节点位移仅与节点坐标有关，因此

$$\delta U = \iint \{\delta q\}^{e\mathrm{T}}[B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \{\delta q\}^{e\mathrm{T}}\iint [B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-50}$$

根据虚位移原理式(2－17)，有

$$\{\delta q\}^{e\mathrm{T}}\{F\}^e = \{\delta q\}^{e\mathrm{T}}\iint [B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

考虑到虚位移的任意性，可以将上式两边的$\{\delta q\}^{e\mathrm{T}}$同时消去，有

$$\{F\}^e = \iint [B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-51}$$

由于三角形单元为常应变和常应力单元，且厚度 t 也为常数，设单元面积为 A，则式(2－51)变为

$$\{F\}^e = [B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}t\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y = [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\{q\}^e tA \tag{2-52}$$

简写为

$$\{F\}^e = [k]^e\{q\}^e \tag{2-53}$$

式中

$$[k]^e = [B]^{\mathrm{T}}[D][B]tA \tag{2-54}$$

就是要求的单元刚度矩阵。式(2－53)为表示单元节点力与节点位移关系的单元特性方程。

将矩阵$[D]$、$[B]$的表达式(2－27)、式(2－44)代入到式(2－54)，可得单元刚度矩阵的分块表达形式为

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \tag{2-55}$$

其中每个分块阵的表达式为

$$[k_{rs}]_{2\times 2} = [B_r]^{\mathrm{T}}[D][B_s]tA$$

$$= \frac{Et}{4(1-\mu^2)A}\begin{bmatrix} b_r b_s + \dfrac{1-\mu}{2}c_r c_s & \mu b_r c_s + \dfrac{1-\mu}{2}c_r b_s \\ \mu c_r b_s + \dfrac{1-\mu}{2}b_r c_s & c_r c_s + \dfrac{1-\mu}{2}b_r b_s \end{bmatrix} \quad (r,s = i,j,m) \tag{2-56}$$

式中：b_r、b_s、c_r、c_s 是前面引入的由节点坐标决定的常数。

式(2－55)、式(2－56)即为要求的单元刚度矩阵，它与单元的材料有关(E、μ)，又与单元厚度、面积和形状有关。

下面来考察单元刚度矩阵的物理意义。将式(2－55)代入式(2－53)并展开，得

$$\begin{cases} \{F_i\} = [k_{ii}]\{q_i\} + [k_{ij}]\{q_j\} + [k_{im}]\{q_m\} \\ \{F_j\} = [k_{ji}]\{q_i\} + [k_{jj}]\{q_j\} + [k_{jm}]\{q_m\} \\ \{F_m\} = [k_{mi}]\{q_i\} + [k_{mj}]\{q_j\} + [k_{mm}]\{q_m\} \end{cases} \tag{2-57}$$

从式(2－57)可以看出，单元刚阵每个分块阵的物理意义为：当在一个节点处产生单位位移而其他节点位移为零时，在该节点上需要的力的大小。

例如，根据式(2－57)的第1式，令$\{q_j\}=1$，$\{q_i\}=\{q_m\}=0$，则$\{F_i\}=[k_{ij}]$，即$[k_{ij}]$表示在j节点产生单位位移、其他节点位移为0时，需要在i节点上施加的力。因此单元刚阵中每一个元素的物理意义是：当节点在某一方向(x或y)发生单位位移而其他方向位移和其他节点位移为零时，在一个节点处某一方向上需要施加的节点力。可见，单元刚度矩阵的每个元素反映了单元在某个方向上的刚度大小。

单元刚阵具有以下两个特性：

(1) 对称性，即

$$[k]^e = [k]^{eT}$$

上述特性是由弹性力学中功的互等定理决定的。

(2) 奇异性，即

$$|k^e| = 0$$

以式(2－57)的第1式为例，当F_i为零时，单元仍可以作刚体移动，因此有

$$q_i = q_j = q_m$$

则

$$([k_{ii}] + [k_{ij}] + [k_{im}])\, q_i = 0$$

由于q_i为任意数，所以只有

$$[k_{ii}] + [k_{ij}] + [k_{im}] = 0$$

$[k]^e$为奇异阵的物理意义是：在无约束的条件下，单元可以做刚体运动。

2.2.3 总刚集成

通过单元分析得到了单元特性方程$\{F\}^e=[k]^e\{q\}^e$，根据该式还不能求出$\{q\}^e$。因为节点力$\{F\}^e$包括单元之间的作用力，这些力属于内力，是未知的，而通常知道的是结构所受的外力。由于内力成对出现，它们大小相等，方向相反。因此如果将单元组装在一起，便能消除这些成对的内力，最终只剩下已知的外力，这便是总刚集成的目的。

总刚集成的任务是将所有单元的刚度矩阵集成为整个结构的刚度矩阵，称为总刚度矩阵，简称总刚，最后形成整个结构的平衡方程。

1. 总刚集成原理

单元分析时已对单元的每一个节点建立了平衡方程。如节点i，由式(2－57)，其平

衡方程为

$$\{F_i\} = [k_{ii}]\{q_i\} + [k_{ij}]\{q_j\} + [k_{im}]\{q_m\} = \sum_{s=i,j,m}[k_{is}]\{q_s\}^e \tag{2-58}$$

式(2－58)表明，单元任一节点发生位移$\{q_i\}$、$\{q_j\}$、$\{q_m\}$时，都将在节点i处产生节点力(实际上是由节点力引起位移)，且力的大小等于各个节点位移所引起节点力的叠加。

在整体结构中，一个节点往往为几个单元所共有，例如图2－13中的节点i。根据线性叠加原理，该节点上的节点力应为所有单元引起的节点力之和。结构平衡时，每个节点也是平衡的。如在图2－13中，设作用在节点i上的载荷为$\{R_i\}$，则节点i处的平衡方程为

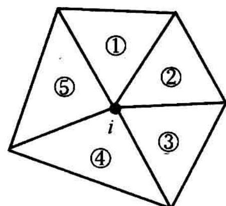


图2－13　单元节点力的叠加

$$\{F_i\}^1 + \{F_i\}^2 + \{F_i\}^3 + \{F_i\}^4 + \{F_i\}^5 = \{R_i\}$$

式中：$\{F_i\}^1$的上标1表示单元①在节点i处产生的节点力，其余类推。一般地，如果节点i由e个单元共有，则节点i处的平衡方程为

$$\sum_e \{F_i\}^e = \{R_i\} \tag{2-59}$$

将式(2－58)代入式(2－59)，得

$$\sum_e \sum_{s=i,j,m}[k_{is}]\{q_s\}^e = \{R_i\} \tag{2-60}$$

对于结构中的所有节点1、2、…n(n为结构离散后的节点总数)，有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_e \sum_{s=i,j,m}[k_{is}]\{q_s\}^e = \sum_{i=1}^{n}\{R_i\} \tag{2-61}$$

简记为

$$[K]\{q\} = \{R\} \tag{2-62}$$

式中：$\{q\} = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}^T$是模型中所有节点位移组成的列阵，称为节点位移列阵。前面介绍的$\{q\}^e$是单元所有节点(i、j、m)的位移组成的列阵，其右上标e反映了两者的区别；$\{R\} = \{R_1, R_2, \cdots, R_n\}^T$是作用在节点上的所有载荷组成的列阵，称为节点载荷列阵；$[K]$就是要求的总刚矩阵，其表达式为

$$[K] = \sum_{i=1}^{n}\sum_e \sum_{s=i,j,m}[k_{is}] \tag{2-63}$$

式(2－62)就是整个结构的平衡方程，称为结构的有限元方程，或刚度方程，它是以节点位移为未知量的线性方程组。

$[K]$中每个元素k_{ij}的物理意义和单刚元素相同，即在节点j发生单位位移而其他节点位移为零时，在节点i处产生的节点力。

下面以图2－14中的模型来说明总刚形成过程。

式(2－63)中的第一个求和表示按节点编号顺序依次形成$[K]$中的某一行。对于节点1，它只通过单元①与节点2、3有关，而与节点4、5、6不直接相关，因此有，$k_{14} = k_{15} = k_{16} = 0$，$k_{11} = k_{11}^1$，$k_{12} = k_{12}^1$，$k_{13} = k_{13}^1$，其中上标表示单元编号。

对于节点 2，它与节点 6 不直接相关，而与其他节点均相关。其中和节点 3 是通过单元①、②相关的，即当节点 3 产生位移时，它将通过单元①在节点 2 处产生节点力，也会通过单元②在节点 2 处产生节点力，因此 $k_{23}=k_{23}^{1}+k_{23}^{2}$，简记为 $k_{23}=k_{23}^{1+2}$，这就是式(2－44)中的第二个求和，即对围绕一个节点的所有单元求和。

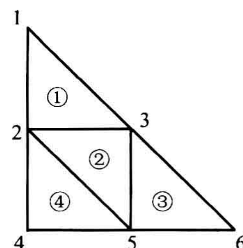


图 2－14　总刚形成示意模型

同理，$k_{22}=k_{22}^{1+2+4}$，$K_{25}=k_{25}^{2+4}$。其他总刚元素分别为 $k_{21}=k_{21}^{1}$，$k_{24}=k_{24}^{4}$，$k_{26}=0$。

按上述原理依次形成对应节点 3、4、5、6 的刚阵元素，便可得到下面的总刚矩阵

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11}^{1} & k_{12}^{1} & k_{13}^{1} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^{1} & k_{22}^{1+2+4} & k_{23}^{1+2} & k_{24}^{4} & k_{25}^{2+4} & 0 \\ k_{31}^{1} & k_{32}^{1+2} & k_{33}^{1+2+3} & 0 & k_{35}^{2+3} & k_{36}^{3} \\ 0 & k_{42}^{4} & 0 & k_{44}^{4} & k_{45}^{4} & 0 \\ 0 & k_{52}^{2+4} & k_{53}^{2+3} & k_{54}^{4} & k_{55}^{2+3+4} & k_{56}^{3} \\ 0 & 0 & k_{63}^{3} & 0 & k_{65}^{3} & k_{66}^{3} \end{bmatrix} \tag{2-64}$$

2. 总刚集成过程

根据上面介绍的总刚形成原理，总刚矩阵可按下面两步进行集成。

(1) 扩阶　将各个单元刚阵按节点总数 n 扩大为 $n\times n$ 阶方块阵，并将单刚元素送入该单元节点对应的节点总码的行和列，其余元素置为 0。如单元①、②的刚阵扩阶后变为

$$[k]^{1}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad [k]^{2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & 0 \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 叠加　扩阶后的单元刚阵具有相同的阶数和节点排列顺序，将各个单元刚阵按式

$$[K]=\sum_{e=1}^{n_e}[k]^{e}\qquad(n_e\ 为单元总数) \tag{2-65}$$

进行叠加，即相同位置的元素相加，就可得到总刚矩阵。对于图 2－14 所示模型，单元①、②、③、④的刚阵叠加结果就是式(2－64)中的总刚矩阵。

3. 总刚矩阵的特点

总刚矩阵 $[K]$ 具有以下特点：

(1) 对称性　总刚矩阵是由单元刚阵叠加形成的，所以它与单元刚阵一样也是对称阵，即 $[K]^{T}=[K]$。利用这一特性，计算时就只需要存储矩阵主对角线一侧的元素，从而可以节省近 1/2 的存储容量。

(2) 稀疏性　从前面总刚矩阵的形成原理可知，对应于某一节点的矩阵元素中，与该

节点无关的节点所对应的元素为零。而大型结构离散后，单元和节点数往往很多，而某一节点仅与周围少数单元和节点相关，因此[K]中存在大量的零元素，这种矩阵称为稀疏阵。

（3）带状性　总刚矩阵不仅具有稀疏性，且非零元素集中分布在主对角元素附近，如图2－15所示，这种分布特点称为带状分布。每一行中从主对角元素到最后一个非零元素的元素个数称为半带宽，其中的最大值称为最大半带宽。半带宽与节点的编号顺序有关。对于同一网格形式，不同的节点编号将产生不同的半带宽。利用这一特性，总刚矩阵通常采用半带存储方式，以节省存储容量。

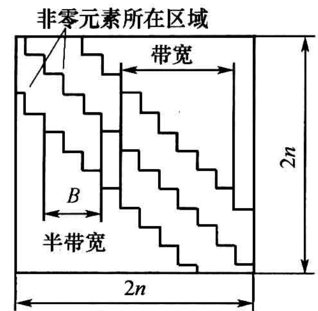


图2－15　总刚矩阵的带状特性

（4）奇异性　结构不加任何约束或约束不足时，其总刚矩阵是奇异阵，即$|K|=0$，物理上表现为结构整体可以作刚体运动，这时有限元方程式（2－62）的解不唯一。因此为了得到唯一的有限元解，就应限制结构的刚体运动，消除总刚矩阵的奇异性。

2.2.4　载荷移置

通过总刚集成形成了有限元方程$[K]\{q\}=\{R\}$，其中列阵$\{R\}$的元素为节点载荷，是集中力。但载荷除了集中力外，还有面力和体力，即使是集中力也不一定作用在节点上。因此需要将各种载荷转换为节点载荷，这就是载荷移置的目的和任务。

载荷移置遵循能量等效原则，即原载荷与移置产生的节点载荷在虚位移上所做的虚功相等。对于给定的位移函数，这种移置的结果是唯一的。在线性位移函数情况下，也可按静力等效原则进行移置。

载荷移置是在结构的局部区域内进行的。根据圣维南原理，这种移置可能在局部产生误差，但不会影响整个结构的力学特性。

1. 集中力的移置

集中力的移置是面力和体力移置的基础。如图2－16所示，设单元内某一点(x,y)作用一集中力$\{P_c\}$

$$\{P_c\}=\{p_{cx}\quad p_{cy}\}^{\mathrm{T}}$$

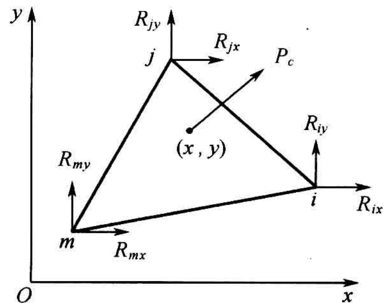


图2－16　集中力的移置

设$\{P_c\}$移置后产生的等效节点载荷为

$$\{R\}_{P_c}^{e}=\{R_{ix}\quad R_{iy}\quad R_{jx}\quad R_{jy}\quad R_{mx}\quad R_{my}\}^{\mathrm{T}}$$

如果节点发生虚位移$\{\delta q\}^e$，根据式（2－41），集中力作用点的虚位移为

$$\{\delta d\}^e=[N]\{\delta q\}^e$$

因此集中力$\{P_c\}$所做的虚功为

$$\{\delta d\}^{e\mathrm{T}}\{P_c\}$$

等效节点载荷所做的虚功为

$$\{\delta q\}^{eT}\{R\}^e_{P_c}$$

根据能量等效原则，有

$$\{\delta q\}^{eT}\{R\}^e_{P_c} = \{\delta d\}^{eT}\{P_c\} = \{\delta q\}^{eT}[N]^T\{P_c\}$$

由于虚位移是任意的，可从上式两边同时消去，有

$$\{R\}^e_{P_c} = [N]^T\{P_c\} \tag{2-66}$$

或写成

$$\{R\}^e_{P_c} = \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_m \end{Bmatrix}^e_{P_c} = \begin{Bmatrix} N_i\{P_c\} \\ N_j\{P_c\} \\ N_m\{P_c\} \end{Bmatrix}$$

上面两式就是集中力的移置公式。可见载荷移置的结果仅与单元形函数有关，当形函数确定后，移置的结果是唯一的。

2. 面力的移置

设厚度为 t 的平面单元单位面积上作用的面力为 $\{P_s\} = \{p_{sx} \quad p_{sy}\}^T$，如图 2-17 所示。从网格图上看，面力作用在棱边上，但实际上单元有一定厚度。若将微元面积 $dA = tdl$ 上的面力 $\{P_s\}dA$ 视为集中力，利用式(2-66)并积分，可得与面力等效的移置节点载荷为

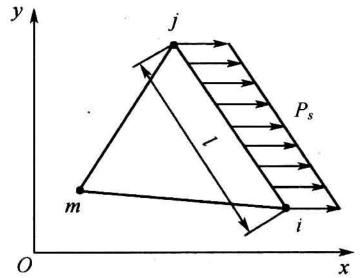


图 2-17 面力的移置

$$\{R\}^e_{P_s} = \int_A [N]^T\{P_s\}dA$$

在单元棱边上，$dA = tdl$（t 为单元厚度），因此有

$$\{R\}^e_{P_s} = \int [N]^T\{P_s\}tdl \tag{2-67}$$

也可写成

$$\{R\}^e_{P_s} = \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_m \end{Bmatrix}^e_{P_s} = \begin{Bmatrix} \int N_i\{P_s\}tdl \\ \int N_j\{P_s\}tdl \\ \int N_m\{P_s\}tdl \end{Bmatrix}$$

根据形函数的特点，在 ij 边上有 $N_m = 0$，所以 $\{R_m\}^e_{P_s} = 0$。因此在 ij 边上作用的面力只能移置到该边的两个节点上。

3. 体力的移置

设单元单位体积内作用的体力为

$$\{P_v\} = \{p_{vx} \quad p_{vy}\}^T$$

若将微元体 $tdxdy$ 上的体力 $\{P_v\}tdxdy$ 视为集中力，则利用式(2-66)并积分，可得与体力等效的移置节点载荷为

$$\{R\}^e_{P_v} = \iint [N]^T\{P_v\}tdxdy \tag{2-68}$$

也可写成

$$\{R\}_{P_v}^e = \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_m \end{Bmatrix}_{P_v}^e = \begin{Bmatrix} \iint N_i\{P_v\}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \iint N_j\{P_v\}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \iint N_m\{P_v\}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{Bmatrix}$$

上面介绍了3种载荷向节点移置的方法。根据叠加原理，一个单元上总的节点载荷应为上述3种载荷移置结果之和，即

$$\{R\}^e = \{R\}_{P_c}^e + \{R\}_{P_s}^e + \{R\}_{P_v}^e \tag{2-69}$$

如果一个节点与多个单元相关，则节点载荷应为所有相关单元向该节点移置的载荷的叠加。因此，对于整个结构而言，有

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{n_e} \{R\}^e \tag{2-70}$$

式中：n_e 为结构的单元数量；$\{R\}$ 为式(2-62)右端的节点载荷列阵。

2.2.5 约束处理

虽然通过总刚集成和载荷移置求出了矩阵[K]和{R}，但还不能求解方程$[K]\{q\}=\{R\}$，因为还没有考虑结构的几何约束。当结构不受约束或约束不足时，它在外力作用下会产生刚体运动，数学上表现为[K]是奇异阵，因此方程有无穷多个解。为了求出唯一的节点位移解，就必须施加足够的几何约束，以限制结构刚体运动，从而消除[K]的奇异性。

约束处理方法主要有以下两种。

1. 边界位移为零的处理方法

将总刚矩阵[K]中零位移分量对应行和列的主对角元素置为1，而其他元素皆变为0。在节点载荷列阵{R}中，将零位移分量对应的节点载荷也变为0。这样，矩阵[K]和{R}仍保持原有的阶数和排列顺序。例如图2-18所示的模型，边界约束条件为$u_2=v_2=v_6=0$，对应于节点位移列阵的分量$q_3=q_4=q_{12}=0$，对矩阵[K]、{R}进行处理后，结构的刚度方程变为

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} & k_{1,10} & k_{1,11} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} & k_{2,10} & k_{2,11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{11,1} & k_{11,2} & 0 & 0 & k_{11,5} & k_{11,6} & k_{11,7} & k_{11,8} & k_{11,9} & k_{11,10} & k_{11,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \vdots \\ q_{11} \\ q_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ R_{11} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

实际上，将上式[K]中的第3行、第4行、第12行与列矩阵相乘，就是节点位移约束

$$q_3 = 0, q_4 = 0, q_{12} = 0$$

2. 边界位移为已知值的处理方法

如果节点位移是大于零的已知值,则将该位移分量所对应的主对角元素置为大数,再将载荷列阵{R}中对应的分量置为大数乘以已知的节点位移,而其余各行保持不变。例如图2-19所示模型,节点4、5的水平位移为已知量Δ,对应于节点位移列阵的分量$q_7=q_9=\Delta$,则按所述方法对[K]、{R}处理后,结构刚度方程为

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} & k_{1,10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & M & k_{78} & k_{79} & k_{7,10} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} & k_{89} & k_{8,10} \\ k_{91} & k_{92} & k_{93} & k_{94} & k_{95} & k_{96} & k_{97} & k_{98} & M & k_{9,10} \\ k_{10,1} & k_{10,2} & k_{10,3} & k_{10,4} & k_{10,5} & k_{10,6} & k_{10,7} & k_{10,8} & k_{10,9} & k_{10,10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ M\Delta \\ R_8 \\ M\Delta \\ R_{10} \end{Bmatrix} \tag{2-71}$$

式中:M为给定的大数,如10^{10}或10^{15}。

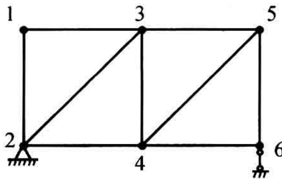


图2-18 具有零位移约束的模型

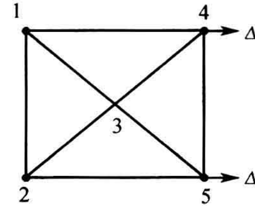


图2-19 具有非零位移约束的模型

由式(2-17)中的第七行,得

$$k_{71}q_1+k_{72}q_2+k_{73}q_3+k_{74}q_4+k_{75}q_5+k_{76}q_6+Mq_7+k_{78}q_8+k_{79}q_9+k_{7,10}q_{10}=M\Delta$$

解得

$$q_7=\Delta-\frac{k_{71}q_1+k_{72}q_2+k_{73}q_3+k_{74}q_4+k_{75}q_5+k_{76}q_6+k_{78}q_8+k_{79}q_9+k_{7,10}q_{10}}{M}$$

$$=\Delta-\text{相对小量}\approx\Delta$$

同样,得

$$q_9\approx\Delta$$

对于同一有限元模型,在同样的载荷作用下,引入不同的边界条件时计算出的结果可能会有很大的差别,因此分析时必须根据结构真实的位移状态引入正确的边界条件。

2.2.6 求解线性方程组

对矩阵[K]、{R}进行约束处理之后,原刚度方程变为

$$[\bar{K}]\{q\}=\{\bar{R}\} \tag{2-72}$$

式中:$[\bar{K}]$、$\{\bar{R}\}$为经约束处理后的总刚矩阵和节点载荷列阵。

式(2-72)是一个关于节点位移分量的线性方程组,利用适当的数值方法就能求出{q},即模型中所有节点的位移分量。有关线性方程组的数值解法,目前主要有高斯法、

波前法、带宽法等，详细介绍请参见数值分析的有关书籍。

2.2.7 计算其他物理量

求解式(2－72)计算出基本未知量——节点位移分量以后，便可利用式(2－41)、式(2－43)和式(2－46)求出单元各点的位移及单元应变和应力，即

$$\{d\} = = [N]\{q\}^e$$
$$\{\varepsilon\} = = [B]\{q\}^e$$
$$\{\sigma\} = [S]\{q\}^e$$

2.2.8 计算结果处理

由于三角形单元是常应力、常应变单元，所以单元之间的应力和应变有突变，如图2－20所示。为了使计算结果接近实际值，通常需要对单元应力、应变进行平均处理。处理的方法一般有两种，即绕节点平均和两单元之间平均。

绕节点平均就是将环绕节点的所有单元的应力加以平均，并用该平均值表示该节点的应力。例如在图2－21(a)中，节点1、2处的应力分别为

$$\sigma_1 = (\sigma^{①} + \sigma^{②})/2$$
$$\sigma_2 = (\sigma^{①} + \sigma^{②} + \sigma^{③} + \sigma^{④} + \sigma^{④} + \sigma^{⑥})/6$$

两单元平均就是将两个相邻单元的常量应力加以平均，并用该平均值表示公共边中点的应力。例如在图2－21(b)中，1、2两点的应力为

$$\sigma_1 = (\sigma^{①} + \sigma^{②})/2$$
$$\sigma_2 = (\sigma^{③} + \sigma^{④})/2$$

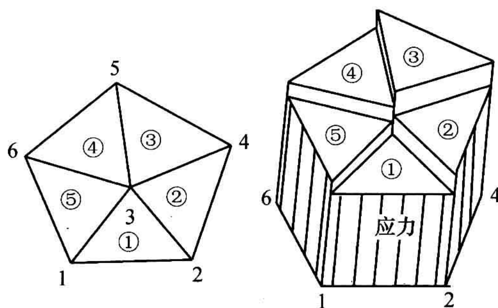


图2－20 单元之间的应力突变

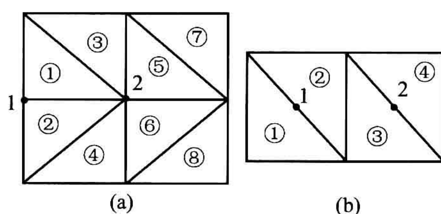


图2－21 分析结果处理

2.2.9 结果显示、打印、分析

将计算得到的各种物理量以一定方式显示出来，研究结果的合理性和可靠性，评估结构性能和设计方案的优劣，做出相应的改进措施。目前数据显示方式有等值云图、等值线图、变形图、箭头图(矢量图)、二维或三维曲线以及动画显示等。

至此，平面应力问题的有限元分析过程全部完成。

本章以平面应力问题为例，介绍了结构有限元分析的基本过程。从该过程我们接触了有限元法的基本概念，如单元、节点、位移函数、形函数、单元刚阵、总刚矩阵等，也了解

了有限元法处理问题的基本原理和解题思路,如离散、分片插值、位移法、能量原理、约束处理、载荷移置等。这些概念和原理是学习其他问题有限元法的基础。为此,下面再用图 2-22 对整个有限元分析过程进行总结。

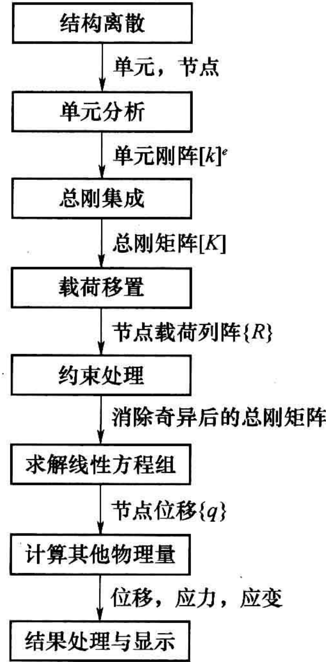


图 2-22　平面问题的有限元分析过程

第3章　轴对称问题有限元法

3.1　轴对称问题的定义和特点

3.1.1　轴对称问题的定义

当分析结构同时满足以下3个条件时，可认为是轴对称问题：

（1）几何形状轴对称　要求结构是相对对称轴的旋转体。例如在图3－1中，图(a)所示的结构是轴对称体，它是通过子午面形状绕对称轴 $A-A$ 旋转形成的；而图(b)中的结构尽管也相对中心轴线对称，但它不是旋转体，所以不能认为是轴对称体，实际上这是一种周期对称结构。

（2）边界条件轴对称　要求结构受到的载荷和位移约束条件具有轴对称性。例如图3－1(a)中的轴对称体，若它所受载荷是因结构旋转而产生的惯性力，则旋转轴必须是对称轴 $A-A$。若要考虑重力，轴线 $A-A$ 则必须处于垂直方向，否则，重力和惯性力就不会满足轴对称条件。

（3）材料轴对称　要求结构的材料特性具有轴对称性。当材料是各向同性材料时，这种条件是自然满足的。如果材料为一般各向异性材料，则这种条件难以满足。当材料是正交各向异性材料时，则材料主轴应与结构的径向、切向和轴向一致。

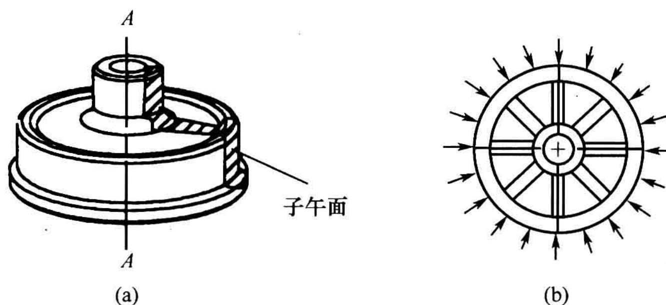


图3－1　轴对称结构和非轴对称结构

3.1.2　轴对称问题的应力应变特点

轴对称问题的特点是结构的位移、应变和应力都呈轴对称分布。分析轴对称问题时，通常采用柱坐标系(r,θ,z)，并以 z 轴为对称轴，如图3－2(a)所示。根据轴对称问题的特点，结构中的应力、应变和位移都与角度 θ 无关，只是 r 和 z 的函数。任意一点的位移只有沿 r 方向的径向位移 u 和沿 z 方向的轴向位移 w，而沿 θ 方向的切向位移等于零。因此，可以取出结构的任一子午面进行分析，从而将三维问题转化为二维问题来求解。

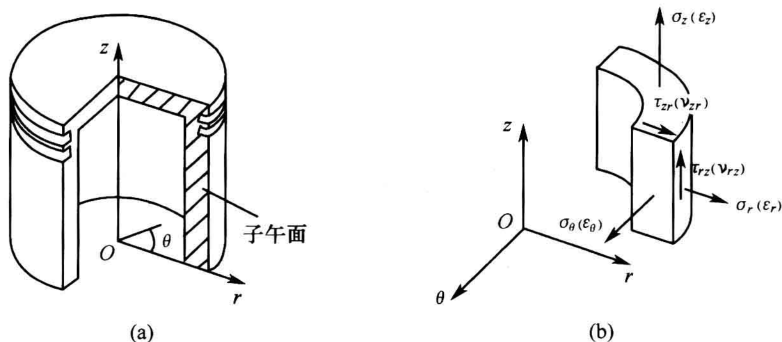


图 3－2　轴对称问题的坐标系和应力、应变

图 3－2(b)是从轴对称结构中取出的一个微分体。根据轴对称特点，有

$$\tau_{r\theta}=\tau_{z\theta}=0$$

$$\nu_{r\theta}=\nu_{z\theta}=0$$

但径向变形将引起周向应变，即

$$\varepsilon_\theta=\frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r}=\frac{u}{r}$$

因此在轴对称问题中，每一个点具有 4 个应力分量

$$\{\sigma\}=\{\sigma_r\quad\sigma_\theta\quad\sigma_z\quad\tau_{rz}\}^{\mathrm{T}}$$

和 4 个应变分量

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_r\quad\varepsilon_\theta\quad\varepsilon_z\quad\nu_{rz}\}^{\mathrm{T}}=\left\{\frac{\partial u}{\partial r}\quad\frac{u}{r}\quad\frac{\partial w}{\partial z}\quad\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right\}^{\mathrm{T}}\tag{3－1}$$

它们的关系为

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}\tag{3－2}$$

式中

$$[D]=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1-\mu&\mu&\mu&0\\\mu&1-\mu&\mu&0\\\mu&\mu&1-\mu&0\\0&0&0&\dfrac{1-2\mu}{2}\end{bmatrix}$$

称为轴对称问题的弹性矩阵。

轴对称结构的几何模型是一个表示子午面形状的平面图形，可用相应的轴对称实体单元划分网格。与平面问题相比，轴对称问题的应力和应变分量各多一个，所以计算量稍大。

3.2　轴对称问题有限元法

3.2.1　结构离散

轴对称结构本身是一个三维结构，由于形状和载荷的特殊性，其网格划分仅在任一子

午面上进行,因此网格表现为平面网格,但实际上单元具有环状的空间结构。本章采用3节点三角形单元,单元形状如图3-3(a)所示。三角形单元在分析结构中的实际空间形状如图3-3(b)所示。

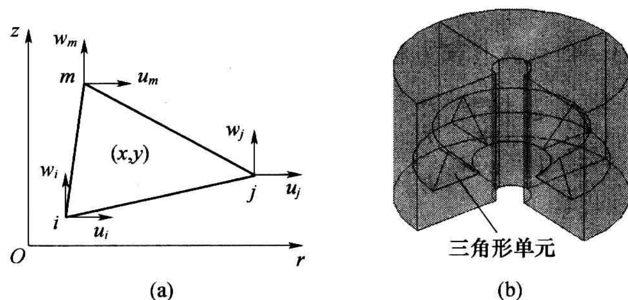


图3-3 3节点三角形轴对称环单元

(a)3节点三角形单元;(b)3节点三角形单元的空间结构。

3.2.2 单元分析

从划分的平面网格中任取一个单元,如图3-3(b)所示。3个节点的编号分别为 i,j,m,节点坐标已知,分别为(r_i,z_i)、(r_j,z_j)、(r_m,z_m)。设对应的节点位移分别为(u_i,w_i)、(u_j,w_j)、(u_m,w_m)。

1. 位移函数

选择线性位移函数,则节点的位移可表示为

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z \\ w = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z \end{cases} \tag{3-3}$$

与平面问题类似,将节点 i、j、m 的坐标值和位移代入式(3-3),整理后得

$$\begin{cases} u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ w = N_i w_i + N_j w_j + N_m w_m \end{cases}$$

或写成

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N]\{q\}^e \tag{3-4}$$

式中

$$\{q\}^e = \{u_i \quad w_i \quad u_j \quad w_j \quad u_m \quad w_m\}^{\mathrm{T}}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}$$

式中:N_i、N_j、N_m 是形函数,其表达式为

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i r + c_i z) \\ N_j &= \frac{1}{2A}(a_j + b_j r + c_j z) \\ N_m &= \frac{1}{2A}(a_m + b_m r + c_m z) \end{aligned} \tag{3-5}$$

其中各系数的表达式分别为

$$a_i = r_j z_m - r_m z_j,\quad b_i = z_j - z_m,\quad c_i = r_m - r_j$$
$$a_j = r_m z_i - r_i z_m,\quad b_j = z_m - z_i,\quad c_j = r_i - r_m$$
$$a_m = r_i z_j - x_j z_i,\quad b_m = z_i - z_j,\quad c_m = r_j - r_i$$

2. 单元应变

将位移函数式(3-4)代入几何方程式(3-1),得

$$\{\varepsilon\} = \left\{\frac{\partial u}{\partial r} \quad \frac{u}{r} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right\}^{\mathrm{T}} = [B]\{q\}^e \tag{3-6}$$

式中
$$[B] = [B_i \quad B_j \quad B_m]$$

其中
$$B_l = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_l & 0 \\ f_l & 0 \\ 0 & c_l \\ c_l & b_l \end{bmatrix} \quad (l = i,j,m)$$

$$f_l = \frac{a_l + b_l r + c_l z}{r} \quad (l = i,j,m)$$

由此可见,周向应变分量 ε_θ 与 f_l 有关,并随 r, z 而改变,不是常量,因此应变矩阵 $[B]$ 不是常量矩阵。

3. 单元应力

将式(3-6)代入式(3-2),得到单元应力

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{q\}^e = [S]\{q\}^e = [S_i \quad S_j \quad S_m]\{q\}^e \tag{3-7}$$

式中

$$S_l = \frac{E(1-\mu)}{2A(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} b_l + A_1 f_l & A_1 c_l \\ A_1 b_l + f_l & A_1 c_l \\ A_1(b_l + f_l) & c_l \\ A_2 c_l & A_2 b_l \end{bmatrix} \quad (l = i,j,m)$$

$$A_1 = \frac{\mu}{1-\mu} \qquad A_2 = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$$

3.2.3 单元刚度矩阵

和平面问题一样,本章仍用虚位移原理来推导三角形环单元的单元刚度矩阵。在轴对称情况下单元的虚功方程为

$$\{\delta q\}^{e\mathrm{T}}\{F\}^e = \iiint_e \{\delta\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

式中:等号左边为单元等效节点力 $\{F\}^e$ 所做的虚功,注意此时的节点力是指整个三角形环单元上的力;等号右边是指整个三角形环单元中的应力所做的虚功。

假设单元的虚位移为 $\{\delta q\}^e$,则单元的虚应变为

$$\{\delta\varepsilon\}^e = [B]\{\delta q\}^e$$

将上式代入虚功方程,得

$$\{\delta q\}^{eT}\{F\}^{e} = \iiint_{e}\{\delta q\}^{eT}[B]^{T}\{\sigma\} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$= \{\delta q\}^{eT}\iiint_{e}[B]^{T}\{\sigma\} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

考虑到虚位移的任意性，将上式两边的$\{\delta q\}^{eT}$同时消去，有

$$\{F\}^{e} = \iiint_{e}[B]^{T}\{\sigma\} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\iint_{e}[B]^{T}[D][B] r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\{q\}^{e}$$

$$= [k]^{e}\{q\}^{e}$$

式中

$$[k]^{e} = 2\pi\iint_{e}[B]^{T}[D][B] r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \tag{3-8}$$

就是三角形环单元的单元刚度矩阵。

由于应变矩阵$[B]$中含有$1/r$因子，当$r=0$时，式(3-8)积分时会出现奇异性。因此，把单元中随位置变化而变化的r和z用单元截面的形心坐标来近似，即令

$$r \approx \bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_m}{3}$$

$$z \approx \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_m}{3}$$

进行上述近似后，$[B]$和$[S]$都成为常量矩阵，对式(3-8)积分，得

$$[k]^{e} = 2\pi\bar{r}[B]^{T}[D][B]A = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \tag{3-9}$$

式中：A是三角形单元的面积。

$[k]^{e}$的子矩阵计算公式为

$$[k_{rs}] = 2\pi\bar{r}[B_r]^{T}[D][B_s]A = \frac{\pi E(1-\mu)\bar{r}}{2A(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = b_r b_s + f_r f_s + A_1(b_r f_s + f_r b_s) + A_2 c_r c_s$$

$$k_2 = A_1 c_r(b_s + f_s) + A_2 b_r c_s$$

$$k_3 = A_1 c_s(b_r + f_r) + A_2 b_s c_r$$

$$k_4 = c_r c_s + A_2 b_r b_s$$

$$f_l \approx \bar{f}_l = \frac{a_l + b_l\bar{r} + c_l\bar{z}}{\bar{r}} \quad (l = i,j,m)$$

$$A_1 = \frac{\mu}{1-\mu} \qquad A_2 = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$$

实际计算表明，采用近似积分不仅计算方便，其精度同样能满足要求。因此，一般采用近似积分计算3节点三角形环单元的单元刚度矩阵。有兴趣的读者可自行推导单元刚

度矩阵的精确积分。

3.2.4 总刚集成

求出每一个三角形环单元的刚度矩阵后，即可按照第 2 章介绍的总体刚度矩阵的集成方法，得到结构的总刚矩阵，从而形成刚度方程

$$[K]\{q\} = \{R\}$$

式中：$[K]$为结构总刚矩阵；$\{q\}$为节点位移列阵；$\{R\}$为节点载荷列阵。

3.2.5 等效节点载荷的计算

计算轴对称问题的等效节点载荷与平面问题有所不同，因为轴对称结构的子午面上的一个节点是一个关于对称轴中心对称的圆环，故当计算集中力、表面力和体积力时，应在整个环上积分。下面讨论几种常见载荷的等效移置。

1. 集中力的移置

设三角形环单元内任意一点(r,z)处作用有集中外载荷 P_c，它在 r 和 z 方向上的分量分别为 p_{cr}和 p_{cz}，用矩阵表示为

$$\{P_c\} = \{p_{cr} \quad p_{cz}\}^{\mathrm{T}}$$

P_c 移置后对应的节点载荷列阵为

$$\{R\}_{P_c}^{e} = \{R_{ir} \quad R_{iz} \quad R_{jr} \quad R_{jz} \quad R\,mr \quad R_{mz}\}^{\mathrm{T}}$$

根据虚位移原理，等效节点载荷与原载荷在虚位移上作的虚功应相等，即

$$\{\delta q\}^{e\mathrm{T}}\{R\}_{P_c}^{e} = \{\delta d\}^{e\mathrm{T}}\{P_c\} = \{\delta q\}^{e\mathrm{T}}[N]^{\mathrm{T}}\{P_c\} \tag{3-10}$$

由于虚位移的任意性，由式(3-10)，得

$$\{R\}_{P_c}^{e} = [N]^{\mathrm{T}}\{P_c\} \tag{3-11}$$

展开，得

$$\{R\}_{P_c}^{e} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} p_{cr} \\ p_{cz} \end{Bmatrix} =$$

$$\{N_i p_{cr} \quad N_i p_{cz} \quad N_j p_{cr} \quad N_j p_{cz} \quad N_m p_{cr} \quad N_m p_{cz}\}^{\mathrm{T}} \tag{3-12}$$

2. 表面力的移置

设单元的 jm 边作用有均布荷载 P_s，其方向以压向单元边界为正，如图 3-4 所示。

表面力的矩阵表示为

$$\{P_s\} = \begin{Bmatrix} p_{sr} \\ p_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_s \dfrac{z_j - z_m}{\overline{jm}} \\ P_s \dfrac{r_m - r_j}{\overline{jm}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_s \dfrac{b_i}{l} \\ P_s \dfrac{c_i}{l} \end{Bmatrix}$$

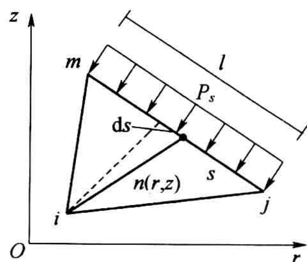


图 3-4 三角形环单元上作用表面力

令

$$z \approx \bar{z} = \frac{z_j + z_m}{2}$$

和式(3－10)类似,得单元表面力列矢量为

$$\{R\}_{P_s}^e = \int_l [N]^{\mathrm{T}}\{P_s\} z\mathrm{d}s = \bar{r}\int_{\overline{jm}} [N]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s\{P_s\}$$

$$= \bar{r}\int_{\overline{jm}} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} P_s \dfrac{b_i}{l} \\ P_s \dfrac{c_i}{l} \end{Bmatrix} \mathrm{d}s \qquad (3-13)$$

由式(3－5)可知,在$\overline{jm}$边上,有

$$N_i(r,z) = 0 \qquad (3-14)$$

令

$$N_m = \frac{\overline{jn}}{\overline{jm}} = t \qquad (3-15)$$

$$N_j = 1 - \frac{\overline{jn}}{\overline{jm}} = 1 - t \qquad (3-16)$$

$$s = \overline{jn} = \overline{jm}t = lt \qquad (3-17)$$

则

$$\mathrm{d}s = \overline{jm}\mathrm{d}t = l\mathrm{d}t \qquad (3-18)$$

将式(3－14)～式(3－18)代入式(3－13),积分得表面力 P_s 的等效节点载荷为

$$\{R\}_{P_s}^e = \bar{r}\int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-t & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & 0 & t \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} P_s \dfrac{b_i}{l} \\ P_s \dfrac{c_i}{l} \end{Bmatrix} l\mathrm{d}t$$

$$= \frac{r_j + r_m}{2}\frac{l}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} P_s \dfrac{b_i}{l} \\ P_s \dfrac{c_i}{l} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{r_j + r_m}{4} P_s\{0 \quad 0 \quad b_i \quad c_i \quad b_i \quad c_i\}^{\mathrm{T}} \qquad (3-19)$$

式中

$$b_i = z_j - z_m$$

$$c_i = r_m - r_i$$

可见,当单元的边界 jm 作用有集度为 p 的垂直均布力时,分配到节点 i 上的载荷为零,分配到节点 j 和 m 上的载荷相同,其中 r 方向分量为$(r_j + r_m)pb_i/4$,z 方向分量为$(r_j + r_m)pc_i/4$。

如果作用在边界上的表面力不是均布载荷,则可将载荷分解成若干组,近似地将每组表面力视为均布载荷,分别进行计算,然后叠加,即可获得表面力的等效载荷。

3. 体积力的移置

工程中经常遇到的轴对称问题,涉及到的体积力一般有两种:一种是重力,另一种是绕 z 轴旋转产生的惯性离心力。

(1) 重力　设单元单位重量为 γ,则单位体积力为

$$\{P_v\}^e = \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\gamma \end{Bmatrix}$$

单元重力移置产生的节点载荷列阵为

$$\begin{aligned}
\{R\}_{P_v}^e &= \iint_e [N]^{\mathrm{T}}\{p_v\} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\
&= r_c \iint_e \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma \end{bmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}z \\
&= -r_c\gamma \iint_e [0 \quad N_i \quad 0 \quad N_j \quad 0 \quad N_m]^{\mathrm{T}} \mathrm{d}r\mathrm{d}z \\
&= -\frac{Ar_c\gamma}{3}\{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\}^{\mathrm{T}} \\
&= -\frac{A\gamma(r_i + r_j + r_m)}{9}\{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\}^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{3-20}$$

式中：r_c 为三角形形心到 z 轴的距离。

$$r_c = \frac{r_i + r_j + r_m}{3}$$

(2) 惯性离心力　设结构的角速度为 ω，材料密度为 ρ，则单位体积的离心力为 $\rho\omega^2 r$。为了方便计算，假定单元内的体积力密度为常数 $\rho\omega^2 r_c$，则单元的单位体积力为

$$\{P_v\} = \begin{Bmatrix} p_{rv} \\ p_{zv} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho\omega^2 r_c \\ 0 \end{Bmatrix}$$

单元惯性离心力移置产生的节点载荷列阵为

$$\begin{aligned}
\{R\}_{P_v}^e &= \iint_e [N]^{\mathrm{T}}\{p_v\} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\
&= r_c \iint_e \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \rho\omega^2 r_c \\ 0 \end{Bmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}z \\
&= r_c \iint_e [N_i \quad 0 \quad N_j \quad 0 \quad N_m \quad 0]^{\mathrm{T}} \rho\omega^2 r_c \mathrm{d}r\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{3-21}$$

由重心公式推导，得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2A}\iint z\mathrm{d}r\mathrm{d}z &= \frac{1}{6}(z_i + z_j + z_m) \\
\frac{1}{2A}\iint r\mathrm{d}r\mathrm{d}z &= \frac{1}{6}(r_i + r_j + r_m) \\
\frac{1}{2A}\iint (a_s + b_s r + c_s z)\mathrm{d}r\mathrm{d}z &= \frac{1}{3}A
\end{aligned} \tag{3-22}$$

将式(3-5)、式(3-22)代入式(3-21)，得

$$\begin{aligned}
\{R\}_{P_v}^e &= \frac{A}{3}\rho\omega^2 r_c^2\{1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{A\rho\omega^2(r_i + r_j + r_m)^2}{27}\{1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{3-23}$$

将式(3－12)、式(3－19)、式(3－20)、式(3－23)所得的结果叠加,便可得到整个单元的节点载荷列阵$\{R\}^e$,将每个节点载荷叠加,便可得到结构的载荷列阵$\{R\}$。

3.2.6 约束处理和求解线性方程组

对矩阵$[K]$、$\{R\}$按第2章介绍的方法进行约束处理之后,就可求解结构的刚度方程

$$[\bar{K}]\{q\} = \{\bar{R}\}$$

式中:$[\bar{K}]$为经过约束处理的总刚矩阵;$\{\bar{R}\}$为经过约束处理的载荷列阵。

求出节点位移分量$\{q\}$后,可利用式(3－4)、式(3－6)和式(3－7)求出单元各点的位移、应变和应力。

第4章　杆件系统有限元法

4.1　引　　言

当结构长度尺寸远远大于其他两个截面方向的尺寸时,称这类结构为杆件。工程中常见的轴、支柱、螺栓、加强肋以及各类型钢等都属于杆件。杆件的形状和尺寸可由杆的横截面和杆轴线两个主要几何元素来描述。其中横截面是指与杆长度方向垂直的截面,轴线是各横截面中心的连线,如图4-1所示。因此杆的横截面和轴线相互垂直。如果杆的轴线是直线,则称为直杆;如果轴线为曲线,则称为曲杆;如果杆的各个横截面尺寸和形状不变,则称为等截面杆,反之则称为变截面杆。

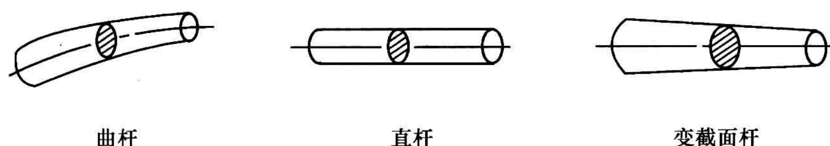


图4-1　杆件结构

杆件结构可分为桁杆和梁两类。和其他结构采用铰连接的杆称为桁杆,如图4-2(a)所示。桁杆的连接处可以自由转动,因此这类结构只承受拉压作用,内部应力为拉压应力。影响应力的几何因素主要是截面面积;和其他结构采用固定连接的杆称为梁,如图4-2(b)所示。梁的连接处不能自由转动,因此梁不仅能够承受拉压,而且能承受弯曲和扭转作用。这类杆件的内部应力状态比较复杂,应力大小和分布不仅与截面大小有关,而且与截面形状和方位有很大关系。在建立有限元模型时,这两类杆件结构可用相应的杆单元和梁单元离散。

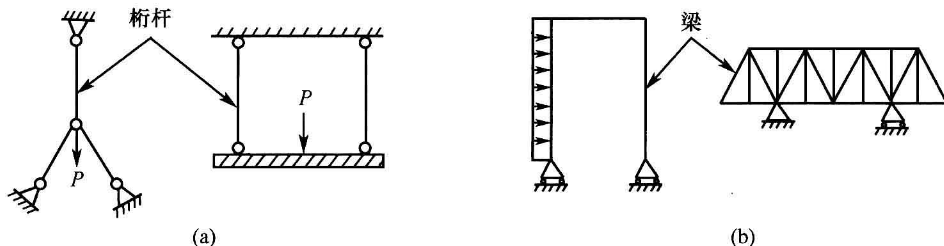


图4-2　桁杆和梁

由杆件组成的结构体系称为杆系,如起重机、桥梁等。由相互铰接的杆件组成的杆系称为桁架,由相互刚性固接组成的杆系称为刚架。若杆系和作用力均位于同一平面内,则称为平面桁架或平面刚架,否则便称为空间桁架或空间刚架。

由于杆件结构采用一维单元进行离散,所以杆系的网格划分容易用半自动方法实现。

当采用自动网格划分方法时，杆系的几何模型是由杆件轴线构成的线框模型。

4.2 平面桁架有限元法

如果结构中各杆件的轴线以及所有外力的作用线都位于同一平面内，并且杆件之间是铰接的，则此类杆件系统称为平面桁架。

4.2.1 结构离散

平面桁架通常用平面杆单元离散。桁架中各杆件（单元）有各自的局部坐标系，其方向即为该杆件的轴线方向。对于不同的杆件，其局部坐标系可能不相同。由于结构的刚度方程是在统一的坐标系（即总体坐标系）中建立并求解的，因此需要将每个单元在局部坐标系中的各个量转换到总体坐标系中。

4.2.2 单元分析

通常采用的杆单元有两个节点，单元形状为一条直线。每个节点具有两个移动自由度，即 $\bar{u}$、$\bar{v}$，如图 4-3 所示。以节点 i 为原点，以杆件的轴线为局部坐标系的 $\bar{x}$ 轴，以 $\bar{x}$ 轴的正向逆时针旋转 90°为 $\bar{y}$ 轴的正向。为区别起见，本章符号中的上划线表示是局部坐标系中的物理量，没有上划线的则是总体坐标系中的物理量。

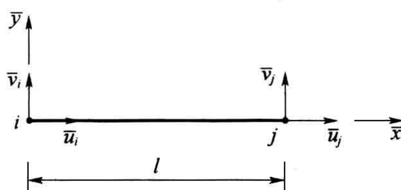


图 4-3 二节点四自由度杆单元

1. 单元位移函数

假定单元的位移函数为如下多项式

$$\begin{cases}\bar{u} = \alpha_1 + \alpha_2 \bar{x} \\ \bar{v} = \alpha_3 + \alpha_4 \bar{x}\end{cases}$$

式中：$\bar{u}$ 为沿 $\bar{x}$ 方向的位移；$\bar{v}$ 为沿 $\bar{y}$ 方向的位移；$\alpha_i(j=1,2,3,4)$ 为广义坐标，可由单元的 4 个节点位移确定。

将节点 i,j 的位移和坐标值代入上式，便可求出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_4$，经整理得到用节点位移表示的单元位移函数为

$$\begin{cases}\bar{u} = \bar{N}_1\bar{u}_i + \bar{N}_4\bar{u}_j \\ \bar{v} = \bar{N}_2\bar{v}_i + \bar{N}_3\bar{v}_j\end{cases} \tag{4-1}$$

即单元位移可写成如下矩阵形式

$$\{\bar{d}\} = \begin{Bmatrix}\bar{u} \\ \bar{v}\end{Bmatrix} = \bar{N}_i\bar{q}_i + \bar{N}_j\bar{q}_j = \bar{N}]\{\bar{q}\}^e \tag{4-2}$$

式中：$[\bar{N}]$称为形函数矩阵；$\{\bar{q}\}^e$ 为单元节点位移列阵。

形函数矩阵$[\bar{N}]$的表达式为

$$[\bar{N}] = [\bar{N}_i \quad \bar{N}_j]$$

式中：$\bar{N}_i$、$\bar{N}_j$ 是它的分块矩阵，分别为

$$\begin{cases} \bar{N}_i = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 \\ 0 & \bar{N}_2 \end{bmatrix} \\ \bar{N}_j = \begin{bmatrix} \bar{N}_3 & 0 \\ 0 & \bar{N}_4 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4-3}$$

其中每个矩阵元素称为形函数，表达式为

$$\bar{N}_1 = \bar{N}_3 = 1 - \frac{\bar{x}}{l} \qquad \bar{N}_2 = \bar{N}_4 = \frac{\bar{x}}{l} \tag{4-4}$$

单元的节点位移矢量$\{\bar{q}\}^e$ 为

$$\{\bar{q}\}^e = \begin{Bmatrix} \bar{q}_i \\ \bar{q}_j \end{Bmatrix}$$

式中

$$\{\bar{q}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{Bmatrix} \qquad \{\bar{q}_j\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix}$$

2. 单元应变矩阵和应力矩阵

对于长细比较大的杆件可以忽略其切应变变形，此时单元应变只包含轴向变形，即

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \{\bar{\varepsilon}_x\} = \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \end{Bmatrix} = [\bar{B}]\{\bar{q}\}^e = [\bar{B}_i \quad \bar{B}_j]\{\bar{q}\}^e \tag{4-5}$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{B}_i &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{B}_j &= \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4-6}$$

单元应力为

$$\{\bar{\sigma}\} = \{\bar{N}\} = [\bar{D}]\{\bar{\varepsilon}\} = EA[\bar{B}]\{\bar{q}\}^e \tag{4-7}$$

式中：$\bar{N}$ 是杆的轴向力；A 是杆的截面积；E 是材料弹性模量。

3. 局部坐标系中的单元刚度矩阵

对杆件系统同样可以由虚位移原理推导出单元的刚度方程

$$[\bar{k}]^e\{\bar{q}\}^e = \{\bar{R}\}^e \tag{4-8}$$

式中：$[\bar{k}]^e$ 为杆件在局部坐标系中的单元刚度矩阵，其表达式为

$$[\bar{k}]^e = \int [\bar{B}]^{\mathrm{T}}[\bar{D}][\bar{B}]\mathrm{d}\bar{x} = \int \begin{bmatrix} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} \\ \bar{B}_j^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} [\bar{D}][\bar{B}_i \quad \bar{B}_j]\mathrm{d}\bar{x} \tag{4-9}$$

将式(4－6)代入式(4－9)并积分,得单元刚度矩阵为

$$[\bar{k}]^e = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4-10}$$

4. 局部坐标系中的单元等效节点载荷列阵$\{\bar{R}\}$

等效节点载荷$\bar{R}_{ix}$和$\bar{R}_{iy}$分别对应于该节点的位移$\bar{u}_i$和$\bar{v}_i$。分布载荷P和集中力F产生的等效节点载荷分别为

$$\{\bar{R}\}_p^e = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{ip} \\ \bar{R}_{jp} \end{Bmatrix} \qquad \bar{R}_{lp} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{lx} \\ \bar{R}_{ly} \end{Bmatrix} = \int_l N_l^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \mathrm{d}x \qquad (l = i,j) \tag{4-11}$$

$$\{\bar{R}\}_F^e = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{iF} \\ \bar{R}_{jF} \end{Bmatrix} \qquad \bar{R}_{lF} = N_l^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \qquad (l = i,j) \tag{4-12}$$

把单元的各种载荷的等效节点载荷叠加即可得到单元的等效节点载荷列阵

$$\{\bar{R}\}^e = \begin{Bmatrix} \bar{R}_i^e \\ \bar{R}_j^e \end{Bmatrix} = \{\bar{R}_{ix} \quad \bar{R}_{iy} \quad \bar{R}_{jx} \quad \bar{R}_{jy}\}^{\mathrm{T}} = \{\bar{R}\}_P^e + \{\bar{R}\}_F^e \tag{4-13}$$

4.2.3 坐标变换

由于桁架各单元的空间位置不同,各个单元的局部坐标系一般也不相同。然而,为了建立整个结构的刚度矩阵,需要在一个统一的坐标系(即总体坐标系)中建立平衡方程。由于同一矢量的各分量在不同坐标系中是不相同的,所以要将局部坐标系中建立的单元刚度矩阵和等效节点载荷列阵进行坐标变换,得到它们在总体坐标系中的表达式,才能叠加起来形成结构的整体刚度矩阵和等效节点载荷列阵。

1. 单元节点位移和节点力列阵的坐标变换

设任意平面矢量V(如平面杆单元的节点位移或节点力列矢量)在局部坐标系中的分量为$\bar{V}_x$和$\bar{V}_y$,在总体坐标系Oxy中的分量为V_x和V_y,Ox轴沿逆时针方向旋转α角与$O\bar{x}$同向,如图4－4所示。

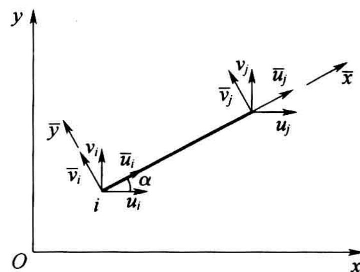


图4－4　总体坐标系中的杆单元

有

$$\bar{V}_x = V_x\cos\alpha + V_y\sin\alpha$$
$$\bar{V}_y = -V_x\sin\alpha + V_y\cos\alpha$$

写成矩阵形式为

$$\{\bar{V}\} = \begin{Bmatrix} \bar{V}_x \\ \bar{V}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix}$$

令

$$[T_a] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

式中：$[T_\alpha]$为平面杆单元的节点力和节点位移列阵的坐标变换矩阵。

由于每个平面杆单元有两个节点，将两个节点的坐标变换矩阵合并，即可得到平面杆单元列矩阵的坐标变换矩阵

$$[T]^e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \multicolumn{2}{c}{0} & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{4-14}$$

因此，有

$$\{\bar{V}\} = [T]^e\{V\}$$

2. 单元刚度矩阵的坐标转换

设总体坐标系中第 e 个单元的节点力和节点位移列阵分别为$\{R\}^e$、$\{q\}^e$，局部坐标系中第 e 个单元的节点力和节点位移列阵分别为$\{\bar{R}\}^e$、$\{\bar{q}\}^e$，单元刚度矩阵为$[\bar{k}]^e$。

由坐标转换可知

$$\begin{cases} \{\bar{R}\}^e = [T]^e\{R\}^e \\ \{\bar{q}\}^e = [T]^e\{q\}^e \end{cases} \tag{4-15}$$

将式(4－15)代入式(4－8)，得

$$[T]^e\{R\}^e = [\bar{k}]^e[T]^e\{q\}^e$$

$$[R]^e = ([T]^e)^{-1}[\bar{k}]^e[T]^e\{q\}^e$$

令

$$[k]^e = ([T]^e)^{-1}[\bar{k}]^e[T]^e = [T]^{eT}[\bar{k}]^e[T]^e \tag{4-16}$$

则

$$\{R\}^e = [k]^e\{q\}^e \tag{4-17}$$

式(4－17)为单元刚度矩阵的坐标转换式，$[k]^e$ 即为总体坐标系中第 e 个单元的刚度矩阵，它是一个对称矩阵。

4.2.4 总刚矩阵集成

按第 2 章介绍的方法，将各单元在总体坐标系中的刚度矩阵进行叠加，便可得到结构的刚矩阵$[K]$。

4.2.5 节点载荷列阵

按前面介绍的方法，将各类载荷移置为单元等效节点载荷后，通过叠加可形成结构的节点载荷列阵$\{R\}$。

4.2.6 约束处理和求解线性方程组

形成结构总刚矩阵$[K]$和载荷列阵$\{R\}$后，得到线性方程组

$$\{R\} = [K]\{q\} \tag{4-18}$$

经约束处理消除$[K]$的奇异性后，便可对上式求解，求出各单元的节点位移$\{q\}^e$。进

而由式(4－14)求出局部坐标系中的单元节点位移为

$$\{\bar{q}\}^e = [T]^e\{q\}^e$$

由式(4－2)、式(4－5)、式(4－7)可分别求出单元任一点的位移及单元应变和应力。

4.3 平面刚架有限元法

如果结构中各杆件的轴线以及所有外力的作用线都位于同一平面内,并且杆件之间是刚性连接,则此类杆件系统称为平面刚架。

4.3.1 结构离散

平面刚架通常用平面梁单元离散。刚架中各杆件(单元)有各自的局部坐标系,其方向即为该杆件的轴线方向。对于不同的杆件,其局部坐标系可能不相同。由于结构的刚度方程是在统一的坐标系(即总体坐标系)中建立并求解的,因此需要将每个单元在局部坐标系中的各个量转换到总体坐标系中。

4.3.2 单元分析

通常采用的梁单元有 2 个节点,单元形状为一条直线。每个节点具有 3 个自由度,包括 2 个移动自由度和 1 个转动自由度,即 $\bar{u}$、$\bar{v}$、$\bar{\theta}$,如图 4－5 所示。以节点 i 为原点,以杆件的轴线为局部坐标系的 $\bar{x}$ 轴,以 $\bar{x}$ 轴的正向逆时针旋转 90°为 $\bar{y}$ 轴的正向。

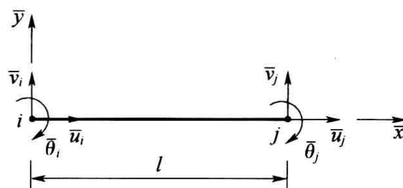


图 4－5　2 节点 6 自由度梁单元

1. 单元位移函数

假定单元的位移函数为如下多项式

$$\begin{cases}\bar{u} = \alpha_1 + \alpha_2\bar{x} \\ \bar{v} = \alpha_3 + \alpha_4\bar{x} + \alpha_5\bar{x}^2 + \alpha_6\bar{x}^3\end{cases} \tag{4-19}$$

式中:$\bar{u}$ 为沿 $\bar{x}$ 方向的位移;$\bar{v}$ 为沿 $\bar{y}$ 方向的位移;α_i 为广义坐标,共有 6 个,可由单元的 6 个节点位移确定。

将节点 i,j 的位移和坐标值代入式(4－19),便可求出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6$,经整理得到用节点位移表示的单元位移函数为

$$\begin{cases}\bar{u} = \bar{N}_1\bar{u}_i + \bar{N}_4\bar{u}_j \\ \bar{v} = \bar{N}_2\bar{v}_i + \bar{N}_3\bar{\theta}_i + \bar{N}_5\bar{v}_j + \bar{N}_6\bar{\theta}_j\end{cases} \tag{4-20}$$

即单元位移可写成如下矩阵形式

$$\{\bar{d}\} = \begin{Bmatrix}\bar{u} \\ \bar{v}\end{Bmatrix} = \bar{N}_i\bar{q}_i + \bar{N}_j\bar{q}_j = [\bar{N}]\{\bar{q}\}^e \tag{4-21}$$

式中:$[\bar{N}]$ 称为形函数矩阵;$\{\bar{q}\}^e$ 为单元节点位移列阵。

形函数矩阵$[\bar{N}]$的表达式为

$$[\bar{N}] = [\bar{N}_i \quad \bar{N}_j]$$

式中：$\bar{N}_i$、$\bar{N}_j$ 是它的分块矩阵，分别为

$$\begin{cases} \bar{N}_i = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_2 & \bar{N}_3 \end{bmatrix} \\ \bar{N}_j = \begin{bmatrix} \bar{N}_4 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_5 & \bar{N}_6 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4-22}$$

其中每个矩阵元素称为形函数，表达式为

$$\begin{cases} \bar{N}_1 = 1 - \dfrac{\bar{x}}{l} \\ \bar{N}_2 = 1 - \dfrac{3}{l^2}\bar{x}^2 + \dfrac{2}{l^3}\bar{x}^3 \\ \bar{N}_3 = -\bar{x} + \dfrac{2}{l}\bar{x}^2 - \dfrac{1}{l^2}\bar{x}^3 \\ \bar{N}_4 = \dfrac{\bar{x}}{l} \\ \bar{N}_5 = \dfrac{3}{l^2}\bar{x}^2 - \dfrac{2}{l^3}\bar{x}^3 \\ \bar{N}_6 = \dfrac{1}{l}\bar{x}^2 - \dfrac{1}{l^2}\bar{x}^3 \end{cases} \tag{4-23}$$

单元的节点位移矢量$\{\bar{q}\}^e$为

$$\{\bar{q}\}^e = \begin{Bmatrix} \bar{q}_i \\ \bar{q}_j \end{Bmatrix}$$

式中

$$\{\bar{q}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \end{Bmatrix} \qquad \{\bar{q}_j\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix}$$

2. 单元应变矩阵和应力矩阵

对于长细比较大的杆件可以忽略其切应变变形，此时单元应变包含轴向变形和弯曲变形两部分，即

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\kappa}_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} \end{Bmatrix} = [\bar{B}]\{\bar{q}\}^e = [\bar{B}_i \quad \bar{B}_j]\{\bar{q}\}^e \tag{4-24}$$

式中：$\bar{\kappa}_x = \dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}$，为弯曲变形，它是垂直于杆件轴线方向的变形。

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & c_i \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_j = \begin{bmatrix} a_j & 0 & 0 \\ 0 & b_j & c_j \end{bmatrix} \tag{4-25}$$

$$a_i = -a_j = -\frac{1}{l} \qquad b_i = -b_j = \frac{12}{l^3}\bar{x} - \frac{6}{l^2}$$

$$c_i = \frac{4}{l} - \frac{6}{l^2}\bar{x} \qquad c_j = \frac{2}{l} - \frac{6}{l^2}\bar{x} \tag{4-26}$$

单元应力为

$$\{\bar{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = [\bar{D}]\{\bar{\varepsilon}\} = [\bar{D}][\bar{B}]\{\bar{q}\}^e$$

$$[\bar{D}] = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \tag{4-27}$$

式中:$\bar{N}$、$\bar{M}$ 是杆的轴向力和弯矩;A、I 是杆的截面积和截面惯性矩;E 是材料弹性模量。

3. 局部坐标系中的单元刚度矩阵

对杆件系统同样可以由虚位移原理推导出单元的刚度方程

$$[\bar{k}]^e\{\bar{q}\}^e = \{\bar{R}\}^e \tag{4-28}$$

式中:$[\bar{k}]^e$ 为杆件在局部坐标系中的单元刚度矩阵,其表达式为

$$[\bar{k}]^e = \int_l [\bar{B}]^{\mathrm{T}}[\bar{D}][\bar{B}]\mathrm{d}\bar{x} = \int_l \begin{bmatrix} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} \\ \bar{B}_j^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} [\bar{D}][\bar{B}_i \quad \bar{B}_j]\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \bar{k}_{ii} & \bar{k}_{ij} \\ \bar{k}_{ji} & \bar{k}_{jj} \end{bmatrix}$$

其中矩阵元素为

$$\bar{k}_{st} = \int_l [\bar{B}_s^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}[\bar{D}][\bar{B}_t]\mathrm{d}\bar{x} = \int_l \begin{bmatrix} a_s & 0 \\ 0 & b_s \\ 0 & c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_t & 0 & 0 \\ 0 & b_t & c_t \end{bmatrix} \mathrm{d}\bar{x}$$

$$= \int_l \begin{bmatrix} EAa_sa_t & 0 & 0 \\ 0 & EIb_sb_t & EIb_sc_t \\ 0 & EIc_sb_t & EIc_sc_t \end{bmatrix} \mathrm{d}\bar{x} \tag{4-29}$$

将式(4-23)代入式(4-29)并积分,得到单元刚度矩阵为

$$[\bar{k}]^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & \text{对} & & & \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & & \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & \text{称} & \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{4-30}$$

4. 局部坐标系中的单元等效节点载荷列阵$\{\bar{R}\}$

等效节点载荷$\bar{R}_{ix}$、$\bar{R}_{iy}$和$\bar{R}_{i\theta}$分别对应于该节点的节点位移$\bar{u}_i$、$\bar{v}_i$和$\bar{\theta}_i$。分布载荷P、集中力F和集中力偶矩M产生的等效节点载荷分别为

$$\{\bar{R}\}_p^e = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{ip} \\ \bar{R}_{jp} \end{Bmatrix} \qquad \bar{R}_{lp} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{lx} \\ \bar{R}_{ly} \\ \bar{R}_{l\theta} \end{Bmatrix} = \int_l N_l^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \mathrm{d}x \qquad (l = i,j) \tag{4-31}$$

$$\{\bar{R}\}_F^e = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{iF} \\ \bar{R}_{jF} \end{Bmatrix} \qquad \bar{R}_{lF} = N_l^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \qquad (l = i,j) \tag{4-32}$$

$$\{\bar{R}\}_M^e = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{im} \\ \bar{R}_{jm} \end{Bmatrix} \qquad \bar{R}_{lm} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \; N_l^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} 0 \\ M \end{Bmatrix} \qquad (l = i,j) \tag{4-33}$$

这里不考虑单元的扭转，所以力偶矩$M_x = 0$。

把单元的各种载荷的等效节点载荷叠加即可得到单元的等效节点载荷列阵

$$\{\bar{R}\}^e = \begin{Bmatrix} \bar{R}_i^e \\ \bar{R}_j^e \end{Bmatrix} = \{\bar{R}_{ix} \quad \bar{R}_{iy} \quad \bar{R}_{i\theta} \quad \bar{R}_{jx} \quad \bar{R}_{jy} \quad \bar{R}_{j\theta}\}^{\mathrm{T}}$$

$$= \{\bar{R}\}_P^e + \{\bar{R}\}_F^e + \{\bar{R}\}_M^e \tag{4-34}$$

下面给出几种常见载荷的等效节点载荷计算公式。

(1) 均布载荷　梁单元上作用的均布载荷如图4-6所示，其载荷分量为$p_x = 0$，$p_y = -p$，把式(4-22)和式(4-23)代入式(4-31)，积分，得

$$\{\bar{R}\}_p^e = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{ip} \\ \bar{R}_{jp} \end{Bmatrix} = \{\bar{R}_{ix} \quad \bar{R}_{iy} \quad \bar{R}_{i\theta} \quad \bar{R}_{jx} \quad \bar{R}_{jy} \quad \bar{R}_{j\theta}\}^{\mathrm{T}}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{pa}{2l^3}(2l^3 - 2la^2 + a^2) \\ \dfrac{pa^2}{12l^3}(6l^2 - 8la + 3a^2) \\ 0 \\ -\dfrac{pa^3}{2l^3}(2l - a) \\ -\dfrac{pa^3}{12l^3}(4l - 3a) \end{Bmatrix} \tag{4-35}$$

当均布载荷满跨作用于梁上时，等效节点载荷列阵为

$$\{\bar{R}\}_p^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}pl \\ \frac{1}{12}pl^3 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}pl \\ -\frac{1}{12}pl^3 \end{Bmatrix} \tag{4-36}$$

(2) 集中力　梁单元上作用的集中力如图 4－7 所示。将式(4－22)和式(4－23)代入式(4－32),计算得到梁单元作用有集中力时的等效载荷为

$$\{\bar{R}\}_F^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{Fb^2}{l^3}(l+2a) \\ \frac{Fab^2}{l^2} \\ 0 \\ -\frac{Fa^2}{l^3}(l+2b) \\ -\frac{Fa^2b}{l^2} \end{Bmatrix} \tag{4-37}$$

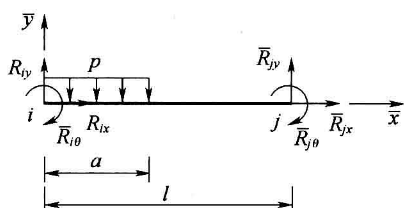


图 4－6　梁单元上作用均布载荷

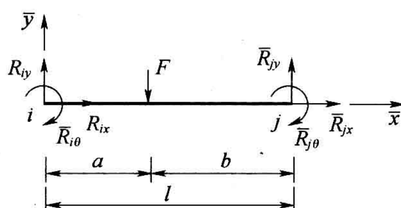


图 4－7　梁单元上作用集中力

(3) 集中力偶矩　梁单元作用有集中力偶矩的情况如图 4－8 所示。将式(4－22)和式(4－23)代入式(4－33),计算得到梁单元作用有集中力时的等效载荷为

$$\{\bar{R}\}_M^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{6ab}{l^3}M \\ -\frac{b(3a-l)}{l^2}M \\ 0 \\ -\frac{6ab}{l^3}M \\ -\frac{a(3b-l)}{l^2}M \end{Bmatrix} \tag{4-38}$$

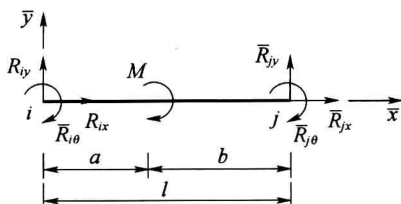


图 4－8　梁单元上作用集中力偶矩

4.3.3　坐标变换

在刚架结构中，各杆件除了承受 x 和 y 方向的载荷外，还受到 z 方向力偶的作用，图 4－9 为总体坐标系中的梁单元示意图。通过与 4.2 类似的推导过程，可得平面梁单元的节点力和节点位移列阵的坐标变换矩阵

$$[T]^e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ & 0 & & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-39}$$

因此有

$$\{\bar{V}\} = [T]^e\{V\}$$

式中：V 为总体坐标系中任意平面矢量（如梁单元的节点位移或节点力列矢量）；$\bar{V}$ 为矢量 V 在局部坐标系中的表达式。

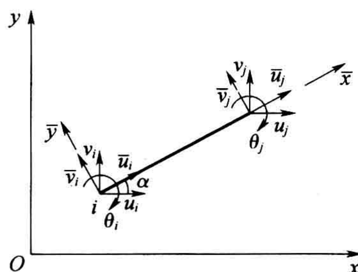


图 4－9　总体坐标系中的梁单元

设总体坐标系中第 e 个单元的节点力和节点位移列阵分别为 $\{R\}^e$、$\{q\}^e$，局部坐标系中第 e 个单元的节点力和节点位移列阵分别为 $\{\bar{R}\}^e$、$\{\bar{q}\}^e$，单元刚度矩阵为 $[\bar{k}]^e$。

由坐标转换可知

$$\begin{cases} \{\bar{R}\}^e = [T]^e\{R\}^e \\ \{\bar{q}\}^e = [T]^e\{q\}^e \end{cases} \tag{4-40}$$

将式(4－40)代入式(4－8)，得

$$[T]^e\{R\}^e = [\bar{k}]^e[T]^e\{q\}^e$$

$$[R]^e = ([T]^e)^{-1}[\bar{k}]^e[T]^e\{q\}^e$$

令

$$[k]^e = ([T]^e)^{-1}[\bar{k}]^e[T]^e = [T]^{eT}[\bar{k}]^e[T]^e \tag{4-41}$$

则

$$\{R\}^e = [k]^e\{q\}^e \tag{4-42}$$

式(4-41)即为单元刚度矩阵的坐标转换式,$[k]^e$ 即为总体坐标系中第 e 个单元的刚度矩阵,它是一个对称矩阵。

4.3.4 总刚矩阵集成

按第 2 章介绍的方法,将各单元在总体坐标系中的刚度矩阵进行叠加,便可得到结构的刚矩阵$[K]$。

4.3.5 节点载荷列阵

按前面介绍的方法,将各类载荷移置为单元等效节点载荷后,通过叠加可形成结构的节点载荷列阵$\{R\}$。

4.3.6 约束处理和求解线性方程组

形成结构总刚矩阵$[K]$和载荷列阵$\{R\}$后,得到线性方程组

$$\{R\} = [K]\{q\} \tag{4-43}$$

经约束处理消除$[K]$的奇异性后,便可对上式求解,求出各单元的节点位移$\{q\}^e$。进而由式(4-39)求出局部坐标系中的单元节点位移为

$$\{\bar{q}\}^e = [T]^e\{q\}^e$$

由式(4-21)、式(4-24)、式(4-27)可分别求出单元任一点的位移以及单元应变和应力。

第 5 章　空间问题有限元法

5.1　引　言

当分析结构的形状、尺寸和边界条件不具备某种特殊性时，这种结构便属于空间问题。这时结构内的任一点 i 都具有 3 个位移分量，即

$$\{q_i\} = \{u_i \quad v_i \quad w_i\}^{\mathrm{T}} \tag{5-1}$$

和 6 个应变分量

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \nu_{xy} \quad \nu_{yz} \quad \nu_{zx}\}^{\mathrm{T}} \\ &= \left\{\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right\}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{5-2}$$

以及 6 个应力分量

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^{\mathrm{T}} = [D]\{\varepsilon\} \tag{5-3}$$

式中：$[D]$ 的表达式见式(2-7)。

以上 15 个分量都是空间坐标$(x,\ y,\ z)$的函数。

空间问题的规模要比平面问题和轴对称问题大得多，且网格划分较困难，自动分网需要占用较长的时间，所以分析这类结构时要充分利用求解问题的特点（如对称性、相似性和重复性等），尽量减小有限元模型规模。有些结构可以先近似为轴对称问题或平面问题进行粗算，然后再按空间问题求解。

工程中的绝大部分结构都属于空间问题，这类结构的几何模型为三维实体模型，网格划分时可采用四面体、五面体或六面体形式的空间实体单元。

5.2　空间问题有限元法

5.2.1　结构离散

在空间结构的离散中，常用的单元是 4 节点四面体单元，单元形状如图 5-1 所示。本节将讨论这种单元的有限元法。

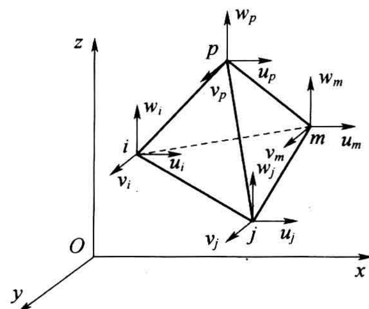


图 5-1　常应变 4 节点四面体单元

5.2.2　单元分析

1. 位移函数

图 5-1 所示的四面体单元，其节点为四面体的 4 个顶点，节点坐标分别为 $i(x_i,\ y_i,\ z_i)$、$j(x_j,\ y_j,$

z_j)、$m(x_m, y_m, z_m)$、$p(x_p, y_p, z_p)$。每个节点有 3 个位移分量，即 3 个自由度，一个单元共有 12 个自由度。

单元的位移列阵为

$$\{q\}^e = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad u_m \quad v_m \quad w_m \quad u_p \quad v_p \quad w_p\}^{\mathrm{T}} \tag{5-4}$$

假设单元的位移函数为线性函数

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ w = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{cases} \tag{5-5}$$

把 4 个节点的坐标值和位移分量分别代入式(5－5)，联立求解可以求得待定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{12}$，然后将待定系数代入式(5－5)，整理得

$$\begin{cases} u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_p u_p \\ v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m + N_p v_p \\ w = N_i w_i + N_j w_j + N_m w_m + N_p w_p \end{cases} \tag{5-6}$$

因此，单元位移可写成

$$\{d\}^e = \{u \quad v \quad w\}^{\mathrm{T}} = [N]\{q\}^e \tag{5-7}$$

式中

$$[N] = [N_i I \quad N_j I \quad N_m I \quad N_p I]$$

称为形函数矩阵。其中 I 是三阶单位矩阵；N_i、N_j、N_m、N_p 称为形函数，表达式分别为

$$\begin{cases} N_i = \dfrac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \\ N_j = -\dfrac{a_j + b_j x + c_j y + d_j z}{6V} \\ N_m = \dfrac{a_m + b_m x + c_m y + d_m z}{6V} \\ N_p = -\dfrac{a_p + b_p x + c_p y + d_p z}{6V} \end{cases} \tag{5-8}$$

式(5－8)中的各个系数分别为

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \qquad b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}$$

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \\ 1 & x_p & z_p \end{vmatrix} \qquad d_i = -\begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_p & y_p \end{vmatrix} \qquad (i,j,m,p)$$

(5－9)

V 是四面体 $ijmp$ 的体积，即

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}$$

为了保证 V 的非负性，单元的 4 个节点必须按照图 5－1 所示的顺序进行编号，即在右手坐标系中，以右手螺旋按 $i-j-m$ 的转向转动时是向 p 的方向前进为编号顺序。

由于四面体单元的位移函数是线性函数，可以证明，单元体任意三角形界面变形后仍保持为平面，且该平面由面上的 3 个节点位移决定。因此在变形过程中，两个相邻单元在交界面上的位移是一致的，即两个相邻单元的位移在交界面上连续，所以常应变四面体是协调元。

2. 单元应变矩阵

知道单元内各点的位移后，就可确定单元内任一点的应变，把式（5－6）代入几何方程式（2－2），得

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \nu_{xy} \quad \nu_{yz} \quad \nu_{zx}\}^{\mathrm{T}} \\ &= \left\{\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right\}^{\mathrm{T}} \\ &= [B]\{q\}^e = [B_i \quad -B_j \quad B_m \quad -B_p]\{q\}^e \end{aligned} \qquad (5-10)$$

式中

$$[B_l] = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} b_l & 0 & 0 \\ 0 & c_l & 0 \\ 0 & 0 & d_l \\ c_l & b_l & 0 \\ 0 & d_l & c_l \\ d_l & 0 & b_l \end{bmatrix} \qquad (l = i, j, m, p) \qquad (5-11)$$

式（5－11）中各矩阵元素的表达式见式（5－9）。显然应变矩阵 $[B]$ 是常量矩阵，因此这类单元是常应变单元。

3. 单元应力矩阵

由物理方程式（2－6），得

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{q\}^e = [S]\{q\}^e \\ &= [S_i \quad S_j \quad S_m \quad S_p]\{q\}^e \end{aligned} \qquad (5-12)$$

式中：$[D]$ 的表达式见式（2－7）；$[S]$ 称为应力矩阵，也是常数矩阵。

由式（2－7）和式（5－11），得

$$[S_l]=[D][B_l]=\frac{6A_3}{V}\begin{bmatrix} b_l & A_1c_l & A_1d_l \\ A_1b_l & c_l & A_1d_l \\ A_1b_l & A_1c_l & d_l \\ A_2c_l & A_2b_l & 0 \\ 0 & A_2d_l & A_2c_l \\ A_2d_l & 0 & A_2b_l \end{bmatrix} \quad (l=i,j,m,p) \tag{5-13}$$

式中

$$A_1=\frac{\mu}{1-\mu} \qquad A_2=\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \qquad A_3=\frac{E(1-\mu)}{36(1+\mu)(1-2\mu)}$$

4. 单元刚度矩阵

由虚位移原理可以得到单元刚度矩阵的表达式为

$$[k]^e=\iiint_V [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=[B]^{\mathrm{T}}[D][B]V \tag{5-14}$$

写成分块矩阵形式为

$$[k]^e=\begin{bmatrix} k_{ii} & -k_{ij} & k_{im} & -k_{ip} \\ -k_{ji} & k_{jj} & -k_{jm} & k_{jp} \\ k_{mi} & -k_{mj} & k_{mm} & -k_{mp} \\ -k_{pi} & k_{pj} & -k_{pm} & k_{pp} \end{bmatrix} \tag{5-15}$$

其中任一分块矩阵$[k_{rs}]_{3\times3}$的计算公式为

$$[k_{rs}]=[B_r]^{\mathrm{T}}[D][B_s]V=\frac{A_3}{V}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix} \quad (r,s=i,j,m,p) \tag{5-16}$$

式中

$$k_1=b_rb_s+A_2(c_rc_s+d_rd_s)$$

$$k_2=A_1b_rc_s+A_2b_sc_r$$

$$k_3=A_1b_rd_s+A_2d_rb_s$$

$$k_4=A_1c_rb_s+A_2b_rc_s$$

$$k_5=c_rc_s+A_2(b_rb_s+d_rd_s)$$

$$k_6=A_1c_rd_s+A_2d_rc_s$$

$$k_7=A_1d_rc_s+A_2b_rd_s$$

$$k_8=A_1d_rc_s+A_2c_rd_s$$

$$k_9=d_rd_s+A_2(b_rb_s+c_rc_s)$$

式中：b_l、c_l、d_l（$l=r,s$）的表达式见式（5－9），A_l（$l=1,2,3$）的表达式见式（5－13），可见单元刚阵是由节点坐标和材料弹性常数确定的，它是一个常数矩阵。

5.2.3 总刚矩阵集成

求出每一个单元的刚度矩阵后，即可按照第 2 章介绍的总刚矩阵的集成方法得到结构的总刚矩阵$[K]$，即

$$[K] = \sum_{e}^{n_e} [k]^e \tag{5-17}$$

5.2.4 载荷移置

作用在结构的各类载荷同样需要移置为等效的节点载荷，移置方法与平面问题相同，这里仅给出移置的结果，并不做详细的推导。

1. 集中力的移置

设作用在单元上的集中力为

$$\{P_c\} = \{p_{cx} \quad p_{cy} \quad p_{cz}\}^{\mathrm{T}}$$

由$\{P_c\}$移置后产生的等效节点载荷为

$$\{R\}_{P_c}^e = \{R_i^e \quad R_j^e \quad R_m^e \quad R_p^e\}^{\mathrm{T}}$$

根据第 2 章介绍的方法，上式各矩阵元素的表达式为

$$\{R_l^e\} = [N_l]_c \{P_c\} \quad (l = i, j, m, p) \tag{5-18}$$

式中：$[N_l]_c$ 是形函数在载荷作用点处的值。

2. 表面力的移置

设作用在单元上的表面力为

$$\{P_s\} = \{p_{sx} \quad p_{sy} \quad p_{sz}\}^{\mathrm{T}}$$

由$\{P_s\}$移置后产生的等效节点载荷为

$$\{R\}_{P_s}^e = \{R_i^e \quad R_j^e \quad R_m^e \quad R_p^e\}^{\mathrm{T}}$$

则

$$\{R_l^e\} = \iint_S [N_l]\{P_s\} \mathrm{d}A \quad (l = i, j, m, p) \tag{5-19}$$

式中：$[N_l]$是形函数，其表达式见式(5-8)。

3. 体积力的移置

设作用在单元上的体力为

$$\{P_v\} = \{p_{vx} \quad p_{vy} \quad p_{vz}\}^{\mathrm{T}}$$

由$\{P_v\}$移置后产生的等效节点载荷为

$$\{R\}_{P_v}^e = \{R_i^e \quad R_j^e \quad R_m^e \quad R_p^e\}^{\mathrm{T}}$$

则

$$\{R_l^e\} = \iiint_V [N_l]\{P_v\} \mathrm{d}V \ (l = i, j, m, p) \tag{5-20}$$

因此,由各类载荷移置产生的单元总的等效节点载荷列阵为

$$\{R\}^e = \{R\}_{P_c}^e + \{R\}_{P_s}^e + \{R\}_{P_v}^e \tag{5-21}$$

由此可求出整个结构的节点载荷列阵,即

$$\{R\} = \sum_{e}^{n_e} \{R\}^e (n_e \text{ 为单元数量}) \tag{5-22}$$

5.2.5 约束处理和求解线性方程组

经约束处理消除[K]的奇异性后,即可求解结构刚度方程,求出每个节点的位移,进而求出单元内任一点的位移及各单元的应变和应力。

第6章 薄板弯曲问题有限元法

6.1 引 言

薄板是指厚度远小于其长度和宽度的板，如图6－1所示。平分板厚度的面称为板的中面，平板的中面为平面。设δ表示板的厚度，b表示板中面的最小边长（圆板为直径）。在通常的计算精度要求下，当$\delta/b<1/5$时则可认为板为薄板，否则便认为是厚板。

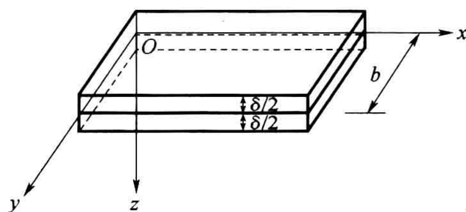


图6－1 薄板示意图

在线弹性分析范畴内，薄板弯曲问题应满足以下几个条件。

1．几何条件

几何条件要求结构属于薄板。正如薄板的定义，在通常的计算精度要求下；当$\delta/b<1/5$时则可认为板为薄板，否则便认为是厚板，厚板的变形和应力较复杂，应按空间问题进行处理。

2．载荷条件

载荷条件要求结构仅承受垂直于中面的横向载荷作用。一般情况下，薄板既可承受横向载荷作用，也可承受平行于板中面的膜载荷作用。在两种载荷同时作用下，板内将产生薄膜内力和弯曲内力，前者是作用在中面内的拉、压力和面内剪切力，它使板产生面内变形。后者是指弯矩、扭矩和横向剪力，它使板发生弯扭变形。在小挠度情况下可认为两种变形互不影响，因此膜载荷的作用可按平面应力问题处理，而横向载荷的作用则按薄板弯曲问题分析，两种问题的叠加便是一般载荷综合作用的结果。

3．小挠度条件

在横向载荷作用下，薄板中面上各个点沿垂直中面方向的横向变形称为挠度，记为ω。大挠度与小挠度之间没有明显的界限，一般认为$\omega/\delta\leqslant1/5$时为小挠度板，$1<\omega/\delta<5$时为大挠度板，$\omega/\delta\geqslant5$时为特大挠度板。在大挠度情况下，薄板面内变形和弯扭变形之间要相互影响，即横向载荷也可能产生膜内力和面内变形，而膜载荷也可能产生弯曲内力和弯曲变形。这时描述薄板变形的数学方程是非线性的，应采用更复杂的理论分析方法。

对于满足上述条件的薄板弯曲问题，研究时通常以未变形的板的中面为Oxy平面，厚度方向为z轴方向，采用右手坐标系，如图6－1所示。薄板弯曲问题属于空间问题，为简化求解过程，根据薄板弯曲的内力和弯曲变形特征，提出了3个计算假定，分别描述如下。

1．法线假设

垂直板中面的法线在板变形后仍垂直于弯曲的挠曲面，且法线线段没有伸缩，板的厚度无变化。这样，垂直于中面的正应变便可忽略，即

$$\varepsilon_z = 0 \tag{6-1}$$

根据几何方程,得

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

因此,挠度 ω 只是 x、y 的函数,可表示为

$$\omega = \omega(x,y) \tag{6-2}$$

即该假设认为在中面的任意一根法线上,薄板全厚度内所有各点都具有相同的位移 ω。

2. 正应力假设

在平行于中面的截面上,应力分量 σ_z、τ_{zx}及 τ_{yz}远小于其他 3 个应力分量,由其引起的变形可忽略不计,即 $\nu_{zx}=0$,$\nu_{yz}=0$。

同时由于忽略了 σ_z 引起的变形,因此薄板弯曲问题和平面薄板弯曲问题的物理方程相同,均为

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x + \mu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y + \mu\sigma_x)$$

$$\nu_{xy} = \frac{(1+2\mu)}{E}\tau_{xy}$$

3. 小挠度假设

板中面只发生弯曲变形而没有面内变形,即中面内各点没有平行于中面的位移,表示为

$$\begin{cases} u\,|_{z=0} = 0 \\ v\,|_{z=0} = 0 \end{cases} \tag{6-3}$$

由几何方程,得

$$\varepsilon_x\big|_{z=0} = 0$$

$$\varepsilon_y\big|_{z=0} = 0$$

$$\nu_{xy}\big|_{z=0} = 0$$

在这些假设前提下,薄板的位移、应变和应力都可用挠度 ω 表示。由于 ω 仅为 x、y 的函数,因此实际薄板的复杂三维问题就可简化为二维问题来进行分析和计算。其中位移 d 与挠度 ω 的关系为

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = -z\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \omega}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{6-4}$$

应变 ε 与 ω 的关系为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{6-5}$$

应力 σ 与 ω 的关系为

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]_b\{\varepsilon\} = -z[D]_b \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{6-6}$$

式中

$$[D]_b = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{6-7}$$

称为薄板弯曲问题的弹性矩阵,该矩阵和平面应力问题的弹性矩阵完全相同。

工程中的发动机缸体、齿轮箱箱体、地板、桥面等都属于薄板结构,这类结构的几何模型是由薄板中面构成的平面模型,可用相应的弯曲板单元划分网格。在弯曲板单元和平面应力单元的基础上发展了 6 自由度的板单元,这种单元可用于离散受一般载荷作用的薄板。

6.2 弹性薄板弯曲的能量泛函和微分方程式

6.2.1 位移矢量

根据克希霍夫假设中的小挠度假设,薄板中面任意一点 l 没有平行于中面(即 Oxy 平面)的位移,即 $u|_{z=0}=0, v|_{z=0}=0$。同时在垂直于板面的载荷作用下也没有绕轴的转动,即 $\theta_z=0$,所以在进行有限元分析时,任一点 l 只有 3 个位移分量:挠度 ω_l、法线绕 x 轴的转动 θ_{lx}和绕 y 轴的转动 θ_{ly},即

$$\{q_l\} = \begin{Bmatrix} \omega_l \\ \theta_{lx} \\ \theta_{ly} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_l \\ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_l \\ -\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_l \end{Bmatrix} \tag{6-8}$$

对薄板进行网格划分时,通常采用矩形板单元或三角形板单元。矩形板单元的节点位移矢量为

$$\{q\}^e = \{q_i \quad q_j \quad q_m \quad q_p\}^{\mathrm{T}} \tag{6-9}$$

三角形板单元的节点位移矢量为

$$\{q\}^e = \{q_i \quad q_j \quad q_m\}^{\mathrm{T}} \tag{6-10}$$

6.2.2 广义应变分量和曲率

根据法线假设,可知 $\varepsilon_z = \nu_{yz} = \nu_{zx} = 0$,所以此时薄板的应变只有 ε_x、ε_y、ν_{xy}3 个分量,表达式分别为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -z\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial u}{\partial y} = -z\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ \nu_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \approx -2z\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{6-11}$$

令

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{6-12}$$

式中:$\{\chi\}$ 称为薄板弯曲的广义应变;χ_x、χ_y 和 χ_{xy} 分别称为板中面在 x、y 方向的变形曲率和在 xy 面上的扭率,并且有

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \nu_{xy} \end{Bmatrix} = z\begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = z\{\chi\} \tag{6-13}$$

6.2.3 应力—应变关系

由克希霍夫法线假设和正应力假设,有 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$,由弹性力学物理方程,得

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \nu_{xy} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \tag{6-14}$$

由式(6-12)~式(6-14)得到薄板弯曲的应力-应变关系为

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \nu_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$
= \frac{Ez}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \frac{Ez}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \tag{6-15}
$$

6.2.4 广义应力

薄板弯曲的广义应力为

$$
\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{\delta^3}{12z}\{\sigma\} = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} = [D]\{\chi\} \tag{6-16}
$$

式中:M_x、M_y 分别是绕 y 轴和 x 轴的截面上单位长度的弯矩;M_{xy} 是垂直于 z 轴截面上单位面积内的扭矩;[D]是薄板弯曲问题的弹性矩阵,其表达式为

$$
[D] = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{6-17}
$$

6.2.5 能量泛函和微分方程式

弹性体的应变能为

$$
U = \frac{1}{2}\iint_V \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\mathrm{d}V \tag{6-18}
$$

对于薄板弯曲问题,式(6-18)中的应变$\{\varepsilon\}$与应力$\{\sigma\}$应分别使用广义应变$\{\chi\}$和广义应力$\{M\}$来代替。由于求$\{M\}$时,已经对微分体的厚度积分,所以此时应只在板面范围内对 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 进行积分,即

$$
U = \frac{1}{2}\iint_S \{\chi\}^{\mathrm{T}}\{M\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_S \{\chi\}^{\mathrm{T}}[D]\{\chi\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-19}
$$

设平板受有强度为 P_s 的均布载荷作用,此时外力位能为

$$
\Psi = -W = -\iint_S P_s \omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-20}
$$

将式(6-12)代入式(6-19),得到板弯曲时的总位能为

$$\Pi = U + \Psi = \frac{1}{2} \times \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 \right.$$

$$\left. - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) \right] \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$- \iint_S P_s \omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-21}$$

将式(6－21)进行变分,并令 $\delta\Pi = 0$,从而可得出薄板弯曲问题的基本微分方程为

$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = P_s \tag{6-22}$$

式(6－22)是双调和方程,这类方程所描述的薄板弯曲问题采用有限元法求解是收敛的。求解时一般将薄板分割为矩形板单元或三角形板单元。

6.3 薄板弯曲问题有限元法

6.3.1 结构离散

由于矩形板单元列式简单,精度也较好,所以求解薄板弯曲问题时,常用 4 节点矩形单元离散结构。单元形状如图 6－2 所示。

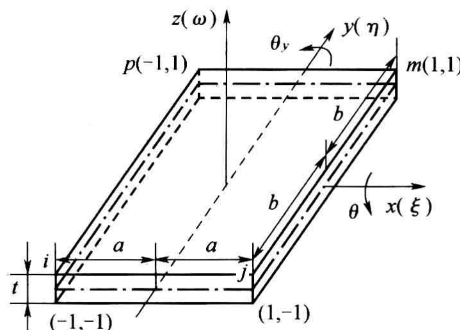


图 6－2　4 节点矩形薄板单元

6.3.2 单元分析

1. 位移函数

由 6.1 可知,薄板的位移、应变和应力都可用挠度 $\omega(x,y)$ 表示,因此将 $\omega(x,y)$ 作为薄板弯曲的位移函数。在有限元分析中通常采用薄板的中面作为分析对象,从前面的分析可知,对于中面上的任意一点只有 ω、θ_x、θ_y 3 个自由度,因此在分析的过程中对于单元中的每个节点只考虑 ω、θ_x、θ_y 3 个自由度,则 4 节点矩形板单元共有 12 个自由度,所以位移函数应取成 12 项多项式,设为

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3$$

$$+ \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \tag{6-23}$$

分别把矩形板单元4个节点的局部坐标值代入式(6－23)及其导数表达式

$$\theta_x = \frac{\partial \omega}{\partial y} \qquad \theta_y = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

联立求解可以得到 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{12}$ 的值,代入式(6－23),整理得

$$\begin{aligned}\omega &= N_i\omega_i + N_{ix}\theta_{ix} + N_{iy}\theta_{iy} + N_j\omega_j + N_{jx}\theta_{jx} + N_{jy}\theta_{jy} \\ &\quad + N_m\omega_m + N_{mx}\theta_{mx} + N_{my}\theta_{my} + N_p\omega_p + N_{px}\theta_{px} + N_{py}\theta_{py} \\ &= [N]\{q\}^e \end{aligned} \tag{6-24}$$

式中:$[N]$ 为形函数矩阵;$N_i, N_{ix}, N_{iy}, \cdots, N_{py}$ 为形函数,表达式分别为

$$N_l = \frac{1}{8}(1 + \xi_l\xi)(1 + \eta_l\eta)(2 + \xi_l\xi + \eta_l\eta - \xi^2 - \eta^2)$$

$$N_{lx} = -\frac{b}{8}\eta_l(1 + \xi_l\xi)(1 + \eta_l\eta)(1 - \xi^2)$$

$$N_{ly} = -\frac{a}{8}\xi_l(1 + \xi_l\xi)(1 + \eta_l\eta)(1 - \xi^2)$$

$$\xi = \frac{x}{a} \qquad \eta = \frac{y}{b} \qquad (l = i, j, m, p) \tag{6-25}$$

式中:ξ_l, η_l 分别为节点在局部坐标系中的坐标值。

应该说明,这样设定的 ω 在单元内及边界上是连续的,但 θ_x 或 θ_y 在边界上不一定连续,所以称采用这种位移函数的矩形板单元为非协调单元。但实践证明,利用这种矩形板单元计算薄板弯曲问题能很好地收敛于精确解。

2. 单元刚度矩阵

将式(6－24)代入式(6－12),得

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 N_{ix}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 N_{iy}}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 N_{py}}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 N_{ix}}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 N_{iy}}{\partial y^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 N_{py}}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & 2\dfrac{\partial^2 N_{ix}}{\partial x \partial y} & 2\dfrac{\partial^2 N_{iy}}{\partial x \partial y} & \cdots & 2\dfrac{\partial^2 N_{py}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \vdots \\ \theta_{py} \end{Bmatrix}$$

$$= [B]\{q\}^e \tag{6-26}$$

式中

$$
[B] = -\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 N_{ix}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 N_{iy}}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 N_{py}}{\partial x^2} \\
\dfrac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 N_{ix}}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 N_{iy}}{\partial y^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 N_{py}}{\partial y^2} \\
2\dfrac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & 2\dfrac{\partial^2 N_{ix}}{\partial x \partial y} & 2\dfrac{\partial^2 N_{iy}}{\partial x \partial y} & \cdots & 2\dfrac{\partial^2 N_{py}}{\partial x \partial y}
\end{bmatrix}
$$

则单元刚度矩阵为

$$
[k]^e = \iint_s [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-b}^{b}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x
$$

$$
= A\begin{bmatrix}
a_1 & & & & & & & & & & & \\
a_2 & a_3 & & & & & \text{对} & & & & & \\
a_4 & a_5 & a_6 & & & & & & & & & \\
a_7 & a_8 & a_9 & a_1 & & & & & \text{称} & & & \\
a_8 & a_{10} & a_{11} & a_2 & a_3 & & & & & & & \\
-a_9 & a_{11} & a_{12} & -a_4 & -a_5 & a_6 & & & & & & \\
a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_1 & & & & & \\
-a_{14} & a_{19} & a_{20} & -a_{17} & a_{21} & a_{22} & -a_2 & a_3 & & & & \\
-a_{15} & a_{20} & a_{23} & a_{18} & -a_{22} & a_{24} & -a_4 & a_5 & a_6 & & & \\
a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{13} & a_{14} & -a_{15} & a_7 & a_{25} & a_9 & a_1 & & \\
-a_{17} & a_{21} & -a_{22} & a_{14} & a_{19} & a_{20} & a_{25} & a_{10} & a_{11} & -a_2 & a_3 & \\
a_{18} & a_{22} & a_{24} & a_{15} & a_{20} & a_{23} & a_9 & a_{11} & a_{12} & a_4 & -a_5 & a_6
\end{bmatrix} \tag{6-27}
$$

式中

$$
A = \frac{Et^3}{360(1-\mu^2)ab} \qquad r = \frac{a}{b}
$$

$a_1 = 21 - 6\mu + 30r^2 + 30r^{-2}$ $\qquad a_2 = 3b + 12\mu b + 30r^2 b$

$a_3 = 8b^2(1-\mu) + 40a^2$ $\qquad a_4 = -3a(1+4\mu) - 30r^{-2}a$

$a_5 = -30\mu ab$ $\qquad a_6 = 8a^2(1-\mu) + 40b^2$

$a_7 = -21 + 6\mu - 30r^{-2} + 15r^2$ $\qquad a_8 = -3b(1+4\mu) + 15r^2 b$

$a_9 = 3a(1-\mu) + 30r^{-2}a$ $\qquad a_{10} = -8b^2(1-\mu) + 20a^2$

$a_{11} = 0$ $\qquad a_{12} = -2a^2(1-\mu) + 20b^2$

$a_{13} = 21 - 6\mu - 15(r^2 + r^{-2})$ $\qquad a_{14} = 3b(1-\mu) - 15r^2 b$

$a_{15} = -3a(1-\mu) - 15r^{-2}a$ $\qquad a_{16} = -21 + 6\mu + 15r^{-2} - 30r^2$

$a_{17} = -3b(1-\mu) - 30r^2 b$ $\qquad a_{18} = -3a(1+4\mu) + 15r^{-2}a$

$a_{19} = 2b^2(1-\mu) + 10a^2$ $\qquad a_{20} = 0$

$a_{21} = -2b^2(1-\mu) + 20a^2$ $\qquad a_{22} = 0$

$$a_{23} = 2a^2(1-\mu) + 10b^2 \qquad a_{24} = -8a^2(1-\mu) + 20b^2$$

$$a_{25} = 3b(1+4\mu) - 15r^2 b$$

3. 单元载荷矢量

薄板弯曲问题中最常见的载荷形式是垂直于板中面的分布载荷 P_s，此时单元载荷矢量可按下式计算

$$\{R\}^e = \iint_{\Omega} [N]^{\mathrm{T}} P_s \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-28}$$

当 P_s 为常数，即薄板上作用有均布载荷时，有

$$[R]^e = 4P_s ab$$

$$= \left[\frac{1}{4} \quad \frac{b}{12} \quad -\frac{a}{12} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{b}{12} \quad \frac{a}{12} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{b}{12} \quad \frac{a}{12} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{b}{12} \quad -\frac{a}{12}\right]^{\mathrm{T}} \tag{6-29}$$

6.3.3 总刚矩阵集成

按第 2 章介绍的方法可集成得到结构的总刚矩阵，即

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_e} [k]^e \qquad (n_e \text{ 为单元总数})$$

式中：$[K]$为总刚矩阵。

6.3.4 载荷移置

将各种载荷移置为等效节点载荷，形成节点载荷列阵$\{R\}$。载荷移置的方法可参考第 2 章。

6.3.5 边界条件处理

总体刚度矩阵$[K]$和载荷列阵$\{R\}$的建立过程中，还没有考虑结构的边界约束，因此$[K]$是奇异矩阵。为了求出唯一的节点位移解，必须对边界条件进行处理，排除结构的刚体运动，消除$[K]$的奇异性。

6.3.6 求解线性方程组

对矩阵$[K]$、$\{R\}$进行约束处理之后，就可求解结构的刚度方程，即线性方程

$$[\overline{K}]\{q\} = \{\overline{R}\}$$

式中：$[\overline{K}]$、$\{\overline{R}\}$分别为经约束处理后的总刚矩阵和节点载荷列阵。

求解单元任意点的位移和其他物理量的具体方法可参考第 2 章。

6.4 三角形板单元

工程中另一种常用的薄板单元是三角形板单元，当薄板具有斜交边界、曲线边界等较复杂的形状时，三角形板单元能更好地适应弹性体的边界形状。

6.4.1 面积坐标

1. 定义

采用三角形板单元离散薄板时,使用面积坐标能使问题简化,下面简要介绍面积坐标的一些知识。设三角形的面积为 A,三角形中任意一点 $P(x,y)$ 与其 3 个顶点相连形成 3 个三角形,如图 6-3所示。

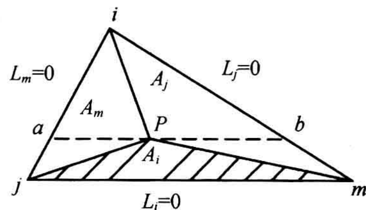


图 6-3 面积坐标的定义

以原三角形的边所对的顶点编号来命名这 3 个三角形的面积,则 $\triangle Pjm$ 面积为 A_i,$\triangle Pmi$ 面积为 A_j,$\triangle Pij$ 面积为 A_m,则有

$$A_i + A_j + A_m = A \tag{6-30}$$

令

$$L_i = \frac{A_i}{A} \quad L_j = \frac{A_j}{A} \quad L_m = \frac{A_m}{A} \tag{6-31}$$

式中:L_i、L_j、L_m 即称为面积坐标。P 点的位置可用这 3 个面积坐标表示为

$$P(L_i, L_j, L_m)$$

2. 面积坐标的特点

面积坐标具有以下 3 个特点。

(1) 3 个面积坐标之和为 1,即

$$L_i + L_j + L_m = 1 \tag{6-32}$$

上式可由面积坐标的定义导出,它说明 3 个面积坐标并不互相独立。

(2) 三角形 3 个顶点的面积坐标分别为 $i(1,0,0)$、$j(0,1,0)$、$m(0,0,1)$;3 条边的方程分别为

$$L_i = 0 \quad (jm\text{ 边})$$

$$L_j = 0 \quad (mi\text{ 边})$$

$$L_m = 0 \quad (ij\text{ 边})$$

(3) 三角形内与任一条边平行的直线上的所有点有相同的面积坐标。例如,图 6-3 中与 jm 边平行的 ab 边上各点的坐标相同。

3. 面积坐标与直角坐标的转换

三角形 3 个顶点和点 P 在直角坐标系中的坐标如图 6-4 所示,则点 P 的面积坐标与直角坐标之间有线性变换关系

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_m \end{Bmatrix} \tag{6-33}$$

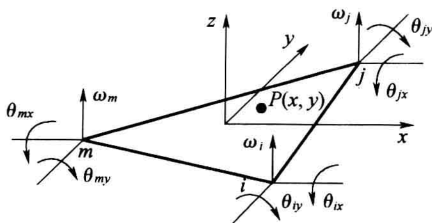


图 6-4 3 节点三角形板单元

由式(6-33)可推导出

$$L_l = \frac{A_l}{A} = \frac{1}{2A}(a_l + b_l x + c_l y) \qquad (l = i,j,m) \tag{6-34}$$

对照式(6－34)和式(2－39)可知，面积坐标正是平面3节点三角形单元的3个形函数。

4. 面积坐标的微积分运算

由式(6－34)，得

$$\frac{\partial L_l}{\partial x} = \frac{\partial N_l}{\partial x} = \frac{1}{2A}b_l$$

$$\frac{\partial L_l}{\partial y} = \frac{\partial N_l}{\partial y} = \frac{1}{2A}c_l$$

面积坐标的幂函数在三角形一条边上的积分公式为

$$\int_l L_i^a L_j^b \mathrm{d}s = \frac{a!b!c!}{(a+b+1)!}l \tag{6-35}$$

式中：l 为 ij 边的边长。

面积坐标的幂函数在三角形全面积上的积分公式为

$$\iint_s L_i^a L_j^b L_m^c \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}2A \tag{6-36}$$

6.4.2 位移函数

图6－4所示的三角形板单元，3个节点共有9个自由度，假设位移函数为下列完全三次多项式

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3$$

显然单元的9项节点位移不能确定10个待定参数。为解决这个问题，前人提出了两种方法。第一种是将单元中心挠度 ω_0 也作为一个参数(第10个自由度)，但这种方法的计算麻烦，且按此方法导出的单元不能保证收敛。另一种方法是令 $\alpha_8 = \alpha_9$ 以减少一个待定参数，但在此情况下，对于两条边界分别平行于 x 轴和 y 轴的等腰三角形单元，用单元节点位移表示待定系数的矩阵出现奇异性，所以这种方法也行不通。

面积坐标的引入使上述问题得以解决。以面积坐标表示3节点三角形单元的位移函数，设为

$$\begin{aligned}\omega = {} & \alpha_1 L_i + \alpha_2 L_j + \alpha_3 L_m + \alpha_4 (L_j^2 L_i + CL_iL_jL_m) \\ & + \alpha_5 (L_j^2 L_m + CL_iL_jL_m) + \alpha_6 (L_m^2 L_i + CL_iL_jL_m) \\ & + \alpha_7 (L_m^2 L_j + CL_iL_jL_m) + \alpha_8 (L_i^2 L_j + CL_iL_jL_m) \\ & + \alpha_9 (L_i^2 L_m + CL_iL_jL_m)\end{aligned} \tag{6-37}$$

式中：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_9$ 是待定系数；C 为常数。

式(6－37)对 L_1、L_2、L_3 在形式上是对称的，但由于它只包含九项，并不能满足常应变要求。例如，当节点参数的取值使单元具有常曲率或常扭率时，式(6－37)却不一定能给出和此变形状态相对应的挠度值。这个问题可以通过调整式中的常数 C 来解决，实践证

明,当 $C=1/2$ 时,式(6－37)所表示的 ω 正好满足常应变要求。

在式(6－37)中令 $C=1/2$,把三角形单元3个节点的坐标分别代入式(6－37)及其导数表达式

$$\theta_{lx}=\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_l \quad \theta_{ly}=\left(-\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_l \qquad (l=i,j,m)$$

联立以上方程求出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9$,回代到式(6－37),经整理可得到 ω 的插值表达式为

$$\omega=[N]\{q\}^e=[N_1 \quad N_2 \quad N_3]\{q_i \quad q_j \quad q_m\}^{\mathrm{T}} \tag{6-38}$$

式中

$$[N_i]=\begin{Bmatrix} N_i \\ N_{ix} \\ N_{iy} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{Bmatrix} L_i+L_i^2L_j+L_i^2L_m-L_iL_j^2-L_iL_m^2 \\ b_j\left(L_mL_i^2+\frac{1}{2}L_1L_2L_m\right)-b_m\left(L_i^2L_j+\frac{1}{2}L_1L_2L_m\right) \\ c_j\left(L_mL_i^2+\frac{1}{2}L_1L_2L_m\right)-c_m\left(L_i^2L_j+\frac{1}{2}L_1L_2L_m\right) \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$[N_j]$、$[N_m]$可通过下标 i,j,m 轮换得到。

6.4.3 单元刚度矩阵

得到位移函数式(6－38)后,可以分别由式(6－12)、式(6－17)得到单元的应变矩阵 $[B]$ 和弹性矩阵 $[D]$,然后就可以按照标准的计算步骤计算单元刚度矩阵 $[k]^e$。$[k]^e$ 的计算公式为

$$[k]^e=\iint_S [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-39}$$

式中

$$[B]=\left\{-\frac{\partial^2[N]}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2[N]}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2[N]}{\partial x\partial y}\right\}^{\mathrm{T}}$$

$[D]$的表达式同式(6－17)。

由于 $[k]^e$ 的表达式十分复杂,此处略去不写。

6.4.4 单元载荷矢量

以横向分布载荷 $q(x,y)$ 为例,当单元尺寸取得较小时,可以认为横向分布载荷在一个单元内是均匀分布的,即取 $q(x,y)=q$ 为常量,则单元载荷矢量的计算公式为

$$\{R\}^e=\iint_s [N]^{\mathrm{T}}q\mathrm{d}x\mathrm{d}y=q\iint_s [N]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-40}$$

由式(6－36),得

$$\iint_s [N_1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_s [L_1+L_1^2L_2+L_1^2L_3-L_2^2L_1-L_3^2L_1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}A$$

$$\iint_s [N_{1x}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_s \left[b_2\left(L_1^2L_3+\frac{1}{2}L_1L_2L_3\right)-b_3\left(L_1^2L_2+\frac{1}{2}L_1L_2L_3\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{b_2-b_3}{24}A$$

$$\iint_s [N_{1y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_s \left[c_2\left(L_1^2L_3 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3\right) - c_3\left(L_1^2L_2 + \frac{1}{2}L_1L_2L_3\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{c_2 - c_3}{24}A$$

同理可得 N_2、N_{2x}、N_{2y}、N_3、N_{3x}、N_{3y}在三角形单元内的面积分，代入式(6-40)，得

$$\{R\}^{\mathrm{T}} = qA\left[\frac{1}{3} \quad \frac{b_2 - b_3}{24} \quad \frac{c_2 - c_3}{24} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{b_3 - b_1}{24} \quad \frac{c_3 - c_1}{24} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{b_1 - b_2}{24} \quad \frac{c_1 - c_2}{24}\right]$$

然后就可进行总刚集成和载荷移置，求解线性方程组及其他物理量，这些步骤与第2章介绍的方法相似。

第7章　动态分析有限元法

工程中有许多受动载荷的产品，如受道路载荷的汽车、受脉动风载的雷达天线、受海浪冲击的海洋平台、受偏心离心力作用的旋转机械等。当产品受到随时间变化的动载荷时，需要进行动态分析，以了解产品动态特性。

动态分析又称动力分析，包括固有特性分析和响应分析。固有特性由固有频率、振型等一组模态参数构成，它由结构本身（主要是质量与刚度分布）决定，而与外部载荷无关，但决定了结构对动载荷的响应；响应分析是计算结构对给定动载荷的各种响应特性，包括位移响应、速度响应、加速度响应以及动应变和动应力等。

动态分析的内容及其关系如图7－1所示。

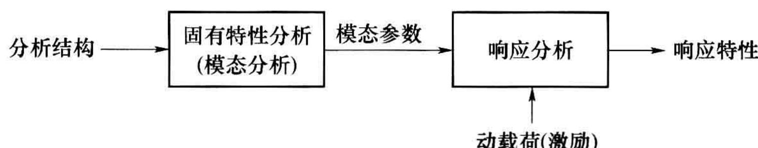


图7－1　动态分析的内容及其关系

7.1　动态分析有限元法的特点

动态分析与静力分析的一个根本区别就是结构所受的载荷是随时间变化的动载荷，又称激励。在动态分析有限元法中，仍以节点位移$\{q\}$作为基本未知量，但这时$\{q\}$不仅是坐标的函数，而且也是时间的函数，即

$$\{q\} = \{q\}(x \quad y \quad z \quad t) \tag{7-1}$$

因此节点具有速度$\{\dot{q}\}$和加速度$\{\ddot{q}\}$。利用节点位移插值表示单元内任一点的位移时，一般仍采用与静力分析相同的形函数，即

$$\{d\} = [N]\{q\}^e \tag{7-2}$$

式中：$[N]$是静力分析中的形函数矩阵。当单元数量较多时，上述插值可以得到较好的插值精度。在线弹性条件下，单元内的应变和应力与节点位移的关系仍为

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}^e \tag{7-3}$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q\}^e \tag{7-4}$$

但这时的位移、应变和应力都是某一时刻的瞬时值，它们都是随时间t变化的函数。

由于节点具有速度和加速度，结构将受到阻尼力和惯性力的作用。根据达朗伯原理，引入惯性力和阻尼力之后结构仍处于平衡状态，因此动态分析中仍可采用虚位移原理来建立单元特性方程，然后再根据整体平衡条件和与静力分析相同的集成方式，就可得到整

个结构的平衡方程

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{R(t)\} \tag{7-5}$$

式(7－5)又称为结构的运动方程,它不再是静力问题那样的线性方程,而是一个二阶常微分方程组,其求解过程要复杂得多。

动态分析有限元法的基本思想与静力分析一致,只是由于有限元方程的形式不同,而求解方法和计算内容不一样。

7.2 动态分析有限元法的一般步骤

7.2.1 结构离散

结构离散过程与静力分析相同,也是将一个连续的弹性体划分为一定数量的单元。只是由于两者分析内容不同,对网格形式的要求有可能不一样。例如,静力分析时要求在应力集中部位加密网格,但在动态分析中,由于固有频率和振型主要与结构的质量和刚度分布有关,因此它要求整个结构尽可能采用均匀的网格。

7.2.2 单元分析

单元分析的任务仍是建立单元特性矩阵,形成单元特性方程。在动态分析中,除刚度矩阵外,单元特性矩阵还包括质量矩阵和阻尼矩阵。本节仍采用虚位移原理来建立单元特性矩阵。

在动载荷作用下,对于任一瞬时,设单元节点发生虚位移$\{\delta q\}^e$,则单元内各点也产生相应的虚位移$\{\delta d\}$和虚应变$\{\delta\varepsilon\}$。根据式(2－15),这时单元内产生的虚应变能为

$$\delta U=\int_V\{\delta\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\,\mathrm{d}V \tag{7-6}$$

此时单元除受动载荷外,还受到由加速度引起的惯性力$-\rho\{\ddot{d}\}\,\mathrm{d}V$和由速度引起的阻尼力$-\nu\{\dot{d}\}\,\mathrm{d}V$的作用,其中$\rho$为材料密度,$\nu$是线性阻尼系数。因此外力所做的虚功为

$$\delta W=\int_V\{\delta d\}^{\mathrm{T}}\{P_v\}\,\mathrm{d}V+\int_A\{\delta d\}^{\mathrm{T}}\{P_s\}\,\mathrm{d}A+\{\delta d\}^{\mathrm{T}}\{P_c\}-\int_V\rho\{\delta d\}^{\mathrm{T}}\{\ddot{d}\}\,\mathrm{d}V-\int_V\nu\{\delta d\}^{\mathrm{T}}\{\dot{d}\}\,\mathrm{d}V \tag{7-7}$$

式中:$\{P_v\}$、$\{P_s\}$、$\{P_c\}$分别为作用于单元上的动态体力、动态面力和动态集中力;V为单元体积,A为单元面积。

由于

$$\{d\}=[N]\{q\}^e,\{\varepsilon\}=[B]\{q\}^e$$

且形函数仅为坐标x、y、z的函数,与时间无关,因此有

$$\begin{cases}\{\dot{d}\}=[N]\{\dot{q}\}^e\\ \{\ddot{d}\}=[N]\{\ddot{q}\}^e\\ \{\delta d\}=[N]\{\delta q\}^e\\ \{\delta\varepsilon\}=[B]\{\delta q\}^e\end{cases} \tag{7-8}$$

根据虚位移原理,有

$$\delta U = \delta W \tag{7-9}$$

将式(7-6)~式(7-8)代入式(7-9)并经整理,得单元运动方程为

$$[m]^e\{\ddot{q}\}^e + [c]^e\{\dot{q}\}^e + [k]^e\{q\}^e = \{R(t)\}^e \tag{7-10}$$

式中

$$[k]^e = \int_V [B]^T[D][B]\mathrm{d}V \tag{7-11}$$

$$[m]^e = \int_V [N]^T\rho[N]\mathrm{d}V \tag{7-12}$$

$$[c]^e = \int_V [N]^T\nu[N]\mathrm{d}V \tag{7-13}$$

分别称为单元的刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵,它们就是决定单元动态性能的特性矩阵。

$$\{R(t)\}^e = \int_V [N]^T\{P_v\}\mathrm{d}V + \int_A [N]^T\{P_s\}\mathrm{d}A + [N]^T\{P_c\} \tag{7-14}$$

称为单元节点动载荷列阵,它是作用在单元上的体力、面力和集中力向单元节点移置的结果。

比较式(2-54)与式(7-11),式(2-66)、式(2-67)、式(2-68)与式(7-14),可知在动态分析和静力分析中,单元的刚度矩阵是相同的,外部载荷的移置原理也是一样的。

将式(7-12)与式(7-13)相比,得

$$[c]^e = \frac{\nu}{\rho}[m]^e$$

即单元阻尼矩阵与质量矩阵成比例,故称这种阻尼为比例阻尼。这时$[c]^e$为对称阵,且与模态矩阵具有正交性。但在一般阻尼情况下,这种比例关系是不存在的,即式(7-13)不成立。限于篇幅,本节在有关讨论中仅涉及这种简单的比例阻尼情况。

在动态分析中,单元的质量矩阵通常采用以下两种形式。

1. 一致质量矩阵(Consistent Mass Matrix)

按式(7-12)形成的单元质量矩阵称为一致质量矩阵,因为它采用了和刚度矩阵一致的形函数。这种质量矩阵取决于单元的类型和形函数的形式。对于3节点三角形单元,可以推得其一致质量矩阵为

$$[m]_c^e = \frac{\rho t A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 集中质量矩阵(Lumping Mass Matrix)

集中质量矩阵将单元的分布质量按等效原则分配在各个节点上,等效原则就是要求不改变原单元的质量中心,这样形成的质量矩阵称为集中质量矩阵。集中质量矩阵是一

个对角阵,如3节点三角形单元的集中质量矩阵为

$$[m]_l^e = \frac{\rho tA}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于集中质量矩阵是一个对角阵,因而可简化动态计算,减小存储容量。利用这种矩阵计算出的结构固有频率偏低。不过由于有限元模型本身比实际结构偏刚,两者相互补偿,计算出的固有频率反而更接近真实值。一致质量矩阵由于分布较合理,因此可以求得更精确的振型。另外,采用集中质量矩阵时,整个模型的质量分布还受网格划分形式的影响。

7.2.3 总体矩阵集成

总体矩阵集成的任务是将各单元特性矩阵装配成整个结构的特性矩阵,从而建立整体平衡方程(7-5),即

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{R(t)\}$$

式中:$\{q\}$为所有节点位移分量组成的列阵;$\{R(t)\}$为节点载荷列阵。

$[K]$、$[M]$、$[C]$分别为结构的刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵。其中$[K]$与静力分析中的总刚矩阵完全相同,矩阵$[M]$、$[C]$也采用与$[K]$相同的集成方式,即

$$\begin{cases} [M] = \sum_{e=1}^{n_e} [m]^e \\ [C] = \sum_{e=1}^{n_e} [C]^e \end{cases} \quad (n_e\text{为单元总数}) \tag{7-15}$$

式中:矩阵$[K]$、$[M]$和$[C]$均为$n \times n$阶对称阵(n为结构总自由度数)。

7.2.4 固有特性分析

结构的固有特性由一组模态参数定量描述,它由结构本身决定,与外部载荷无关。模态参数包括固有频率、模态振型、模态质量、模态刚度和模态阻尼比等,其中最重要的参数是固有频率、模态振型和模态阻尼比。

固有特性分析就是对模态参数进行计算,因此又称模态分析。其目的一是避免结构共振和出现有害的振型,二是为响应分析提供依据。

由于固有特性与外载无关,且阻尼对固有频率和振型影响不大,因此可通过无阻尼自由振动方程计算固有特性。由式(7-5)可得无阻尼自由振动方程为

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \tag{7-16}$$

由于自由振动可分解为一系列简谐振动的叠加，因此上式的解可设为

$$\{q\} = \{\Phi\} e^{j\omega t} \tag{7-17}$$

式中：ω 为简谐振动圆频率；$\{\Phi\}$ 为节点振幅列矢量，$\{\Phi\} = \{\phi_1 \quad \phi_2 \cdots \phi_n\}^T$，$\phi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为自由度 i 方向上的振幅；t 为时间。

将式(7-17)代入式(7-16)，并同时消去因子 $e^{j\omega t}$，得

$$([K] - \omega^2[M])\{\Phi\} = 0 \tag{7-18}$$

式(7-18)为一广义特征值问题。根据线性代数可知，求解该问题可以求出 n 个特征值 ω_1^2、ω_2^2、…、ω_n^2 和相对应的 n 个特征矢量 $\{\Phi_1\}$、$\{\Phi_2\}$、…、$\{\Phi_n\}$。其中特征值的平方根 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 就是结构的 i 阶固有频率，又称模态频率；特征矢量 $\{\Phi_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 就是结构的 i 阶模态振型，简称振型。i 阶固有频率、i 阶模态振型等模态参数组成的动态特性称为结构的 i 阶模态。

振型 $\{\Phi_i\}$ 是结构按频率 ω_i 振动时各自由度方向振幅间的相对比例关系，它反映了结构振动的形态，并不是振幅的绝对大小。图 7-2 为一平面悬臂梁的第 1 阶～第 4 阶振型，它们反映了梁在第 1 阶～第 4 阶固有频率 ω_1、ω_2、ω_3、ω_4 处发生振动的振动形态，由各个节点振幅的相对大小关系决定。

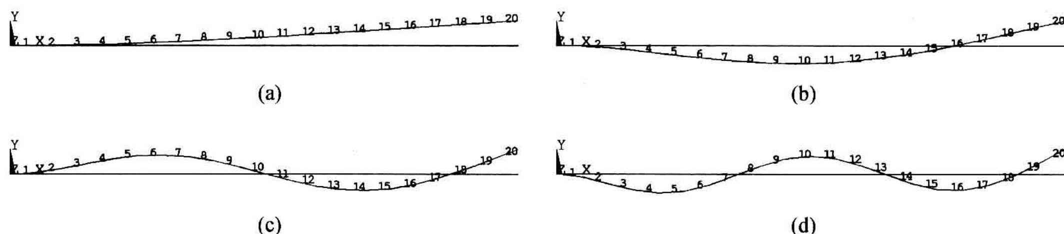


图 7-2 悬臂梁的振型

(a) 一阶振型；(b) 二阶振型；(c) 三阶振型；(d) 四阶振型。

由上可见，固有特性分析实际上就是数学上的求解广义特征值问题。求解的数值方法主要有以下两种。

1. 变换法

变换法的基本思想是通过一系列矩阵变换，将矩阵 $[M]$、$[K]$ 化为对角阵，即

$$[K^d] = \begin{bmatrix} k_{11} & & & \\ & k_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_{nn} \end{bmatrix}, \quad [M^d] = \begin{bmatrix} m_{11} & & & \\ & m_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{nn} \end{bmatrix}$$

变换后的特征值不变，即原问题式(7-18)与特征值问题

$$([K^d] - \omega^2[M^d])\{\Phi^d\} = 0$$

具有相同的特征值。由于 $[K^d]$、$[M^d]$ 为对角阵，因此很容易求出各个特征值分别为

$$\omega_1^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}}, \omega_2^2 = \frac{k_{22}}{m_{22}}, \cdots, \omega_n^2 = \frac{k_{nn}}{m_{nn}}$$

以及和上述特征值相对应的特征矢量$\{\Phi_i^d\}(i=1,2,\cdots,n)$。对$\{\Phi_i^d\}$进行逆变换，就可以求出原问题的所有特征矢量。

变换法是先求特征值，再求特征矢量，而且是一次性求出所有特性值和特征矢量。该法主要用于一些小型问题的求解，常见的变换方法是广义雅可比法。

2. 迭代法

迭代法是对一选取的初始矢量$\{\Phi^0\}$和迭代公式

$$\{\Phi^{k+1}\} = [A]^{-1}\{\Phi^k\}$$

求一矢量序列$\{\Phi^1\}$、$\{\Phi^2\}$、…，使它收敛于与$|A|$绝对值最大的特征值相应的特征矢量，在满足收敛精度时，以$\{\Phi^{k+1}\}$作为$[A]$的特征矢量，再求出相应的特征值。

与变换法相反，迭代法是先求特征矢量，再求特征值，且从低阶到高阶依次求出各阶特征对，而不是一次求出所有特征对。由于在求高阶特征对时要洗掉所有低阶成分，因此迭代时容易积累误差，故该法只适合求3个~5个低阶特征对。

目前常用的迭代方法是逆迭代法。为降低求解规模，更广泛使用的是子空间迭代法。该法是利用瑞雷商极值原理，首先将n维空间的特征值问题投影到一个$p(p<n)$维子空间内，然后再在子空间内采用逆迭代法。求大型结构的少数特征对时，子空间迭代法是一种很有效的方法。

关于特征值问题数值计算的详细方法，读者可参考有关数值方法方面的书籍。

7.2.5 响应分析

响应分析的目的是计算结构在动载荷作用下，节点位移、速度和加速度的变化规律。因此响应分析的任务就是求解二阶常微分方程组，即式(7-5)

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{R(t)\}$$

求解上述方程组的数值方法主要有振型叠加法和直接积分法。

1. 振型叠加法

振型叠加法适合于阻尼矩阵可以对角化的情况。该法是根据矩阵$[K]$、$[M]$、$[C]$与模态矩阵$[\Phi]$的正交性，即

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = [\bar{K}]$$

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = [\bar{M}] \qquad ([\bar{M}]、[\bar{C}]、[\bar{K}]均为对角阵)$$

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = [\bar{C}]$$

式中：模态矩阵$[\Phi]$是由各阶模态振型组成的矩阵，$[\Phi] = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_n]$。

利用模态变换

$$\{q\} = [\Phi]\{x\} \tag{7-19}$$

将微分方程组简化为一组以模态坐标$\{x\}$表示的、互不耦合的二阶微分方程

$$[\overline{M}]\{\ddot{x}\} + [\overline{C}]\{\dot{x}\} + [\overline{K}]\{x\} = \{\overline{R}(t)\}$$

式中

$$\{\overline{R}(t)\} = [\boldsymbol{\Phi}]^{\mathrm{T}}\{R(t)\}$$

由于$[\overline{M}]$、$[\overline{C}]$、$[\overline{K}]$均为对角阵，因此上述方程实际上包括 n 个独立的线性微分方程

$$m_i \ddot{x}_i + c_i \dot{x}_i + k_i x_i = R_i(t) \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

分别求解这 n 个方程，就可求出 n 个 x_i 值，再回代到式(7－19)，就可求出动态响应$\{q\}$。

根据振动理论，在动载荷作用下，结构动态响应可以表示为其各阶模态振型的线性叠加，即

$$\{q\} = x_1\{\boldsymbol{\Phi}_1\} + x_2\{\boldsymbol{\Phi}_2\} + \cdots + x_n\{\boldsymbol{\Phi}_n\} = [\boldsymbol{\Phi}]\{x\} \qquad (7-20)$$

式中：x_1、x_1、$\cdots$、x_n 为组合系数，又称模态坐标，$\{x\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$。

这就是模态变换式(7－19)的物理意义，也是振型叠加法的由来。由于结构的动态响应主要由少数低阶模态决定，因此式(7－20)的叠加项可以取得少些，如 1、2、$\cdots$、m ($m < n$)，从而使方程组的阶次得到缩减。

2. 直接积分法

当不能采用振型叠加法时，可用直接积分法求解微分方程。该方法是一种纯粹的数值方法，不涉及任何物理概念，其基本思想是：把一个连续的时间区间离散为($n+1$)个离散点，每两个离散点之间具有相同的时间间隔 $\Delta t = T/n$(T 为周期)，由初始状态 $t=0$ 开始，逐步求出每个时间离散点 Δt、$2\Delta t$、$3\Delta t$、$\cdots$、T 上的状态矢量(通常由位移、速度、加速度等组成)，最后求出的状态矢量就是结构的动态响应解。

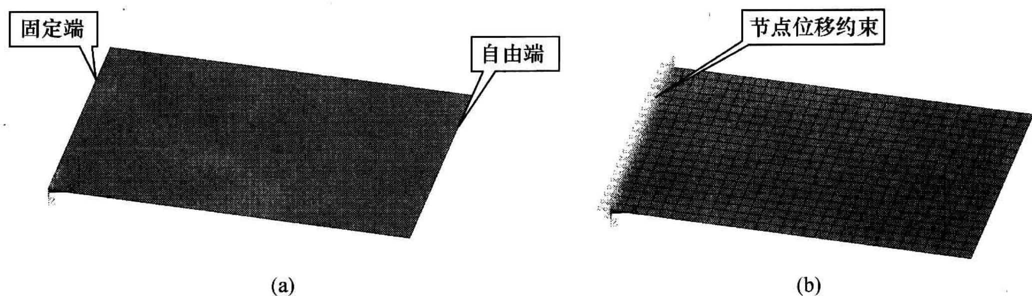
在直接积分法中，是假定初始时刻 $t=0$ 的解为已知的条件下，逐步由一个离散点的解计算下一个离散点的解，即求($t+\Delta t$)时刻的解是以 t 时刻解为基础的，因此该法又称为逐步积分法。由于状态变量($q, \dot{q}, \ddot{q}$)本身就是未知的，所以为了由前一时刻的解推算下一时刻的解，就需要假设状态变量的变化规律。不同形式的假设就形成了具体的直接积分法，如威尔逊－θ 法、纽马克－β 法、中心差分法等。

有关微分方程组数值解法的详细说明请参考数值分析方面的书籍。

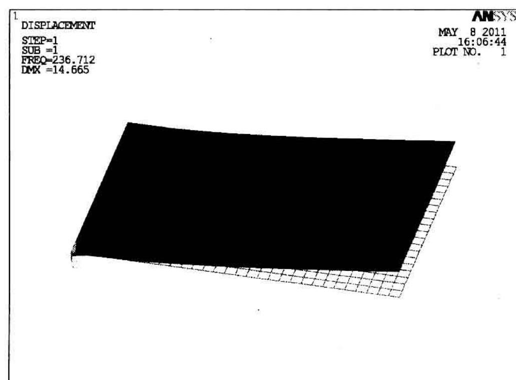
7.2.6 结果处理和显示

分析完毕后，对计算结果进行必要的处理，并按一定方式显示，以研究结构的动态特性和对给定动载荷的响应情况。在动态分析中，结构的各种响应常常用时间历程曲线和频谱曲线表示，结构的振型常用变形图或动画显示，其他模态参数可通过列表方式列出。

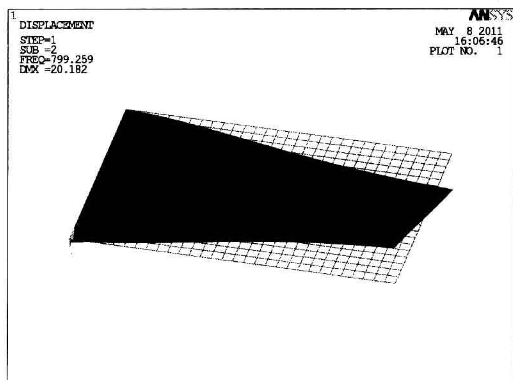
图 7－3 显示了一个 60mm×40mm×1mm 的悬臂平板的模态分析结果。板的材料为 45 号钢，密度 7850kg/m^3，泊松比 0.3，弹性模量 206GP。图 7－3(a)为板的几何模型，(b)为板的有限元模型，(c)～(f)为板的第 1 阶～第 4 阶振型。



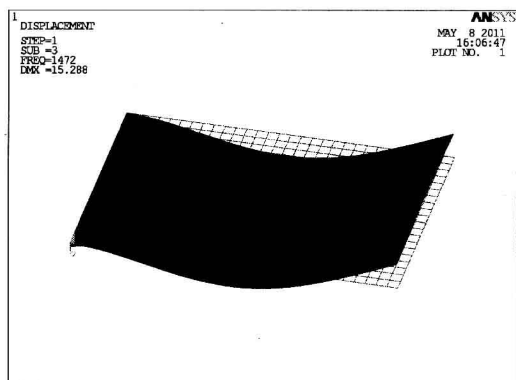
(a)　　　　(b)



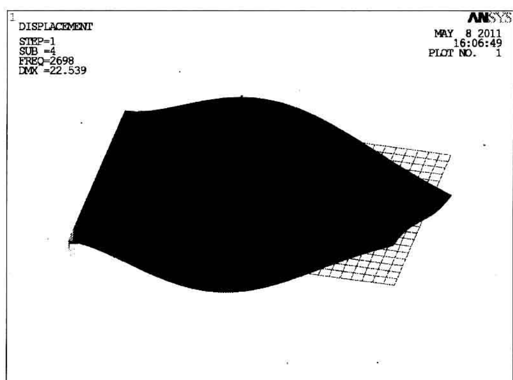
(c)



(d)



(e)



(f)

图 7－3　矩形旋臂板的模态分析

(a) 板的几何模型；(b) 板的有限元模型；(c) 一阶振型(236Hz)；
(d) 二阶振型(799Hz)；(e) 三阶振型(1471Hz)；(f) 四阶振型(2697Hz)。

第8章　热分析有限元法

热分析的目的是计算在给定热边界条件下物体内部的温度分布，进而求出由于温度变化引起的热变形和热应力。

8.1　热传导方程及热边界条件

8.1.1　热传导方程

热量传递有3种方式：传导、对流和辐射。热量通过固体传递的方式称为传导；由于流体的流动而引起的热量传递称为对流；通过电磁波来传递热量的方式称为辐射。本章介绍求解热传导问题的有限元法。

在热传导过程中，结构内每一点都有一个温度值，它们构成具有物体形状的温度场，场变量就是温度 T。温度可以是随时间变化的，称为瞬态温度场，这时 $T=T(x,\ y,\ z,\ t)$。也可能与时间无关，称为稳态温度场，这时 $T=T(x,\ y,\ z)$。

热传导规律可用热传导方程描述。在推导热传导方程时，是从结构内的任一点切出一微分体，通过微分体的热平衡条件建立以下微分方程：

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \rho q_i \qquad (8-1)$$

式中：ρ 为材料密度，单位 $\mathrm{kg/m^3}$；c 为材料比热容，单位 J/(kg·℃)；λ_x、λ_y、λ_z 为材料沿 x、y、z 方向的热传导系数，单位 W/(m·k)；q_i 为结构内部的热源密度，单位 $\mathrm{W/(m^3 \cdot t)}$；t 为时间，单位 s。

式(8-1)左端表示微分体单位时间升温需要的热量，右端的第1项~第3项是沿 x、y、z 三个方向单位时间内传入微分体的热量，右端最后一项是微分体内热源单位时间产生的热量。热传导方程表明：微分体温升需要的热量应与传入微分体的热量和内热源产生的热量相平衡。

式(8-1)是描述热传导规律的一般方程。对于各向同性平面结构的稳定温度场，在无内热源的情况下，有

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad q_i = 0$$

因此热传导方程(8-1)可简化为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (8-2)$$

8.1.2 热边界条件

要了解物体内部的温度分布，就是要求解微分方程式(8－1)或式(8－2)，这时需要给定物体的热边界条件。

热传导是由于结构边界与外部相互热作用的结果，相互作用的规律称为热边界条件，它具有以下3种形式：

1. 温度边界条件

又称第1类边界条件，它规定了物体边界温度的绝对大小，即

$$T_\Gamma = T_0(x,y) \tag{8-3}$$

式中：T_Γ 为边界温度；$T_0(x,y)$ 为已知的温度函数。

2. 热流边界条件

又称第2类边界条件，它规定边界上的热流密度为已知，即

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\Gamma = q_0 \tag{8-4}$$

式中：n 为边界外法线方向，即热流的方向；q_0 为已知的边界热流密度。

3. 换热边界条件

又称第3类边界条件，它描述边界与周围介质之间的换热大小，即

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\Gamma + \alpha(T - T_m) = 0 \tag{8-5}$$

式中：α 为换热系数；T_m 为周围介质温度。

上述3类边界条件也可以统一写成

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\Gamma + \alpha(T - T_m) - q_0 = 0 \tag{8-6}$$

在式(8－6)中，令 $\alpha=0$，有 $\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\Gamma = q_0$，这是热流边界条件。令 $\alpha\to\infty$，有 $T=T_m$，为温度边界条件。令 $\alpha=q_0=0$，有$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\Gamma=0$，即沿外法线方向的温度梯度为零，边界和外界没有热交换，称为绝热边界条件。令 $q_0=0$，就可得到换热边界条件。其中，第1类边界条件也称为强制边界条件，第2类和第3类边界条件称为自然边界条件。

本章以平面结构的稳定温度场为例，介绍热分析有限元法的基本原理。因此本章的目的就是要求解微分方程边值问题

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \\ \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\Gamma + \alpha(T - T_m) - q_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8-7}$$

数学上已经证明，上述边值问题的泛函为

$$U(T) = \iint_\Omega \frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}A + \int_\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha T^2 - \alpha T_m T - q_0 T\right)\mathrm{d}s \tag{8-8}$$

式中：Ω 为由平面结构构成的求解区域；Γ 为围成平面区域 Ω 的曲线边界。

根据变分原理，边值问题(8－7)的解等价于极值问题

$$\delta U = 0$$

的解，这就是建立热分析有限元方程的理论依据。

8.2 热分析有限元法的一般步骤

8.2.1 结构离散

该步骤与力分析的离散过程相同，只是在划分网格时要注意温度场的特点，即在温度梯度较大的区域应适当加大网格密度。同时在热分析之后一般要计算结构的热变形和热应力，两种计算均采用同一个模型，所以在划分网格时还应考虑热应力和热变形的特点。

8.2.2 单元分析

单元分析的任务仍然是建立单元特性矩阵和特性方程，分析的方法也与静力分析相同。不同的是两者泛函形式不一样，且场变量变成了节点温度，它是标量场。

1. 温度函数

假设的单元温度分布规律称为温度函数。从划分的 3 节点三角形单元中任取一个单元 e，节点编号为 i、j、m，这时每个节点只有一个自由度——温度，分别设为 T_i、T_j、T_m，如图 8－1 所示。

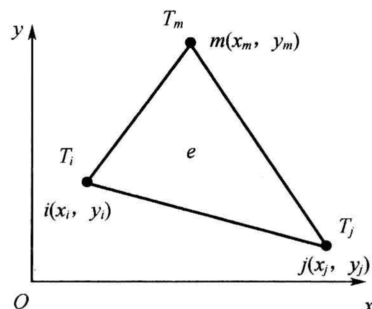


图 8－1 三角形温度单元

温度函数 $T(x,y)$ 采用与位移函数相同的形式，即

$$T(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \tag{8-9}$$

这里，温度函数的阶次仍由单元的自由度决定。阶次越高，逼近精度越高。将节点温度值代入上式并整理，得

$$T(x,y) = N_i T_i + N_j T_j + N_m T_m = [N]^{\mathrm{T}}\{T\}^e \tag{8-10}$$

式中：$[N] = [N_i \quad N_j \quad N_m]$，称为形函数矩阵；$\{T\}^e = \{T_i \quad T_j \quad T_m\}^{\mathrm{T}}$，称为单元节点温度列阵。

式(8－10)表明，单元内任一点的温度可用节点的温度插值得到，插值函数就是形函数。这里的形函数与位移插值的形函数相同。

温度函数式(8－9)能够实现任意的常温度和常温度导数，满足插值函数的完备性要求。单元交界处的温度也连续，满足协调性条件。所以这种单元的有限元解是收敛的。

2. 单元温度刚度矩阵

如前所述，热分析的目的就是要求解热传导微分方程及相应的边界条件，即边值问题式(8－7)。同时指出该问题的解与泛函式(8－8)取得极值的解是相同的。根据式(8－8)，一个平面三角形单元的泛函为

$$U^e = \iint_{\Omega^e} \frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma^e}\left(\frac{1}{2}\alpha T^2 - \alpha T_m T - q_0 T\right)\mathrm{d}s \quad (8-11)$$

式中：Ω^e 为单元 e 在求解域 Ω 中的占有部分；Γ^e 为单元 e 拥有的一部分边界，如图 8-2 所示。

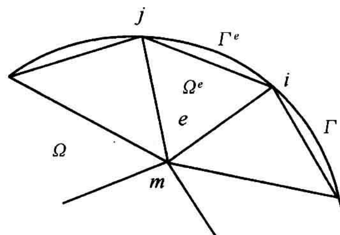


图 8-2　边界单元

上述单元泛函可认为是由

$$U_1^e = \iint_{\Omega^e} \frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (8-12)$$

和

$$U_2^e = \int_{\Gamma^e}\left(\frac{1}{2}\alpha T^2 - \alpha T_m T - q_0 T\right)\mathrm{d}s \quad (8-13)$$

两部分组成的。将温度函数(8-10)代入式(8-12)，整理，得

$$U_1^e = \frac{1}{2}\{T\}^{eT}[k_t]_1^e\{T\}^e \quad (8-14)$$

式中

$$[k_t]_1^e = \frac{\lambda t}{4A}\begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_ib_j + c_ic_j & b_ib_m + c_ic_m \\ b_jb_i + c_jc_i & b_j^2 + c_j^2 & b_jb_m + c_jc_m \\ b_mb_i + c_mc_i & b_mb_j + c_mc_j & b_m^2 + c_m^2 \end{bmatrix} \quad (8-15)$$

泛函中的第 2 部分 U_2^e 是结构边界上的单元对泛函 U 的函数，因此只有边界上的单元才有这项，而与边界相邻的内部单元没有该项。设单元 e 的节点 i、j 位于边界上，如图 8-2 所示，因此计算时应以直线$\overline{ij}$近似代替实际的部分边界 Γ^e。将温度函数式(8-10)代入式(8-13)，得

$$\begin{aligned} U_2^e &= \int_{\overline{ij}}\left[\frac{\alpha}{2}([N]^{\mathrm{T}}\{T\}^e)^2 - (\alpha T_m + q_0)[N]^{\mathrm{T}}\{T\}^e\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_{\overline{ij}}\frac{\alpha}{2}([N]^{\mathrm{T}}\{T\}^e)^T[N]^{\mathrm{T}}\{T\}^e\mathrm{d}s - \int_{\overline{ij}}\{T\}^{eT}[N](\alpha T_m + q_0)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\{T\}^{eT}[k_t]_2^e\{T\}^e - \{T\}^{eT}\{p_t\}^e \end{aligned} \quad (8-16)$$

式中

$$[k_t]_2^e = \int_{\overline{ij}}\alpha[N][N]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s \quad (8-17)$$

$$\{p_t\}^e = \int_{\overline{ij}}[N](\alpha T_m + q_0)\mathrm{d}s \quad (8-18)$$

因此，单元总的泛函为

$$\begin{aligned} U^e &= U_1^e + U_2^e \\ &= \frac{1}{2}\{T\}^{eT}[k_t]_1^e\{T\}^e + \frac{1}{2}\{T\}^{eT}[k_t]_2^e\{T\}^e - \{T\}^{eT}\{p_t\}^e \\ &= \frac{1}{2}\{T\}^{eT}([k_t]_1^e + [k_t]_2^e)\{T\}^e - \{T\}^{eT}\{p_t\}^e \end{aligned}$$

根据泛函的极值条件

$$\frac{\partial U^e}{\partial \{T\}^e} = 0$$

便可得到温度单元的特性方程

$$[k_t]^e \{T\}^e = \{p_t\}^e \tag{8-19}$$

式中：$[k_t]^e = [k_t]_1^e + [k_t]_2^e$；$\{p_t\}^e$ 为与温度有关的右端列阵。

为了和静力分析一致，仍将$[k_t]^e$ 称为单元的温度刚度矩阵，其中$[k_t]_2^e$ 是边界对单元刚阵的一部分贡献。

8.2.3 总刚集成

由于单元是协调的，所以结构的总泛函为各单元泛函之和，即

$$U = \sum U^e = \frac{1}{2}\{T\}^{\mathrm{T}}[K_t]\{T\} - \{T\}^{\mathrm{T}}\{P_t\}$$

根据泛函有极值的条件

$$\frac{\partial U}{\partial \{T\}} = 0$$

便可得整个结构的温度方程为

$$[K_t]\{T\} = \{P_t\} \tag{8-20}$$

式中：$\{T\} = \{T_1、T_2、T_3、\cdots、T_n\}^{\mathrm{T}}$，称为节点温度列阵；$\{P_t\} = \sum\limits_e \{p_t\}^e$，称为与温度有关的总右端列阵；$[K_t] = \sum\limits_e \{k_t\}^e$，称为结构的总温度刚度矩阵。

总温度刚度矩阵$[K_t]$是由各个单元的温度刚阵集成得到的，集成方式与静力分析中的总刚集成完全相同。$[K_t]$和$[K]$一样也是对称阵、稀疏阵，也具有带状分布的特点。不同之处在于，由于温度单元的场变量是标量，每个节点只有一个自由度，所以在节点数相同的情况下，$[K_t]$的阶次只有$[K]$的1/2（对平面应力单元而言），因此求解温度方程的规模相对要小。其次，$[K_t]$是一个正定阵，代数方程式（8－20）有唯一解，因此在求解温度方程时，不必像静力分析那样要首先消除奇异性后才能求解。

8.2.4 求解温度方程

温度方程式（8－20）是一个以节点温度为变量的线性方程组，求解该方程组就可求出各个节点的温度值，再利用插值函数式（8－9）就可以求得整个结构的温度分布。

8.2.5 结果显示、分析

按分析要求显示结构的温度、热变形、热应力分布和热流情况，研究分析结果的合理性、可靠性和精度，评估设计优劣，提出相应的改进措施。

8.3 热应力的有限元分析

在物体中，除了第2章介绍的由于结构分析中位移函数引起的应变外，还有由于温度

变化、膨胀（湿度变化）和其他因素引起的应变。由于温度变化而引起的物体在外在约束或物体各部分之间相互约束下产生的制约物体自由胀缩而产生的应力，称为热应力或温度应力。本节主要讨论一维和二维情况下，物体热应力的单元热力矩阵表达式。

对于一维热应力问题，可得热应变表达式为

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon_T \tag{8-21}$$

式中：ε_x 为热应变；σ_x 为热应力；ε_T 为初始热应变。

设$\frac{1}{E}=[D]^{-1}$，则式（8－21）可以用一般的矩阵形式写为

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{\sigma\} + \{\varepsilon_T\} \tag{8-22}$$

由式（8－22），得

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}) \tag{8-23}$$

因此由式（2－10）可得单位体积的应变能为

$$\overline{U}_0 = \frac{1}{2}\{\sigma\}^{\mathrm{T}}(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}) \tag{8-24}$$

将式（8－23）代入式（8－24），有

$$\overline{U}_0 = \frac{1}{2}(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\})^{\mathrm{T}}[D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}) \tag{8-25}$$

则总的应变能为

$$U = \int_V \overline{U}_0 \mathrm{d}V \tag{8-26}$$

将式（8－25）代入式（8－26），有

$$U = \int_V \frac{1}{2}(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\})^{\mathrm{T}}[D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\})\mathrm{d}V \tag{8-27}$$

将式（2－43）代入式（8－27），得

$$U = \int_V \frac{1}{2}([B]\{d\} - \{\varepsilon_T\})^{\mathrm{T}}[D]([B]\{d\} - \{\varepsilon_T\})\mathrm{d}V \tag{8-28}$$

对式（8－28）进一步简化，得

$$U = \frac{1}{2}\int_V(\{d\}^{\mathrm{T}}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\{d\} - \{d\}^{\mathrm{T}}[B]^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_T\}^{\mathrm{T}}[D][B]\{d\} + \{\varepsilon_T\}^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon_T\})\mathrm{d}V \tag{8-29}$$

式中：第 1 项为由于机械载荷所产生的应力得到的应变能，即

$$U_L = \frac{1}{2}\int_V \{d\}^{\mathrm{T}}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\{d\}\mathrm{d}V \tag{8-30}$$

第 2 项和第 3 项相同，为由于温度变化而引起的热应力得到的应变能，即

$$U_T = \int_V \{d\}^{\mathrm{T}}[B]^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon_T\}\mathrm{d}V \tag{8-31}$$

第 4 项为常数项。

根据最小势能原理表达式$\frac{\partial U}{\partial\{d\}}=0$(其中 $U=U_L+U_T$),得

$$\frac{\partial U_L}{\partial\{d\}} = \int_V [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V\{d\} \tag{8-32}$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial\{d\}} = \int_V [B]^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon_T\}\mathrm{d}V = \{f_T\} \tag{8-33}$$

对比式(2-52)可知,式(8-32)中的积分项为单元刚度矩阵$[k]^e$的一般形式,而式(8-33)是单元中温度变化所引起的载荷或力矢量$\{f_T\}$。

对于一维热应力问题,其热应变可表示为

$$\{\varepsilon_T\} = \{\varepsilon_{xT}\} = \{\alpha T\} \tag{8-34}$$

式中:α 为材料的热膨胀系数,单位 1/℃或者 1/K。对于长度为 L 的一维杆,可将其两个端点视为节点,此时有

$$[D] = [E] \tag{8-35}$$

$$[B] = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right] \tag{8-36}$$

$$\{f_T\} = \int_V [B]^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon_T\}\mathrm{d}V = A\int_0^L [B]^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon_T\}\,\mathrm{d}x \tag{8-37}$$

式中:A 为杆的截面积。

将式(8-34)~式(8-36)代入式(8-37),得单元的热力矩阵

$$\{f_T\} = \begin{Bmatrix} f_{T1} \\ f_{T2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E\alpha TA \\ E\alpha TA \end{Bmatrix} \tag{8-38}$$

对于二维热应力问题,各向异性材料的热应变矩阵为

$$\{\varepsilon_T\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xT} \\ \varepsilon_{yT} \\ \gamma_{xyT} \end{Bmatrix} \tag{8-39}$$

各项同性材料的平面应力问题的热应变矩阵为

$$\{\varepsilon_T\} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8-40}$$

各项同性材料的平面应变问题的热应变矩阵为

$$\{\varepsilon_T\} = (1+\nu)\begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8-41}$$

式中:ν 为泊松比。

对于等厚度的长应变三角形单元,式(8-33)可简化为

$$\{f_T\} = \int_V [B]^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon_T\}\mathrm{d}V \tag{8-42}$$

在各种不同条件下推导出[B]和[D],就可根据式(8 - 52)得到该条件下的单元热力矩阵。得到单元的热力矩阵后,就可按与静力分析相同的方法求解热变形,这时的刚度方程为

$$[K]\{q\} = \{f_T\} \tag{8-43}$$

解上述方程求出的位移$\{q\}$就是结构的热变形。再通过应力和变形之间的关系式

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\} - [D]\{\varepsilon_T\} \tag{8-44}$$

就可以求解热应力。

如果结构还受到其他机械载荷的作用,根据叠加原理,只需要在式(8 - 44)中的右端加入相应的载荷列阵,即

$$[K]\{q\} = \{F\} + \{f_T\} \tag{8-45}$$

解上述方程就可以求出结构的综合变形,进而求出综合应力。

第9章 电磁场问题有限元法

9.1 引 言

从电学和磁学理论发展的早期开始,精确求解电机工程中的初值和边值问题就已成为工程设计人员的主要目标。在变压器、发电机等结构的电磁场问题中,为了掌握电机的励磁要求、暂态特性、涡流效应等性能,精确预计各种运行情况下的电场和磁场是必需的。直到20世纪60年代,研究工作主要是在边值问题的简化模型和与其有关的微分方程的基础上,求得闭式解析解和模拟解。

由于经典的解析解法和模拟技术不能适应工程需要,数值解法的研究一直是人们的研究重点。有限元技术对电磁场分析产生了巨大影响,它把传统的一些只能粗糙估计的问题提高到可以精确分析的高度,解决了不少技术问题。

本章以平面线性稳定电磁场为例,阐述有限元法在电磁场数值分析中的应用,侧重点在于电磁场的基本概念、数学模型的建立和有限元求解的方法上,对繁琐的数学推导尽量略去。

9.2 电磁场微分方程

9.2.1 麦克斯韦微分方程

根据电磁学理论,在各向同性的介质中,电磁场的本构方程为

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{9-1}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{9-2}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9-3}$$

式中:$\boldsymbol{B}$ 是磁通密度矢量,单位为 $\mathrm{Wb/m^2}$;$\boldsymbol{H}$ 是磁场强度矢量,单位为 A/m;$\boldsymbol{D}$ 是电通密度矢量,单位为 $\mathrm{C/m^2}$;$\boldsymbol{E}$ 是电场强度矢量,单位为 V/m;$\boldsymbol{J}$ 是传导电流密度矢量,单位为 $\mathrm{A/m^2}$;ε 是介电常数,单位为 F/m;μ 是磁导率,单位为 H/m;σ 是电导率,单位为 S/m。

麦克斯韦对前人做的工作做了归纳总结和理论抽象,用一组简洁的方程描述电磁场的普遍规律,通常称为麦克斯韦方程组。下面介绍麦克斯韦方程组的微分形式,进而推导出电磁场势函数的微分方程。

麦克斯韦方程组的微分形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{9-4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = D \tag{9-5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9-6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9-7}$$

式中:ρ 为自由电荷体密度，单位 C/m^3;$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right)$,在平面问题中$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y}\right)$。

麦克斯韦方程组是研究宏观电磁场问题的理论依据。其中式(9-4)是高斯定理，表明电荷是电场的源,电力线的方向起始于正电荷,终止于负电荷;式(9-5)是磁通连续性定理,表明穿过任何一个表面的磁通是连续的,揭示了磁场和电场的一项重要区别;式(9-6)是法拉第电磁感应定律,表明变化的磁场可以激发电场;式(9-7)是安培环路定律,表明传导电流能产生磁场,随时间变化的电场也会激发磁场。式(9-4)和式(9-5)分别描述了电场和磁场的性质,式(9-6)和式(9-7)描述了电场和磁场的联系。

本章只讨论线性、均匀、各向同性介质中的电磁场问题,此时 ε、μ、σ 均为常数。这里的线性是指介质中各点的刺痛密度 B 的大小与磁场强度 H 成正比；均匀是指介质各点的磁导率相同;各向同性是指沿空间不同方向,介质的导磁性相同。

9.2.2 势函数的微分方程

麦克斯韦方程组中,电磁变量是相互交织在一起的,数学求解的困难较大,因此实际上很少直接用麦克斯韦方程求解电磁场问题。人们引入了标量电势、标量磁势和矢量磁势等概念,将电场变量和磁场变量分离开,形成独立的电场或磁场的偏微分方程,以便数值求解。

下面以平面稳定电磁场为例,给出电磁场方程的微分形式。所谓平面电磁场是指在三维空间中,电磁场的所有矢量都平行于某个平面 Ω,且在垂直于 Ω 的任意直线的所有点上,场矢量的大小和方向都相同。所谓稳定电磁场是指电磁场中的所有电磁物理量均不随时间的变化而变化。工程中,忽略边缘效应的平行板电容器的静态电场分布、忽略端部效应的电机稳态磁场分布,都属于平面稳定电磁场问题。

1. 标量电势的偏微分方程

静电场是无旋场,因此电场强度矢量的旋度处处为零。同时由高等数学知识可知,对任一可微的标量函数 A,求其梯度再求旋度,结果恒为零,即

$$\text{grad}(\text{curl}\boldsymbol{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

故可以引入标量电势 ϕ 的概念,定义为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{j} \tag{9-8}$$

式中:负号表示电场强度矢量的方向总是指向电势减小率最大的方向。将式(9-8)代入式(9-6),注意此时有 $B=0$,得到标量电势满足的偏微分方程

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{9-9}$$

式(9－9)是一个泊松方程,它描述的是具有电流或电荷激励的静态或低频稳态电磁场。

2. 标量磁势的偏微分方程

在稳定磁场的无电流区域中,有 $\boldsymbol{J}=0,\boldsymbol{D}=0$,根据麦克斯韦方程组的式(9－7)可知,此时磁场强度矢量的旋度为零,即

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$$

这时可以引入标量磁势 ϕ_m 的概念,定义 ϕ_m 为

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\phi_m = -\frac{\partial\phi_m}{\partial x^2}\boldsymbol{i} - \frac{\partial\phi_m}{\partial y^2}\boldsymbol{j} \tag{9-10}$$

将式(9－10)代入式(9－7),即可推导出标量磁势满足的偏微分方程

$$\nabla^2\phi_m = \frac{\partial^2\phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_m}{\partial y^2} = 0 \tag{9-11}$$

式(9－11)是一个拉普拉斯方程,它描述的是无源静电场,激励电流和电荷为零,各变量的时间变化率也为零。

3. 矢量磁势的偏微分方程

在稳定磁场的有电流区域,磁场强度矢量的旋度不等于零,但磁通密度矢量的散度恒为零,同时,由数学知识可知,对于任一矢量,其旋度的散度也恒为零,因此引入矢量磁势 $\boldsymbol{A}$ 来描述有电流存在时的稳定磁场问题。

矢量磁势 $\boldsymbol{A}$ 可以定义为

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{i} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{j} \tag{9-12}$$

式中:$\boldsymbol{A}$ 为矢量磁势,单位 Wb/m。

如果磁场的激励源为直流电源,即方向不变的电流,则矢量磁势 $\boldsymbol{A}$ 的方向与电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 的方向一致,且幅值正比于 $\boldsymbol{J}$。在平面磁场中,电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 与矢量磁势 $\boldsymbol{A}$ 沿着 z 轴方向,分别只有一个分量 J_z 和 A_z。在平面 Oxy 上,J_z 和 A_z 是坐标 x、y 的函数。将式(9－12)代入式(9－7),得矢量磁势满足的偏微分方程为

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z \tag{9-13}$$

式(9－13)也是一个泊松方程,它描述有电流存在时的稳定磁场问题。

9.3 势函数的边界条件和边值问题

应用有限元法求解问题时,需要一定的边界条件来描述某个物理量的边界状态,这也

是计算的出发点。在电磁场实际问题中，存在各种各样的边界条件，通常归纳为三种不同的形式。

设平面电磁场问题的求解区域为 Ω，它的边界为 Γ（包括第 1 类边界条件 Γ_1 和第 2 类边界条件 Γ_2），计算变量为 u，如图 9－1 所示。

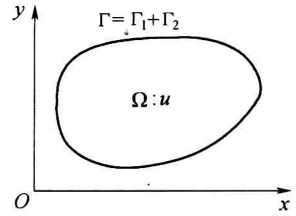


图 9－1　平面电磁场边界条件

9.3.1　狄利克莱（Dirichlet）边界条件

狄利克莱边界条件也称为第 1 类边界条件，该边界条件直接给出物理量 u 在边界上的值

$$u|_{\Gamma_1} = f_1(x,y) \tag{9-14}$$

式中：Γ_1 为第 1 类边界线；$f_1(x, y)$ 为已知的函数，特殊情况下可以为常数或零。常见的狄利克莱边界条件有以下几种。

（1）在静电平衡状态下，常将空气与导体的分界线作为求解区域的边界线，电力线处处与边界线正交，边界线是等位线，等位线上的标量电势位常数，用 ϕ 求解是狄利克莱边界条件。

（2）在稳定磁场中，把空气和铁的分界线作为求解区域的边界线，如果空气为求解区域，则用 ϕ_m 求解时也是狄利克莱边界条件。

（3）在稳定磁场中，把空气和铁的分界线作为求解区域的边界线，如果铁为求解区域，则用 A_z 求解时是狄利克莱边界条件。

（4）磁场的平行对称线，用 A_z 求解时是狄利克莱边界条件。

9.3.2　诺依曼（Neumann）边界条件

诺依曼边界条件也称第 2 类边界条件，该边界条件可以表示为

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = f_2(x,y) \tag{9-15}$$

式中：Γ_2 为第 2 类边界线；$f_2(x, y)$ 为已知函数。

对平面电磁场问题，用势函数表示的诺依曼边界条件形式为

$$\text{标量电势：}\frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = -\frac{D_n}{\varepsilon} \tag{9-16}$$

$$\text{标量磁势：}\frac{\partial \phi_m}{\partial n}|_{\Gamma_2} = -\frac{B_n}{\mu} \tag{9-17}$$

$$\text{矢量磁势：}\frac{\partial A_z}{\partial n}|_{\Gamma_2} = -\frac{H_t}{\gamma} \tag{9-18}$$

式中：D_n 是电通密度矢量的法向分量；B_n 是磁通密度矢量的法向分量；H_t 是磁场强度矢量的切向分量；γ 是磁阻率（m/H），它是磁导率的倒数。

在实际问题中，常见的几种诺依曼边界条件有：

（1）在稳定磁场中，把空气和铁的分界线作为求解区域的边界线，如果空气为求解区域，则用 A_z 求解时也是狄利克莱边界条件。

(2) 在稳定磁场中,如果铁为求解区域,空气和铁的分界线为求解区域的边界线,则用 ϕ_m 求解时是狄利克莱边界条件。

(3) 电场或磁场的平行对称线,用 ϕ 或 ϕ_m 求解时,属于诺依曼边界条件。

9.3.3 齐次边界条件

如果狄利克莱和诺依曼边界条件中的一般函数都为零,在边界条件分别简化为齐次狄利克莱边界条件和齐次诺依曼边界条件,即

$$u\Big|_{\Gamma_1} = 0 \tag{9-19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \tag{9-20}$$

齐次狄利克莱边界条件表示在某个边界上的势函数为零,例如在计算电磁场时,大地和无穷远处的电势和磁势可认为是零。齐次诺依曼边界条件表示在某个边界的法线方向上的势函数变化率为零,异步电机气隙磁场计算时截取的截面就是一个典型的例子。

9.3.4 势函数的边值问题

从广义上说,带有边界条件并由偏微分方程来描述的数学问题,称为边值问题。如电动机以及包围它的空间、天线及其传播的空间、电缆及其相邻的区域等,都是边值问题的几个实际例子。根据前面的分析,可以得到在平面线性稳定电磁场中,标量电势、标量磁势和矢量磁势的边值问题为

$$\text{标量电势}\begin{cases}\Omega: \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \Gamma_1: \phi = \phi_0 \\ \Gamma_2: \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = -\dfrac{D_n}{\varepsilon}\end{cases} \tag{9-21}$$

$$\text{标量磁势}\begin{cases}\Omega: \dfrac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} = 0 \\ \Gamma_1: \phi_m = \phi_{m0} \\ \Gamma_2: \dfrac{\partial \phi_m}{\partial n} = -\dfrac{B_n}{\mu}\end{cases} \tag{9-22}$$

$$\text{矢量磁势}\begin{cases}\Omega: \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\dfrac{J_z}{\gamma} \\ \Gamma_1: A_z = A_{z0} \\ \Gamma_2: \dfrac{\partial A_z}{\partial n} = -\dfrac{H_t}{\gamma}\end{cases} \tag{9-23}$$

9.4 平面电磁场问题有限元法

实际的电磁场问题中,求解区域的边界往往曲折多变,只有极少数的场问题才能找到解析解,所以人们使用数值计算方法来求解电磁场的边值问题,求得其近似解。本节使用

的变分法是数值计算的主要方法之一。在变分法中，首先要根据变分原理构成一个近似解的函数，称为泛函。对平面电磁场问题，构造泛函如下

$$\Omega:\Pi(u) = \left\{\iint_{\Omega}\frac{\beta}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] - fu\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} qu\mathrm{d}l = \min$$

$$\Gamma_1: u = u_0 \qquad (9-24)$$

式中：$\Pi(u)$是一个能量泛函，其中包含了诺依曼边界条件，所以只需另外考虑狄利克莱边界条件 Γ_1 即可。为了便于用统一形式描述电磁场问题，把式(9－21)～式(9－23)都写成泊松方程的形式。

$$\begin{cases} \Omega: \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{f}{\beta} \\ \Gamma_1: u = u_0 \\ \Gamma_2: \dfrac{\partial u}{\partial n} = -\dfrac{q}{\beta} \end{cases}$$

式中各符号在采用不同变量求解电磁场时的物理意义见表 9－1 所列。

表 9－1　统一形式泊松方程的边值问题与物理量的对应关系

统一形式	u	u_0	f	β	q
用 φ 求解	φ	φ_0	ρ	ε	D_n
用 φ_m 求解	φ_m	φ_{m0}	0	μ	B_n
用 A_z 求解	A_z	A_{z0}	Jz	γ	H_t

式(9－24)称为条件变分问题，它和边值问题是等价的，所以用有限元法求解电磁场问题的基本思想，就是把数学上难于求解的边值问题，转换为条件变分问题来求解。将边值问题转换为条件变分问题后，边值问题中的第 1 类边界条件成为条件变分问题中的强加边界条件，而边值问题中的第 2 类边界条件成为条件变分问题中的自然边界条件。

9.4.1　结构离散

为了对条件变分问题式(9－24)进行离散化处理，首先对求解区域 Ω 进行单元划分。三角形单元形状简单，能十分便利的表示复杂的几何结构，因此本节采用三角形单元来离散求解区域。当电磁场问题的求解区域包含有几种不同介质时，应注意每个三角形单元只能包含一种介质，不同介质的分界线上应只有三角形单元的边或顶点。

9.4.2　单元分析

任取一三角形单元 e 如图 9－2 所示，其 3 个节点编号分别为 i、j、m。

对单元内的势函数进行线性插值，插值函数为

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \qquad (9-25)$$

式中:u 为单元势函数;α_1、α_2、α_3 为待定系数。

把3个节点的势函数值和坐标值代入上式,求得3个待定系数为

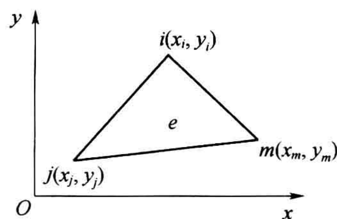


图9-2 平面电磁场中的三角形单元

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A}(a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A}(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A}(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) \qquad (9-26)$$

式中:A 为三角形单元的面积。括号内都是节点的坐标值,为已知项,令

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = x_m - x_j$$
$$a_j = x_m y_i - x_i y_m, \quad b_j = y_m - y_i, \quad c_j = x_i - x_m$$
$$a_m = x_i y_j - x_j y_i, \quad b_m = y_i - y_j, \quad c_m = x_j - x_i$$

它们只取决于三角形节点的坐标值,而与势函数的值无关。将式(9-26)代入式(9-25),经过整理,得到单元内势函数的线性插值

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2A}[(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m] \\ &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ &= \sum_{k=i,j,m} N_k u_k \end{aligned} \qquad (9-27)$$

式中:N_k 为形状函数,其表达式为

$$N_k = \frac{1}{2A}(a_k + b_k + c_k y) \qquad (k = i,j,m) \qquad (9-28)$$

设求解区域共划分为 N_e 个三角形单元,则总的能量泛函为

$$\Pi(u) = \sum_{e=1}^{N_e} [\Pi(u)]^e \qquad (9-29)$$

式中

$$[\Pi(u)]^e = [\Pi'(u)]^e + [\Pi''(u)]^e \qquad (9-30)$$

由式(9-24)和式(9-27),得

$$[\Pi'(u)]^e = \iint_A \left\{\frac{\beta}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] - fu\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (9-31)$$

$$[\Pi''(u)]^e = \int_{\Gamma_2} qu\mathrm{d}l \qquad (9-32)$$

式(9-31)也称为面积积分表达式,式(9-32)也称为线积分表达式。

1. 面积分表达式

将线性插值函数式(9-27)代入式(9-31),得到单元 e 的面积分的能量泛函表达式为

$$[\Pi'(u)]^e = \iint_A \left\{\frac{\beta}{2}\left[\left(\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial x}u^k\right)^2 + \left(\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial y}u^k\right)^2\right] - f\sum_k N_k u_k\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$(9-33)$$

将式(9－33)对单元中每一顶点的势函数 $u_l(l=i,j,m)$ 求一阶偏导,并令

$$\begin{cases} R = \iint_A fN_l \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ k_{lk} = \iint_A \left(\dfrac{\partial N_l}{\partial x}\dfrac{\partial N_k}{\partial x} + \dfrac{\partial N_l}{\partial y}\dfrac{\partial N_k}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{cases} \tag{9-34}$$

则式(9－33)的矩阵形式为

$$\left\{ \frac{\partial \Pi'}{\partial u_l} \right\}^e = \sum_k k_{lk} u_k - R_l \qquad (l = i,j,m \quad k = i,j,m) \tag{9-35}$$

式(9－35)的矩阵形式为

$$\left\{ \frac{\partial \Pi'}{\partial u} \right\}^e = [k]^e \{u\}^e - \{R\}^e \tag{9-36}$$

把各个矩阵展开,得

$$\begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\partial \Pi'}{\partial u_i} \right)^e \\ \left(\dfrac{\partial \Pi'}{\partial u_j} \right)^e \\ \left(\dfrac{\partial \Pi'}{\partial u_m} \right)^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_m \end{Bmatrix} \tag{9-37}$$

矩阵 $[k]^e$ 和矢量 $[R]^e$ 中各个元素的具体形式如下。

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \frac{\beta}{4A}(b_i^2 + c_i^2) \qquad k_{ij} = k_{ji} = \frac{\beta}{4A}(b_i b_j + c_i c_j) \qquad R_i = \frac{fA}{3} \\ k_{jj} &= \frac{\beta}{4A}(b_i^2 + c_i^2) \qquad k_{jm} = k_{mj} = \frac{\beta}{4A}(b_j b_m + c_j c_m) \qquad R_j = \frac{fA}{3} \\ k_{mm} &= \frac{\beta}{4A}(b_m^2 + c_m^2) \quad k_{mi} = k_{im} = \frac{\beta}{4A}(b_m b_i + c_m c_i) \qquad R_m = \frac{fA}{3} \end{aligned} \tag{9-38}$$

2. 线积分表达式

如果单元 e 的某条边(设为 jm 边)为非齐次诺依曼边界条件,在能量泛函中式(9－32)不为零,这时可以对 jm 上的势函数进行线性插值,从而求出

$$\{\Pi''(u)\}^e = \frac{ql_i}{2}u_j + \frac{ql_i}{2}u_m \tag{9-39}$$

式中:l_i 为点 m 到点 j 的距离,$l_i = \sqrt{(x_m - x_j)^2 + (y_m - y_j)^2}$。

式(9－39)的矩阵形式为

$$\left\{ \frac{\partial \Pi''}{\partial u} \right\}^e = \begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\partial \Pi''}{\partial u_i} \right)^e \\ \left(\dfrac{\partial \Pi''}{\partial u_j} \right)^e \\ \left(\dfrac{\partial \Pi''}{\partial u_j} \right)^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{ql_i}{2} \\ \dfrac{ql_i}{2} \end{Bmatrix} \tag{9-40}$$

将式(9－36)、式(9－37)、式(9－40)代入式(9－30),得

$$\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial u}\right\}^e = \left\{\frac{\partial \Pi'}{\partial u}\right\}^e + \left\{\frac{\partial \Pi''}{\partial u}\right\}^e = [k]^e\{u\}^e - \{R'\}^e \tag{9-41}$$

式中:矩阵$[k]^e$的元素计算公式与式(9－38)相同,矢量$\{R'\}^e$各元素的计算公式为

$$\begin{cases} R'_i = \dfrac{fA}{3} \\ R'_j = \dfrac{fA}{3} - \dfrac{ql_i}{2} \\ R'_m = \dfrac{fA}{3} - \dfrac{ql_i}{2} \end{cases} \tag{9-42}$$

如果单元的边不在非齐次诺依曼边界上,则各元素应使用式(9－38)计算矢量$\{R\}^e$。

9.4.3 总刚集成

单元分析之后,将求解区域内所有单元的能量函数叠加,则得到整个求解区域的能量函数。根据多元函数求极值的原则,当能量函数对各节点势函数的一阶偏导数为零时,能量函数达到极值。根据这一条件就可列出各节点势函数的线性代数方程组。

将式(9－29)对势函数求一阶偏导数,得

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = \sum_{e=1}^{N}\left[\frac{\partial \Pi}{\partial u}\right]^e$$

令上式为零,并代入式(9－36),就可得到当能量函数达到极值时,势函数必须满足的矩阵方程,从而得到问题的总体方程

$$[K]\{u\} = \{R\} \tag{9-43}$$

式中:$[K]$为系数矩阵;$\{u\}$为待求的势函数列矢量;$\{R\}$为已知列矢量。

9.4.4 载荷移置

通过总刚集成形成了有限元方程$[K]\{q\} = \{R\}$,其中列阵$\{R\}$的元素为节点载荷,是集中力。但载荷除了集中力外,还有面力和体力,即使是集中力也不一定作用在节点上,因此需要将各种载荷转换为节点载荷。

按照第2章阐述的方法进行载荷移置,即可得到结构的节点载荷列阵$\{R\}$。

9.4.5 边界条件处理

条件变分问题式(9－24)离散化后,可以归结为以下线性代数方程组的求解

$$\begin{cases} [K]\{u\} = \{R\} \\ \Gamma_1: \quad u = u_0 \end{cases} \tag{9-44}$$

这是一个带有约束条件的方程组求解问题,求解时一般可以先把强加边界条件Γ_1综合考虑到方程组中,然后再对方程组进行求解。现在假设节点i处于第1类边界上,它的势函数值已知为

$$u_i = u_{i0} \tag{9-45}$$

此时，式(9－43)的第 i 个方程就可以写成式(9－45)。在其他方程式中，凡是含有 u_i 项的，因为它是已知的，都可以移到方程式的右端，则式(9－43)中的有关元素应作如下处理

$$\begin{cases} R_l = \begin{cases} u_{i0} & (l = i) \\ R_l - k_{li} u_{i0} & (l \neq i) \end{cases} \\ k_{lk} = \begin{cases} 1 & (l = k = i) \\ (l \neq k, \text{但 } l = i \text{ 或 } k = i) \end{cases} \end{cases} \tag{9-46}$$

如果第 1 类边界上的节点数不止一个，则应依次对每个节点采用相同的方法处理矩阵[K]和矢量{R}中的有关元素。经过处理后，方程组式(9－43)的阶数不变，但强加边界条件已经考虑进去了。

9.4.6 求解线性方程组

对式(9－44)进行边界条件处理后，即可采用常用的数值计算方法求出该线性代数方程组的解，得到各节点的势函数近似值，进而求出工程中比较关心的参数，如电场强度、磁通密度、电磁能量损耗、磁场强度、磁感应强度等。

第10章　非线性问题有限元法

10.1　引　言

前几章讨论的问题都是基于线弹性和小变形假设,因此应力和位移、应力和应变之间都是线性关系,平衡方程也是线性的。但是在工程实践中,人们面临着越来越多的非线性力学问题,这些问题可以分成两大类:第1类是材料非线性问题,例如在结构的形状突然变化的部位(如缺口)存在应力集中,当外载荷达到一定数值时,该部位首先进入塑性,这时该部位的应力应变不再满足线弹性关系;第2类是几何非线性问题,例如金属塑性成形和橡胶等超弹性材料的大变形、大应变阶段,基于小变形假设建立的应力应变关系不再成立。

板、壳等薄壁结构在一定载荷作用下,尽管应变很小(甚至未超过弹性极限),但是位移较大,这时必须考虑变形对平衡的影响,即平衡条件应该建立在变形后的状态上,同时应变表达式也应包括位移的二次项。因此,平衡方程和几何关系都是非线性的。这种由于大位移引起的非线性问题包括了几何和材料非线性问题。这类问题的处理方法,在很多方面与前面介绍的材料非线性问题相似。不同的是,由于几何非线性效应,小变形情况的几何方程平衡条件不再适用,应变和应力的度量以及平衡方程都有不同的表述形式。由于篇幅有限,本章不再介绍这类非线性问题的有限元法,有兴趣的读者可以参阅本书的参考文献。

无论是材料非线性问题还是几何非线性问题,经过有限元离散,最后都归结为求解非线性方程组,所以本章首先介绍非线性方程组的数值解法。在材料非线性问题的有限元法中,主要通过弹塑性小变形问题获得该类问题的非线性的本构方程,并介绍其通过增量法求解的一半步骤;在几何非线性问题的有限元法中,主要阐述了两种大变形条件下几何非线性问题的有限元格式。

10.2　非线性方程组的数值解法

非线性问题经过有限元离散之后,得到一个非线性代数方程组

$$[K]\{q\} = \{R\}$$

或

$$\Psi \equiv \{P\} - \{R\} \equiv [K]\{q\} - \{R\} = 0 \tag{10-1}$$

式中:$\{q\}$为未知函数的近似解;$\{R\}$为已知矢量;$\{P\}$是$\{q\}$的一个矢量函数;$[K]$是一个$N\times N$的矩阵,其元素是$\{q\}$的函数,这是与线性代数方程组的区别。

在以位移为未知量的有限元法中,$\{q\}$代表节点位移矢量,$\{P\}$是内力的等效节点力

矢量,$\{R\}$是载荷的等效节点力矢量。

线性方程组可以方便地直接求解,而非线性方程组则不行。下面简单介绍有限元法中几种非线性方程组的数值解法。

10.2.1 直接迭代法

直接迭代法是求解非线性方程组最简单的一种方法。对于方程

$$[K(q)]\{q\} = \{R\}$$

设其初始试探解为$\{q\} = \{q\}^0$,代入$[K(q)]$中可以得到一个近似矩阵$[K]^0 = [K(q^0)]$,由式(10-1)得到一个改进的近似解$\{q\}^1 = ([K]^0)^{-1}\{R\}$。其中$\{q\}^0$可以通过求解线弹性问题得到。

重复上述过程,当误差的某种范数小于规定的容许值e_r时,即可终止迭代。

由第n次近似解求第$(n+1)$次近似解的公式为

$$\begin{cases}[K]^n = [K(q^n)] \\ \{q\}^{n+1} = ([K]^n)^{-1}\{R\}\end{cases} \tag{10-2}$$

终止迭代的条件为

$$\| e \| = \| q^n - q^{n-1} \| \leqslant e_r \tag{10-3}$$

10.2.2 牛顿法

设$\{q\} = \{q\}^n$是方程式(10-1)的第n次近似解,此时式(10-1)一般是不能精确满足的,即

$$\Psi \equiv \{P\} - \{R\} \equiv [K]\{q\} - \{R\} \neq 0 \tag{10-4}$$

为求得方程式(10-1)的更精确的近似解,设修正值为$\{\Delta q\}^n$,此时新的近似解为

$$\{q\} = \{q\}^{n+1} = \{q\}^n + \{\Delta q\}^n \tag{10-5}$$

将式(10-5)代入式(10-1),并在$\{q\} = \{q\}^n$附近作泰勒展开,且仅保留其中的线性项,得

$$\Psi(q^{n+1}) \equiv \Psi(q^n) + \frac{\mathrm{d}\Psi(q^n)}{\mathrm{d}q}\{\Delta q\}^n = 0 \tag{10-6}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}q} \equiv \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}q} \equiv [K_T(q)]$$

称矩阵$[K_T(q)]$为切线矩阵。

由式(10-6)求出

$$\{\Delta q\}^n = -([K_T]^n)^{-1}\Psi^n = -([K_T]^n)^{-1}(\{P\}^n - \{R\}) \tag{10-7}$$

式中

$$[K_T]^n = [K_T(q^n)],\ \{P\}^n = \{P(q^n)\},\Psi^n = \Psi(q^n)$$

由于泰勒展开式仅取了线性项,所以由式(10-5)和式(10-7)得到的$\{q\}^{n+1}$仍是近似解,应重复上述过程直到满足收敛条件。牛顿法的迭代公式为

$$
\begin{cases}
\{\Delta q\}^n = -([K_T]^n)^{-1}\Psi^n = -([K_T]^n)^{-1}([P]^n - \{R\}) \\
[K_T]^n = \dfrac{\mathrm{d}\Psi^n}{\mathrm{d}q} = \dfrac{\mathrm{d}p^n}{\mathrm{d}q} \\
\{q\}^{n+1} = \{q\}^n + \{\Delta q\}^n
\end{cases}
\tag{10-8}
$$

10.2.3 修正的牛顿法

由牛顿法迭代公式(10 - 8)可知，迭代过程的每一步都必须重新计算$[K_T]^n$和$([K_T]^n)^{-1}$。为减小计算量，$[K_T]^n$可以总是采用它的初始值，即令

$$
[K_T]^n = [K_T]^0 \tag{10-9}
$$

而式(10 - 7)就修正为

$$
\{\Delta q\}^n = -([K_T]^0)^{-1}(\{P\}^n - \{R\}) = -([K_T]^0)^{-1}\Psi(q^n) \tag{10-10}
$$

其他步骤与牛顿法相同。这种方法叫修正的牛顿法。

修正的牛顿法花费的计算时间较少，但收敛速度也降低了。为了提高收敛速度，可以在经过 m 次计算之后重新计算一个$[K_T]$，即令

$$
([K_T]^n) = [K_T]^j = [K_T(q^j)] \qquad (j = m, 2m, \cdots) \tag{10-11}
$$

通过式(10 - 2)、式(10 - 10)和式(10 - 11)可看出，每次迭代需要计算和形成新的系数矩阵$[K](q)$或$[K_T](q)$并对其求逆，因此$[K](q)$可显式表达为 q 的函数，所以直接迭代法、牛顿法以及修正牛顿法只适用于与变形历史无关的非线性问题，对于应力依赖变形历史的非线性问题，需采用增量法求解。

10.2.4 增量法

在实际问题中，设$\{q\}$代表结构位移，$\{R\}$代表结构载荷，初始状态时它们都为零。这种以问题的初值开始，随着矢量$\{R\}$按增量形式逐步增大来研究$\{q\}$的性质，称为增量法，其优点是可以得到加载过程中的中间数值结果。当问题的性质与加载历史有关时，例如弹塑性问题，则必须采用增量方法。为了说明增量方法，可令$\{R\} = \lambda\{\bar{R}\}$，将式(10 - 1)改写成如下形式

$$
\Psi(q, \lambda) = \{P(q)\} - \lambda\{\bar{R}\} = 0 \tag{10-12}
$$

式中：λ 是用来描述载荷变化的参数，称为载荷因子。

设已知 $\lambda = \lambda_0 = 0$ 时的解为$\{q\}$，$\{q + \Delta q\}$ 是对应$(\lambda + \Delta\lambda)$的解，$\Delta\lambda$ 是 λ 的一个增量，有

$$
\Psi(q, \lambda) = \Psi(q + \Delta q, \lambda + \Delta\lambda) = 0
$$

对上式进行泰勒展开，并代入式(10 - 12)，有

$$
\begin{aligned}
\Psi(q + \Delta q, \lambda + \Delta\lambda) &= \Psi(q, \lambda) + \frac{\partial\Psi}{\partial q}\{\Delta q\} + \frac{\partial\Psi}{\partial q}\Delta\lambda + \cdots \\
&= 0 + [K_T]\{\Delta q\} - \{\bar{R}\}\Delta\lambda + \cdots = 0
\end{aligned}
\tag{10-13}
$$

略去高阶项，得

$$
[K_T]\{\Delta q\} - \Delta\lambda\{\bar{R}\} = 0
$$

对上式求解，不失一般性，有

$$\begin{cases}\{\Delta q\}_m = [K_T]^{-1}\{\bar{R}\}\Delta\lambda_m = [K_T]^{-1}\{\Delta R\}_m \\ \{q\}_{m+1} = \{q\}_m + \{\Delta q\}_m\end{cases} \tag{10-14}$$

式中

$$\Delta\lambda = \lambda_{m+1} - \lambda_m \qquad (0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1)$$

$$\sum_{k=0}^{N}\Delta\lambda_k = 1$$

$$\{\Delta R\}_m = \{R\}_{m+1} - \{R\}_m = \Delta\lambda_m\{\bar{R}\}$$

当 $\Delta\lambda_m$ 取得足够小时，可认为式(10－14)得到的解是收敛的。下面介绍两种改进增量法的求解精度的方法。

1. 自修正法

在推导式(10－13)时假定了 q_m 是问题的解，即 $\Psi(q_m,\lambda_m)=0$，但实际上 q_m 一般不是精确解，即 $\Psi(q_m,\lambda_m)\neq 0$，故式(10－12)式中应保留 $\Psi(q_m,\lambda_m)$，得到的改进解为

$$\begin{cases}\{\Delta q\}_m = [K_T]^{-1}[\{\bar{R}\}\Delta\lambda_m - \Psi(q_m,\lambda_m)] = [K_T]^{-1}\{\{\bar{R}\}\lambda_{m+1} - [P]\} \\ \{q\}_{m+1} = \{q\}_m + \{\Delta q\}_m\end{cases} \tag{10-15}$$

2. 混合法

这种方法是把式(10－3)得到的解作为试探解，将牛顿法用于每一增量内进行迭代。若用牛顿法对于 λ 的 $(m+1)$ 次增量步的第 $(n+1)$ 次迭代的近似解为

$$\{q^{n+1}\}_{m+1} = \{q^n\}_{m+1} + \{\Delta q^n\}_{m+1} \tag{10-16}$$

将式(10－16)代入式(10－12)，得

$$\begin{aligned}\Psi_{m+1}^{n+1} &\equiv [P(q_{m+1}^{n+1})] - \lambda_{m+1}\{\bar{R}\} \\ &= [P(q_{m+1}^{n})] + [K_T^n]_{m+1}\{\Delta q^n\}_{m+1} - (\lambda_m + \Delta\lambda_m)\{\bar{R}\} \\ &= 0\end{aligned}$$

从而 $$\{\Delta q^n\}_{m+1} = [K_T^n]_{m+1}^{-1}\{\lambda_{m+1}\{\bar{R}\} - [P_T(q_{m+1}^n)]\}$$

为减小计算量可采用修正的牛顿法，则式(10－16)中 $[K_T{}^n]_{m+1} = [K_T{}^0]_{m+1} = [K_T(q_m)]$，如果在每个步长中只迭代一次，则

$$\{\Delta q^n\}_{m+1} = \{\Delta q^n\}_{m+1} = [K_T]_m^{-1}[\{\bar{R}\}\Delta\lambda_m - \Psi_m] \tag{10-17}$$

式(10－17)即为式(10－15)的自修正算法。

10.3 材料非线性问题增量法基本方程和求解过程

10.3.1 材料非线性问题增量法基本方程

在材料非线性问题中，最常见的是弹塑性问题，本节以弹塑性小变形问题为例，介绍材料非线性问题的有限元法，对黏塑性问题和蠕变问题感兴趣的读者可以参考其他文献。

小变形问题的几何方程、平衡条件和弹性材料的本构方程在第2章中已有介绍，这里

不再赘述，本节的重点是介绍关于本构方程方面的知识。本构关系是建立在实验观察和公理体系上的对物理现象的数学描述，本构方程描述的是质点的作用和变形历史及温度历史之间的关系。

弹塑性材料的单轴拉伸实验曲线一般可以分成3个阶段，如图10-1(a)所示。当应力低于屈服应力 σ_s 时，应力应变呈线性关系，而当应力超过 σ_s 后，应力与应变不再是线性关系，而且在卸载后仅恢复了部分变形，另一部分成为不可恢复的永久变形，即塑性变形。因此应力应变的关系不再像非线性弹性那样是单值对应的，而与历史变形有关。

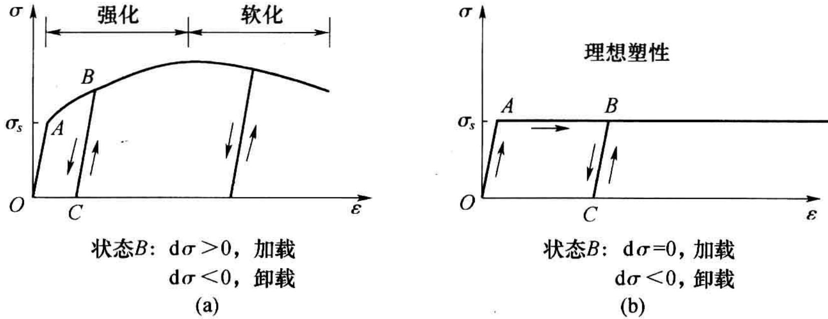


图10-1　单轴拉伸应力应变曲线

当试件的应力超过了 σ_s，例如到达 B 点时，如果将外部载荷卸去再重新加载，材料将在达到 B 点之后才开始出现新的塑性变形，即屈服应力增大了，这种现象叫强化。随着塑性变形的发展屈服应力降低的叫软化，而随着塑性变形的发展屈服应力保持常数的称为理想塑性，如图10-1(b)所示。

由于弹塑性材料的应力应变关系与变形历史有关，本构方程应以增量形式建立。为了将单轴应力状态下建立的基本概念推广到一般应力状态，本节先简要介绍塑性力学中增量理论的基本原则。

1. 初始屈服条件

事实证明，当材料发生屈服进入塑性状态时，应满足方程

$$F = F(\sigma, \sigma^p, \kappa) = 0 \tag{10-18}$$

式中：σ 表示应力张量；σ^p 是塑性应力张量；κ 可以是塑性功、塑性体应变或等效塑性应变；F 可以看做是应力空间的一个超曲面，称为屈服面。在初始状态，有

$$F = F^0(\sigma) = 0 \tag{10-19}$$

对于金属材料，在有限元分析中通常采用米赛斯(V. Mises)屈服条件，此时后继屈服函数为

$$F^0(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} - \frac{\sigma_{s0}^2}{3} = 0 \tag{10-20}$$

式中：σ_{s0}是材料的初始屈服应力；$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \sigma_{ij}$，是应力张量分量；$\sigma_m = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$，是平均正应力；$\delta_{ij}$是克罗内克尔符号(Kronecker dalta)，其定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

并有以下关系

$$\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{\bar{\sigma}^2}{3} = J_2 \quad (10-21)$$

式中：$\bar{\sigma}$是等效应力；J_2 是第 2 应力不变量。

米赛斯屈服条件可以用主应力表示为

$$F^0(\sigma_{ij}) = \frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2] - \frac{1}{3}\sigma_{s0}^2 = 0 \quad (10-22)$$

2. 加载－卸载法则

该法则可以从塑性状态出发是继续塑性加载还是弹性卸载，从而决定计算过程中应采用弹性还是塑性本构关系。加载－卸载准则的表述如下：

(1) $\frac{\partial f}{\partial \sigma}\mathrm{d}\sigma > 0$，则继续塑性加载，即材料发生应力增量 $\mathrm{d}\sigma$ 时有新的塑性变形增量 $\mathrm{d}\varepsilon^P$ 出现。

(2) $\frac{\partial f}{\partial \sigma}\mathrm{d}\sigma < 0$，由塑性卸载，即 $\mathrm{d}\varepsilon^P = 0$。

(3) $\frac{\partial f}{\partial \sigma}\mathrm{d}\sigma = 0$，此时若为理想塑性材料，则是塑性卸载；若为强化塑性材料，则是中性卸载，即仍保持塑性状态，但 $\mathrm{d}\varepsilon^p = 0$。

3. 流动法则

理论和实验证明，塑性应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon^p$ 可由下式导出

$$\mathrm{d}\varepsilon^p = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (10-23)$$

式中：$\mathrm{d}\varepsilon^P$是塑性应变增量；$\mathrm{d}\lambda$ 是一个非负的尺度参数，加载时 $\mathrm{d}\lambda > 0$，其他 $\mathrm{d}\lambda = 0$。

由微分学可知，$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$定义的矢量正是屈服面的法线方向，因而塑性应变增量矢量与屈服面正交，故(10－23)也称正交法则。

4. 强化法则

对理想弹塑性材料，因为强化效应，有

$$F(\sigma, \sigma^p, \kappa) = F^0(\sigma) = 0 \quad (10-24)$$

对一般弹塑性材料，有以下几种强化法则。

(1) 各向同性强化法则　即材料进入塑性变形后，屈服面在各方向均匀扩大，而其形状、中心位置均保持不变，此时后屈服面为

$$\begin{cases} F(\sigma_{ij,k}) = f - k = 0 \\ f = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} \quad k = \frac{1}{3}\sigma_s^2(\bar{\varepsilon}^p) \end{cases} \quad (10-25)$$

式中：σ_s 是现时的后继屈服应力，它是等效塑性应变$\bar{\varepsilon}^p$ 的函数

$$\bar{\varepsilon}^p = \int \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p = \int\left(\frac{2}{3}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p\right)^{\frac{1}{2}} \quad (10-26)$$

$\sigma_s(\bar{\varepsilon}^p)$可以由材料的单轴拉伸实验 $\sigma-\varepsilon$ 曲线得到，定义

$$E^p=\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p} \tag{10-27}$$

称 E^p 为材料塑性模量，又称硬化系数。它和弹性模量 E 以及切线模量 $E^t=\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon$ 的关系是

$$E^p=\frac{EE^t}{E-E^t} \tag{10-28}$$

（2）流动强化法则　即材料进入塑性状态后，屈服面的大小和形状不变，而是在应力空间中做刚体运动，后继屈服面可表示

$$F(\sigma_{ij},\alpha_{ij})=0 \tag{10-29}$$

式中：α_{ij}是加载曲面的中心在应力空间的移动张量，与材料强化特性以及变形历史有关。

（3）混和强化法则　对于大多数材料，硬化规律介于各向同性强化和流动强化之间，即混和强化。

5. 本构方程

在一个无限小的应力增量 $\mathrm{d}\sigma$ 作用下，产生的应变增量可假设为弹性应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon^e$ 和塑性应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon^p$ 之和，即

$$\mathrm{d}\varepsilon=\mathrm{d}\varepsilon^e+\mathrm{d}\varepsilon^p \tag{10-30}$$

式中：弹性应变增量 $\mathrm{d}\sigma$ 与应力增量 $\mathrm{d}\varepsilon^e$ 满足胡克定律

$$\mathrm{d}\sigma=[D]^e\mathrm{d}\varepsilon^e$$

将式(10-23)和式(10-30)代入上式，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma&=[D]^e\mathrm{d}\varepsilon^e=[D]^e(\mathrm{d}\varepsilon-\mathrm{d}\varepsilon^p)\\&=[D]^e\mathrm{d}\varepsilon-[D]^e\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma}\end{aligned} \tag{10-31}$$

式中：弹性矩阵$[D]^e$ 的元素为

$$D_{ijkl}^e=2G\left(\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{\mu}{1-2\mu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)$$

式中：G 是材料的剪切模量；μ 是泊松比。

根据材料所服从的强化法则得到相应的后继屈服函数，就可以由式(10-23)、式(10-26)、式(10-28)等式推导出 $\mathrm{d}\lambda$，限于篇幅此处略去推导过程，直接给出表达式

$$\mathrm{d}\lambda=\frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{\mathrm{T}}[D]^e\mathrm{d}\varepsilon}{\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{\mathrm{T}}[D]^e\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}+\frac{4}{9}\sigma_s^2E^p} \tag{10-32}$$

从而由式(10-31)得到塑性矩阵$[D]^p$

$$[D]^p=\frac{[D]^e\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{\mathrm{T}}[D]^e}{\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{\mathrm{T}}[D]^e\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}+\frac{4}{9}\sigma_s^2E^p} \tag{10-33}$$

下面给出各向同性材料的几种常见问题的塑性矩阵表达式。

对于三维空间问题，弹性矩阵和塑性矩阵表达式分别为

$$[D]^e = \frac{E}{1+\mu}\begin{bmatrix} \frac{1-\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{1-\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对} & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & \text{称} & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10-34)$$

$$[D]^p = \frac{9G^2}{\sigma_s^2(3G+E^p)}\begin{bmatrix} s_x^2 & s_x s_y & s_x s_z & s_x\tau_{xy} & s_x\tau_{yz} & s_x\tau_{zx} \\ & s_y^2 & s_y s_z & s_y\tau_{xy} & s_y\tau_{yz} & s_y\tau_{zx} \\ & & s_z^2 & s_z\tau_{zx} & s_z\tau_{zx} & s_z\tau_{zx} \\ & \text{对} & & \tau_{xy}^2 & \tau_{xy}\tau_{yz} & \tau_{yz}\tau_{zx} \\ & & \text{称} & & \tau_{yz}^2 & \tau_{yz}\tau_{zx} \\ & & & & & \tau_{zx}^2 \end{bmatrix} \quad (10-35)$$

式中

$$s_i = \sigma_i - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (i = x,y,z)$$

$$[D]^{\mathrm{T}} = [D]^e - [D]^p \quad (10-36)$$

对轴对称问题和平面应变问题中，把式(10－34)和式(10－35)的最后两行和最后两列划去，就可以得到 $[D]^e$ 和$[D]^p$。需要注意的是，对于轴对称问题，$[D]^p$ 中各个应力偏量的下标 x,y,z 应分别替换成 r,z,θ，可得其弹性矩阵和塑性矩阵。

在平面应力问题中，弹性矩阵和塑性矩阵表达式分别为

$$[D]^e = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10-37)$$

$$[D]^p = \frac{E}{B(1-\mu^2)}\begin{bmatrix} (s_x+\mu s_y)^2 & (s_x+\mu s_y)(s_y+\mu s_x) & (1-\nu)(s_x+\mu s_y)\tau_{xy} \\ \text{对} & (s_y+\mu s_x)^2 & (1-\nu)(s_y+\mu s_x)\tau_{xy} \\ & \text{称} & (1-\mu)^2\tau_{xy}^2 \end{bmatrix}$$

(10－38)

对处于弹塑性过渡区的单元，只用弹性矩阵和塑性矩阵都会产生较大的误差，所以要用另外的弹塑性矩阵进行计算。在作用了载荷增量之后，产生应变增量 $\Delta\varepsilon$，如果载荷增量充分小，则应变增量可以近似写为

$$\Delta\sigma = \{[D]^e - (1-m)[D]^p\}\Delta\varepsilon = \{m[D]^e + (1-m)[D]^{\mathrm{T}}\}\Delta\varepsilon \tag{10-39}$$

$$m = \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_e}{\Delta\bar{\varepsilon}} \tag{10-40}$$

式中:m 是表示单元的弹性应变在总应变种所占的比例;$\Delta\bar{\varepsilon}_e$ 是单元达到屈服所需的等效应变增量;$\Delta\bar{\varepsilon}$是与单元总应变增量相对应的等效应变。令

$$[\bar{D}]^{\mathrm{T}} = m[D]^e + (1-m)[D]^{\mathrm{T}}$$

式中:$[\bar{D}]^{\mathrm{T}}$ 为弹塑性过渡区单元的弹塑性矩阵。

10.3.2 材料非线性问题增量法求解步骤

基于增量形式虚位移原理有限元表达格式的建立步骤和一般全量形式的完全相同。使用增量载荷法求解时,只要增量取的足够小,一般都能得到合理的收敛的解。当计算与加载历史有关的问题,比如考虑反复加载、卸载的弹塑性问题,只能用增量载荷法来模拟加载的历史。下面给出用增量载荷法分析弹塑性问题的基本步骤。

(1) 按结构已施加全载荷 R 进行线弹性计算。

(2) 计算各单元的等效应力$\bar{\sigma}$,并取其最大值$\bar{\sigma}_{\max}$与 σ_s 比较:

若$\bar{\sigma}_{\max} \leq \sigma_s$,则弹性计算的结果就是问题的解;

若$\bar{\sigma}_{\max} > \sigma_s$,则令 $p = \sigma_s / \bar{\sigma}_{\max}$,将 pR 作为线性载荷进行线弹性计算,得到的位移、应变、应力就是进入塑性之前的最大载荷的线弹性解。

(3) 载荷 R 从 pR 分 N 次加载至 F,即 $R^0 = pR, R^{\Delta t}, R^{2\Delta t}, \cdots, R^{N\Delta t} = R$,每次加载的载荷增量可以相等也可以不等。

(4) 施加载荷增量 $\Delta R = R^{n\Delta t} - R^{(n-1)\Delta t} (n = 1, 2, \cdots, N)$,对过渡区单元,根据式(10-40)由线性解求出 m 值。

(5) 求出单元的弹塑性矩阵,计算单元的切线刚度矩阵

$$[K]_c^e = \int_{Ve} [B]^{\mathrm{T}} [D]^c [B] \mathrm{d}V \quad \text{弹性区}$$

$$[K]_p^e = \int_{Ve} [B]^{\mathrm{T}} [D]^p [B] \mathrm{d}V \quad \text{塑性区}$$

$$[K]_p^e = \int_{Ve} [B]^{\mathrm{T}} [\bar{D}]^{\mathrm{T}} [B] \mathrm{d}V \quad \text{过渡区}$$

然后组合整体刚度矩阵。

(6) 求解线性方程组得到位移增量,进而求出单元的应变增量和等效应变增量,并依此修改 m 值,重复此过程直到 m 值稳定。

(7) 计算应力增量,并把位移、应变和应力的增量与前次结果叠加,直至加到全部载荷。

在第(4)步~第(7)步的计算过程中,可以使用自修正法或混合法,以改进求解精度。

10.4 几何非线性问题的增量法有限元表达格式

10.3 讨论的材料非线性问题是基于小变形假设的,即假定物体所发生的位移小于物

体本身的几何尺度，在此假设下，建立物体或微元体的平衡方程时可不考虑物体的位置和形状的变化。但是在有些情况下，物体在外力作用下的应变虽然很小，甚至小于材料的弹性极限，但是位移较大，材料的线元素有较大的转角，此时必须考虑变形对平衡的影响。在这种情况下，材料的平衡方程应该建立在变形后的物体位置和形状上，同时应变表达式也应该包含位移的二次项，此时平衡方程和几何关系都是非线性的，这种问题就是几何非线性问题。工程中薄壳的过屈曲问题、金属成形问题都属于几何非线性的范畴。本节将阐述几何非线性问题的有限元法。

在几何非线性问题的有限元法中，大都采用增量法进行求解。主要有两种有限元表达格式，一是完全的拉格朗日（Total Lagrange，TL）格式，在该格式中所有静力学和运动学变量都参考物体初始的位置和变形，即在分析过程中各种参考位置和形状保持不变；二是修正的拉格朗日（Update Lagrange，UL）格式，在该格式中所有静力学和运动学变量都参考每一载荷或时间步长开始时的物体位置和形状，也就是说分析过程中的参考位置和形状是不断被更新的。下面将详细阐述这两种方法，其中涉及到的格林应变、可基霍夫应力等概念参考相关书籍。

对于几何非线性有限元问题，初始物体中的单元形状由单元的节点坐标插值得到：

$$\boldsymbol{X} = \sum_{k=1}^{n} N_k(\xi,\eta,\zeta)\boldsymbol{X}_k \tag{10-41}$$

式中：$\boldsymbol{X}=\{X_1,X_2,X_3\}^{\mathrm{T}}$ 为物体上任意一点的坐标矢量；$\boldsymbol{X}_k$ 是第 k 个节点的坐标；$N_i(\xi,\eta,\zeta)$ 是定义在等参单元上的插值形函数，其形式与线性单元的插值形函数相同。

因此单元中任意一点的位移可表示为

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{n} N_k(\xi,\eta,\zeta)\boldsymbol{u}_k \tag{10-42}$$

式中：$\boldsymbol{u}=\{u_1,u_2,u_3\}^{\mathrm{T}}$ 为物体上任意一点的位移；$\boldsymbol{u}_k$ 是第 k 个节点对应的物体上点的位移。以上两式可统一写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{X}^e \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{d}^e$$

式中：$\boldsymbol{X}^e=\{\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$ 为单元节点坐标矢量，n 为单元节点数；$\boldsymbol{d}^e$ 为节点位移矢量。

10.4.1 完全拉格朗日格式——TL

完全选用 $t=0$ 时刻的构形作为参考构形。在 $t=t_n$ 和 $t=t_{n+1}$ 时的格林应变可表示为

$$E_{ij}^{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k^n}{\partial X_i}\frac{\partial u_k^n}{\partial X_j}\right) \tag{10-43}$$

$$E_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k^{n+1}}{\partial X_i}\frac{\partial u_k^{n+1}}{\partial X_j}\right) \tag{10-44}$$

t_{n+1} 时刻的应变也可用 t_n 时刻的应变及其增量形式表示为

$$E_{ij}^{n+1} = E_{ij}^{n} + \Delta E_{ij}^{n} \tag{10-45}$$

式中

$$\Delta E_{ij}^{n} = (\Delta E_{ij}^{n})_{L_0} + (\Delta E_{ij}^{n})_{L_1} + (\Delta E_{ij}^{n})_{N}, \quad (\Delta E_{ij}^{n})_{L_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_i^n}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j^n}{\partial X_i}\right),$$

$$(\Delta E_{ij}^n)_{L_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k^n}{\partial X_i}\frac{\partial \Delta u_k^n}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_k^n}{\partial X_i}\frac{\partial u_k^n}{\partial X_j}\right), \quad (\Delta E_{ij}^n)_N = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta u_k^n}{\partial X_i}\frac{\partial \Delta u_k^n}{\partial X_j}。$$

同样位移也可以写成增量形式

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u_i^n \tag{10-46}$$

从式(10－44)和式(10－45)可看出，$(\Delta E_{ij}^n)_{L_0}$和$(\Delta E_{ij}^n)_{L_1}$与未知的位移增量Δu_i^n呈线性关系，是增量应变的线性部分，而$(\Delta E_{ij}^n)_N$与Δu_i^n呈非线性关系，是增量应变的非线性部分。

式(10－44)还可写成矩阵形式

$$\Delta \boldsymbol{E}^n = \Delta \boldsymbol{E}_{L_0}^n + \Delta \boldsymbol{E}_{L_1}^n + \Delta \boldsymbol{E}_N^n \tag{10-47}$$

式中

$$\Delta \boldsymbol{E}_{L_0}^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} \end{bmatrix} \cdot \Delta \boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{L} \cdot \Delta \boldsymbol{u}^n$$

$$\Delta \boldsymbol{E}_{L_1}^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial X_1} & & & & \frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial X_3} & \frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial X_2} \\ & \frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial X_2} & & \frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial X_3} & & \frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial X_1} \\ & & \frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial X_3} & \frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial X_2} & \frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial X_1} & \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \left[\boldsymbol{I}_{3\times3}\frac{\partial}{\partial X_1} \quad \boldsymbol{I}_{3\times3}\frac{\partial}{\partial X_2} \quad \boldsymbol{I}_{3\times3}\frac{\partial}{\partial X_3}\right]^{\mathrm{T}} \cdot$$

$$\Delta \boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{A}^n \cdot \boldsymbol{H} \cdot \Delta \boldsymbol{u}^n$$

$$\Delta \boldsymbol{E}_N^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \boldsymbol{u}^n}{\partial X_1} & & & & \frac{\partial \Delta \boldsymbol{u}^n}{\partial X_3} & \frac{\partial \Delta \boldsymbol{u}^n}{\partial X_2} \\ & \frac{\partial \Delta \boldsymbol{u}^n}{\partial X_2} & & \frac{\partial \Delta \boldsymbol{u}^n}{\partial X_3} & & \frac{\partial \Delta \boldsymbol{u}^n}{\partial X_1} \\ & & \frac{\partial \Delta \boldsymbol{u}^n}{\partial X_3} & \frac{\partial \Delta \boldsymbol{u}^n}{\partial X_2} & \frac{\partial \Delta \boldsymbol{u}^n}{\partial X_1} & \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \left[\boldsymbol{I}_{3\times3}\frac{\partial}{\partial X_1} \quad \boldsymbol{I}_{3\times3}\frac{\partial}{\partial X_2} \quad \boldsymbol{I}_{3\times3}\frac{\partial}{\partial X_3}\right]^{\mathrm{T}} \cdot$$

$$\Delta \boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{A}^n \cdot \boldsymbol{H} \cdot \Delta \boldsymbol{u}^n$$

由式(10－42)可得到位移增量在单元内的插值形式

$$\Delta \boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{N}(\Delta \boldsymbol{d}^n)^e \tag{10-48}$$

将式(10－48)代入式(10－47)，得

$$\Delta \boldsymbol{E}^k = \overline{\boldsymbol{B}}^k(\Delta \boldsymbol{d}^k)^e \tag{10-49}$$

$$\delta(\Delta \boldsymbol{E}^k) = \overline{\boldsymbol{B}}^k \delta(\Delta \boldsymbol{d}^k)^e \tag{10-50}$$

式(10－49)和式(10－50)中，有

$$\overline{\boldsymbol{B}}^k = \boldsymbol{B}_{L_0} + \boldsymbol{B}_{L_1}^k + \overline{\boldsymbol{B}}_N^k \quad \boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{B}_{L_0} + \boldsymbol{B}_{L_1}^k + \boldsymbol{B}_N^k$$

$$\boldsymbol{B}_{L_0} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{B}_{L_1}^k = \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{G} \quad \boldsymbol{B}_N^k = 2\overline{\boldsymbol{B}}_N^k = \Delta \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{G}$$

同样，t_{n+1}时刻的可基霍夫应力也可表示为 t_n 时刻应力与应力增量之和的形式

$$\boldsymbol{S}^{n+1} = \boldsymbol{S}^n + \Delta\boldsymbol{S}^n \tag{10-51}$$

因为 t_n 时刻的位移和应变已知，因此

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{u}^{n+1} &= \delta(\boldsymbol{u}^n + \Delta\boldsymbol{u}^n) = \delta(\Delta\boldsymbol{u}^n)\\ \delta\boldsymbol{E}^{n+1} &= \delta(\boldsymbol{E}^n + \Delta\boldsymbol{E}^n) = \delta(\Delta\boldsymbol{E}^n)\end{aligned} \tag{10-52}$$

将以式(10－51)代入由可基霍夫应变和格林应力表达的虚功方程，得

$$\int_{V_0}(\delta\boldsymbol{E}^{n+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{n+1}\mathrm{d}V_0 = (\delta(\Delta\boldsymbol{d}^n)^e)^{\mathrm{T}}\int_{V_0}(\boldsymbol{B}^n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^n + \Delta\boldsymbol{S}^n)\mathrm{d}V_0 \tag{10-53}$$

根据$(\Delta\boldsymbol{d}^n)^e$ 的任意性，可得单元体的平衡方程组。平衡方程组经过单元集成后得到系统的平衡方程

$$\psi = \int_{V_0}(\boldsymbol{B}^n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^n + \Delta\boldsymbol{S}^n)\mathrm{d}V_0 - \boldsymbol{F}^{n+1} = 0 \tag{10-54}$$

将 $\boldsymbol{B}^k$ 的表达式代入上式，得

$$\psi = \int_{V_0}(\boldsymbol{B}^n)^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{S}^n\mathrm{d}V_0 + \int_{V_0}(\boldsymbol{B}_{L_0} + \boldsymbol{B}_{L_1}^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^n\mathrm{d}V_0 + \int_{V_0}(\boldsymbol{B}_N^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^n\mathrm{d}V_0 - \boldsymbol{F}^{n+1} = 0 \tag{10-55}$$

因为

$$(\boldsymbol{B}_N^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^n = (\Delta\boldsymbol{A}^n\cdot\boldsymbol{G})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{S}^n = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\Delta\boldsymbol{A}^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^n = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{M}}^n\cdot\boldsymbol{G}\cdot\Delta\boldsymbol{d}^n$$

式中：$\hat{\boldsymbol{M}}^n$ 为 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 在 t_n 时刻的值，其中 $\hat{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} S_{11}\boldsymbol{I}_{3\times3} & S_{12}\boldsymbol{I}_{3\times3} & S_{13}\boldsymbol{I}_{3\times3}\\ S_{21}\boldsymbol{I}_{3\times3} & S_{22}\boldsymbol{I}_{3\times3} & S_{23}\boldsymbol{I}_{3\times3}\\ S_{31}\boldsymbol{I}_{3\times3} & S_{32}\boldsymbol{I}_{3\times3} & S_{33}\boldsymbol{I}_{3\times3}\end{bmatrix}$。

定义

$$\boldsymbol{K}_s^n = \int_{V_0}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{M}}^n\mathrm{d}V_0,\boldsymbol{F}_s^n = \int_{V_0}(\boldsymbol{B}_{L_0} + \boldsymbol{B}_{L_1}^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^n\mathrm{d}V_0$$

则

$$\psi(\Delta\boldsymbol{d}^n) = \int_{V_0}(\boldsymbol{B}^n)^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{S}^n\mathrm{d}V_0 + \boldsymbol{K}_s^n\Delta\boldsymbol{d}^n + \boldsymbol{F}_s^n - \boldsymbol{F}^{n+1} = 0 \tag{10-56}$$

式中：$\boldsymbol{K}_s^n$ 为初应力矩阵或几何矩阵，也称为非线性应变增量刚度矩阵；$\boldsymbol{F}_s^n$ 为 t_n 时刻的应力场对应的等效节点力矢量。

10.4.2 修正拉格朗日格式——UL

采用修正的拉格朗日格式建立非线性问题的增量有限元方程时，$[t_n, t_n + \Delta t_n]$时间段内的格林应变是相对于 t_n 时刻的状态定义的。此时

$$\Delta E_{ij}^n = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta u_i^n}{\partial X_j} + \frac{\partial\Delta u_j^n}{\partial X_i} + \frac{\partial\Delta u_k^n}{\partial X_i}\frac{\partial\Delta u_k^n}{\partial X_j}\right) = (\Delta E_{ij}^n)_L + (\Delta E_{ij}^n)_N \tag{10-57}$$

式中

$$(\Delta E_{ij}^n)_L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta u_i^n}{\partial X_j} + \frac{\partial\Delta u_j^n}{\partial X_i}\right),\quad (\Delta E_{ij}^n)_N = \frac{1}{2}\frac{\partial\Delta u_k^n}{\partial X_i}\frac{\partial\Delta u_k^n}{\partial X_j}$$

可将式(10－57)用矩阵表示为

$$\Delta \boldsymbol{E}^{n}=\Delta \boldsymbol{E}_{L}^{n}+\Delta \boldsymbol{E}_{N}^{n}=\overline{\boldsymbol{B}}^{n}(\Delta \boldsymbol{d}^{n})^{e} \quad (10-58)$$

式中

$$\Delta \boldsymbol{E}_{L}^{n}=\boldsymbol{B}_{L}(\Delta \boldsymbol{d}^{n})^{e}, \quad \Delta \boldsymbol{E}_{N}^{n}=\overline{\boldsymbol{B}}_{N}(\Delta \boldsymbol{d}^{n})^{e}, \text{其中 } \overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}_{L}+\overline{\boldsymbol{B}}_{N}, \overline{\boldsymbol{B}}_{N}=\frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{A}^{n}\cdot \boldsymbol{G}$$

对以上式求变分,得到应变增量的变分为

$$\delta(\Delta \boldsymbol{E}^{n})=\boldsymbol{B}\delta(\Delta \boldsymbol{d}^{n})^{e}=(\boldsymbol{B}_{L}+\Delta \boldsymbol{A}^{n}\cdot \boldsymbol{G})\delta(\Delta \boldsymbol{d}^{n})^{e} \quad (10-59)$$

$t=t_{n+1}$时刻以 $t=t_n$ 时刻构形以参考构形的虚功方程表达式为

$$\int_{V^n}(\delta \boldsymbol{E}^{n+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{n+1}\mathrm{d}V=\int_{V^n}\delta(\boldsymbol{u}^{n+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^{n+1}\mathrm{d}V+\int_{\Gamma_t^n}\delta(\boldsymbol{u}^{n+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}^{n+1}\mathrm{d}V \quad (10-60)$$

式中:$\boldsymbol{S}^{n+1}$,$\boldsymbol{E}^{n+1}$,$\boldsymbol{f}^{n+1}$均为 $t=t_{n+1}$时刻的可基霍夫应力、格林应变和载荷。其中 $\boldsymbol{S}^{n+1}=\boldsymbol{S}^{n}+\Delta \boldsymbol{S}^{n}=\boldsymbol{\tau}^{n}+\Delta \boldsymbol{S}^{n}$, $\boldsymbol{E}^{n+1}=\boldsymbol{E}^{n}+\Delta \boldsymbol{E}^{n}=\boldsymbol{e}^{n}+\Delta \boldsymbol{E}^{n}$,$\boldsymbol{\tau}^{n}$ 为 $t=t_n$ 时刻的欧拉应力矢量,$\boldsymbol{e}^{n}$ 为 $t=t_n$ 时刻的阿尔曼西应变矢量。

因为 $\boldsymbol{e}^{n}$ 是已知变量,所以有

$$\delta(\boldsymbol{E}^{n+1})=\delta(\Delta \boldsymbol{E}^{n})$$

根据 $\delta(\Delta \boldsymbol{d}^{n})^{e}$ 的任意性,可将单元的平衡方程组集成得到有限元离散系统的平衡方程

$$\psi(\Delta \boldsymbol{d}^{n})=\int_{V^n}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\tau}^{n}+\Delta \boldsymbol{S}^{n})\mathrm{d}V-\boldsymbol{F}^{n+1}=\boldsymbol{0} \quad (10-61)$$

求解上述方程,需要引入应力应变本构方程,虽然通过格林应变增量和克希霍夫应力增量表达的本构方程比较合适,但是该本构方程很难通过实验给出。因此可采用焦曼应力率和变形率张量描述的本构方程。关于该本构方程可参见其他参考书,在此不作详细阐述。

第 11 章　多物理场耦合问题的有限元法

前面几章分析了在单个物理场作用下，通过有限元法求解未知数的计算步骤和方法。但在实际工程中，物理现象都不是单独存在的。例如，只要运动就会产生热，而热反过来又影响一些材料属性，如电导率、化学反应速率、流体的黏性等，这种物理系统的耦合就称为多物理场。对多物理场的分析比对单物理场的分析复杂的多。常见的耦合问题有流—固耦合、电—热耦合、热—结构耦合、热—电—结构耦合、声—结构耦合、流体—反应耦合、流体—热耦合等。本章将给出多物理场耦合问题的定义和分类，并推导典型多物理场耦合问题的有限元法。

11.1　多物理场耦合问题的定义和分类

通常，当两个或两个以上的物理场相互作用，且其中的一个物理场在另外一个甚至几个物理场不同时求解的情况下无法求解的系统，称为耦合系统。因此对一个耦合系统而言，它具有以下特征：

(1) 涉及到多个物理场。

(2) 任何一个物理场的因变量都不可能单独求解。

(3) 在偏微分方程中，任何一组因变量都不能被消除。

流体动力学与结构的界面耦合就是一个工程中常见的例子。在该耦合系统中，流体动力学系统和结构系统因为无法提前预知两个系统界面的界面力而无法单独求解。从耦合系统的定义可以看出热应力问题不属于耦合问题。主要原因是因为应力求解需要已知温度场分布，而温度场的分布可以独立于应力场进行求解。

耦合系统可分为两类。第 1 类称为界面耦合系统。在该类耦合系统中，耦合只发生在的界面上。这里的界面可以是多个物理场之间的界面也可以是同一物理场中采用不同离散方法的界面。该类耦合系统在工程中的典型应用如图 11 - 1(a)所示的流 - 固界面耦合和如图 11 - 1(b) 所示的结构 - 结构系统中不同离散方法之间的界面耦合。

在同一物理场中采用不同的离散方法主要基于以下考虑：

(1) 不同的离散方法更有利于描述子域中的物理特性。

(2) 在不同子域采用不同的离散化方法，会使计算效率大大提高。

(3) 不同的子域可以采用不同的时间步程序进行计算。

第 2 类耦合系统称为域内耦合系统。在耦合系统中不同物理场所发生的区域相互重叠。在该类问题中，耦合通过描述不同物理场的微分控制方程来体现。

在第 2 类耦合系统中，典型的工程应用有金属挤压成型和土体渗流等。如图 11 - 2 (a) 所示，在金属的挤压成形过程中，塑性流动的速度取决于温度场的温度分布，而温度场的分布与塑性流动过程中的热量又密切相关。在图 11 - 2(b)所示的岩土渗流过程中，

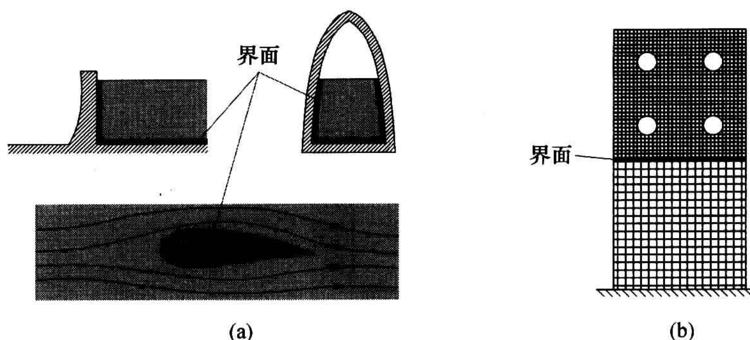


图 11-1　界面耦合系统

（a）不同物理场之间的界面耦合；（b）同一物理场不同离散方法的界面耦合。

渗流和水压力与土体的动力学特性相互作用，相互影响。

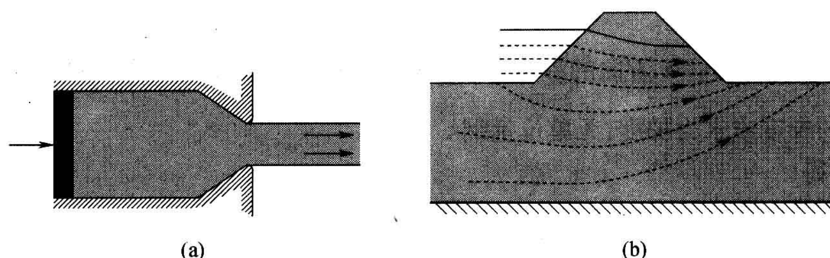


图 11-2　域内耦合系统

（a）金属挤压成形；（b）岩土渗流过程。

虽然在工程中遇到的耦合系统是千变万化的，但是其耦合机理是相同的。因此在本章接下来将分别选用流—固耦合和岩土渗流场—应力场耦合两个典型的耦合系统进行深入分析，推导这两类耦合系统有限元求解方法，其分析的过程可以扩展到其他的耦合系统中。

11.2　流体流动问题的有限元法

11.1 节中提出的两类典型的耦合系统都和流体的流动问题有关，因此在论述耦合系统的有限元求解方法之前，有必要推导多孔介质中的流动和围绕固体的流动这两种流动方式的运动方程，在此基础上推导出流体流动问题的有限元求解方法。

11.2.1　流体流动的运动方程

1. 多孔介质中的流体流动

首先考虑多孔介质流体流动中的一维问题。对于图 11-3 所示的微元体，根据质量守恒定律，有

$$\rho v_x A\mathrm{d}t + \rho Q\mathrm{d}t = \rho v_{x+\mathrm{d}x} A\mathrm{d}t \tag{11-1}$$

式中：v_x 为表面边 x 上的流体流动速度，单位 m/s；$v_{x+\mathrm{d}x}$是表面边($x+\mathrm{d}x$)上的流体流动速

度；t 为时间，单位 s；Q 为内部流体源，单位 m^3/s；ρ 为流体密度，单位 kg/m^3；A 为与流体流动方向垂直的截面积，单位 m^2。

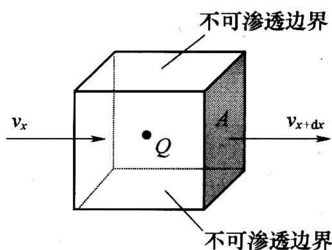


图 11－3　一维多孔介质流体流动的微元体

根据 Darcy 定律，流体流动的速度和流体梯度之间有如下关系：

$$v_x = -K_{xx}\frac{d\phi}{dx} = -K_{xx}g_x \tag{11-2}$$

式中：K_{xx} 为多孔介质在 x 方向的渗透系数，单位 m/s；ϕ 为流体的水头，单位 m；$\frac{d\phi}{dx}=g_x$ 为流体水头的梯度或水力梯度，无单位量纲。

同理，得

$$v_{x+dx} = -\left[K_{xx}\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx}\left(K_{xx}\frac{d\phi}{dx}\right)dx\right] \tag{11-3}$$

将式(11－2)和式(11－3)代入式(11－1)，得

$$\frac{d}{dx}\left(K_{xx}\frac{d\phi}{dx}\right) + \overline{Q} = 0 \tag{11-4}$$

式中：$\overline{Q}=\frac{Q}{A}dx$ 为单位体积的体积流动率，单位 1/s。

若 K_{xx} 为常数，则式(11－4)可表示为

$$K_{xx}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \overline{Q} = 0 \tag{11-5}$$

对于图 11－4 所示的多孔介质流体流动的二维问题，根据质量守恒定律，通过与一维问题相似的推导过程，可得到其运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \overline{Q} = 0 \tag{11-6}$$

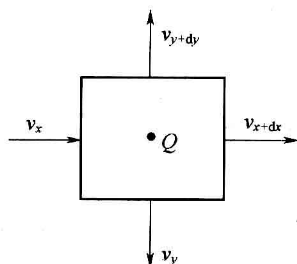


图 11－4　二维多孔介质流体流动的微元体

2. 围绕固体的流动

对于理想流体，流体的质点并不旋转，流体与固体表面没有摩擦，流体也不渗入或脱离固体，对于这种流体运动的方程可用流函数或速度势函数来表示。

流体的速度 v 和速度势函数 ϕ 的关系为

$$v_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad v_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{11-7}$$

式中：v_x、v_y 分别为流体在 x 方向和 y 方向的速度。

在无源（$Q=0$）情况下，通过质量守恒可得到二维围绕固体的流动的流体的运动方程为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \tag{11-8}$$

式(11－5)、式(11－6)和式(11－8)所表达的流体微分控制方程可有 3 类边值问题：一是给定场变量的 Dirichlet 边值问题；二是给定场变量在边界上的方向导数值的 Neumann 边值问题；三是给定场变量值和方向导数组合形式的混合边值问题。因此与式(11－5)对应的边界条件为

(1) $\phi=\phi_B$（在边界 S_1 上）

式中：ϕ_B 为已知的边界流体的水头；S_1 为水头已知的边界面。

(2) $v_x^*=K_{xx}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=$ 常数（在边界 S_2 上）

式中：S_2 为指定流动速度 v_x^* 或者水力梯度已知的边界面。

与式(11－6)和式(11－8)对应的边界条件相同，均为

(1) $\phi=\phi_B$（在边界 S_1 上）

(2) $K_{xx}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}C_x+K_{yy}\dfrac{\partial\phi}{\partial y}C_y=$ 常数（在边界 S_2 上）

式中：C_x 和 C_y 是边界 S_2 的单位法向矢量的方向余弦。

11.2.2 流体流动的有限元法求解的一般步骤

流体流动的有限元求解步骤和热问题的有限元求解步骤基本相同。在求解的过程中选用3 节点三角形单元对流体进行离散，此时该三角形单元的每个节点同样只有一个自由度——速度势，分别设为 p_i、p_j、p_m。只不过单元刚度矩阵的表达式和力矩阵的表达式与热分析中单元刚度矩阵和温度载荷表达式不同。因此本节主要讨论流体流动有限元分析中的单元刚度矩阵和力矩阵的表达式。

在流体流动问题中单元刚度矩阵的表达式仍为

$$[k]=\iiint_V[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V$$

假设单元为等厚度（t）的三角形单元，则单元刚度矩阵可表示为

$$[k]=tA[B]^{\mathrm{T}}[D][B] \tag{11-9}$$

式中：A 为单元面积；$[B]=\dfrac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_i & b_j & b_m\\ c_i & c_j & c_m\end{bmatrix}$；$[D]=\begin{bmatrix}K_{xx} & 0\\ 0 & K_{yy}\end{bmatrix}$。

进一步化简式(11－9)，得

$$[k]=\frac{tK_{xx}}{4A}\begin{bmatrix}b_i^2 & b_ib_j & b_ib_m\\ b_jb_i & b_j^2 & b_jb_m\\ b_mb_i & b_mb_j & b_m^2\end{bmatrix}+\frac{tK_{yy}}{4A}\begin{bmatrix}c_i^2 & c_ic_j & c_ic_m\\ c_jc_i & c_j^2 & c_jc_m\\ c_mc_i & c_mc_j & c_m^2\end{bmatrix} \tag{11-10}$$

在整个单元上,单位体积的等体积流动率的力矩阵为

$$[f_Q] = \iiint_V Q[N]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V = Q\iiint_V [N]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V \tag{11-11}$$

式中:矩阵[N]与式(8-10)中矩阵[N]相同。

式(11-11)可进一步简化为

$$[f_Q] = \frac{QV}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} \tag{11-12}$$

等表面流动率 q^* 的力矩阵为

$$[f_q] = \iint_{S_2} q^*[N]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}S \tag{11-13}$$

式中:矩阵[N]与式(8-10)中矩阵[N]相同。

则总的力矩阵为

$$[f] = [f_Q] + [f_q] \tag{11-14}$$

得到单元的刚度矩阵和力矩阵后,通过刚度集成和力集成,得到总刚矩阵[K]和载荷矩阵[F],考虑已知的势边界条件,修正总刚矩阵[K]和载荷矩阵[F],然后通过式(11-15)求解速度势 p。

$$[K]\{p\} = [F] \tag{11-15}$$

11.3 流—固耦合系统的有限元离散

流—固耦合系统是工程中常见的一种耦合系统。流—固耦合系统由流体区域和结构区域共同组成,其控制方程包括流体、结构各自的控制方程、对应的定解条件和边界条件。结构区域用位移场表示。流体区域分别用位移、压力、速度势等场量形式表示。

11.3.1 流—固耦合系统的控制方程和边界条件

图11-5所示的流—固耦合系统由流体区域 V_f 和结构(固体)区域 V_s 构成。结构区域的边界包括力边界位移边界和交界面;流体区域的边界为自由表面、交界面、以及狄利克莱边界和诺依曼边界。图中 $\hat{n}$ 为法向,且在 Γ_i 上 $\hat{n}_f = -\hat{n}_s$,下标 f 和 s 分别代表流体区域和结构区域。

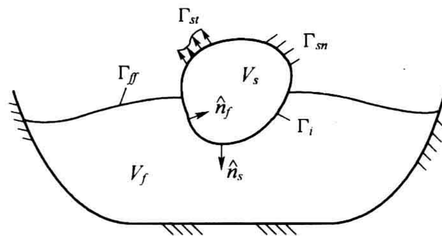


图11-5 有限区域的流固耦合系统示意图

1. 结构区域

用位移场量表示线弹性小变形结构的基本运动方程，即为 Navier 方程，其形式为

$$\mu_s \nabla^2 u_s + (\lambda_s + \mu_s) \nabla\nabla \cdot u_s + f_s = \rho \ddot{u}_s \tag{11-16}$$

式中：λ_s、μ_s 为 Lame 常数。

此时，边界条件为

$$u_s = \bar{u}_s \quad (\text{在 } \Gamma_{su} \text{ 上})$$

$$\sigma_s \cdot \hat{n} = \bar{t} \quad (\text{在 } \Gamma_{st} \text{ 上})$$

位移场的时端条件为

$$u_s(t_1) = \bar{u}_{s1} \quad u_s(t_2) = \bar{u}_{s2}$$

式中：$\bar{t}$ 为已知面力。

2. 流体区域

通常，理想流体的运动方程可由流体连续方程、动量方程和状态方程来描述。

连续方程 $$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f V_f) = 0 \tag{11-17}$$

动量方程 $$\rho_f \frac{\mathrm{D} V_f}{\mathrm{D} t} = -\nabla p_f \tag{11-18}$$

状态方程 $$p_f = p_f(\rho_f) \tag{11-19}$$

在流体受到小扰动的情况下，上述方程可简化为

连续方程 $$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \rho_f \nabla \cdot V_f = 0 \tag{11-20}$$

动量方程 $$\rho_f \frac{\partial V_f}{\partial t} = -\nabla p_f \tag{11-21}$$

状态方程 $$p_f = \frac{\partial p_f}{\partial \rho} \rho_f \tag{11-22}$$

式(11-20)~式(11-22)中，p_f、ρ_f、V_f 分别为流场的压力、密度和速度。

由式(11-20)和式(11-22)可得到压力和位移之间的关系式为

$$p_f = \rho_f c^2 \nabla \cdot \ddot{u}_f \tag{11-23}$$

式中：$c = \sqrt{\dfrac{K}{\rho_0}}$，其中 K 为体积模量；ρ_0 为静力状态下液体的密度。该式也称为本构方程。

3. 边界条件

在流—固耦合中涉及的边界条件除了边值条件外，还包括耦合物理场的物理边界条件。图 11-6 表示了流—固耦合中可能出现的 3 种物理边界条件。边界①、②为流场和结构场的交界面，边界③为自由表面，边界④为辐射边界。

(1) 交界面条件　在流体与结构的交界面上，因为流体理想且无黏性，故在交界面的切向可以有滑移，但在法向应与结构的位移协调相等。即

$$u_s \cdot \hat{n} = u_f \cdot \hat{n} \tag{11-24}$$

在非渗透壁上，没有质量流入或流出的界面。在该界面上流体的速度必然与非渗透

壁相切,此时流速的垂直分量等于零。

$$V_f \cdot \hat{n}_1 = 0 \tag{11-25}$$

式中:$\hat{n}_1$ 为非渗透壁的单位法线矢量。

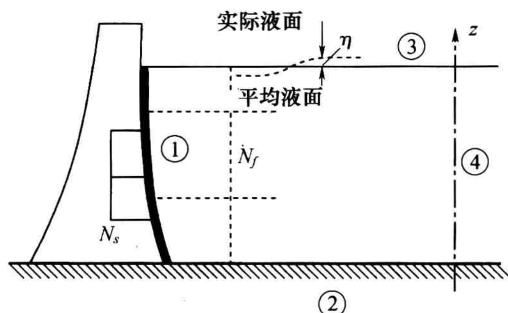


图 11-6 流—固耦合中的物理边界条件

(2) 自由表面条件 在理想流体小扰动条件下,考虑可能出现的表面重力波的作用时,自由表面的压力为一定值。

$$p = \rho_0 g \eta \tag{11-26}$$

式中:g 为重力加速度;η 的定义如图 11-6 所示。

(3) 辐射边界条件 边界④终止于无限远处,此时在流体的控制方程中只有输入波而没有输出波。因此,在边界④处,有

$$p = F(x - ct) \tag{11-27}$$

式中:F 为一沿 x 正向传播的波;c 为波的传播速度。

式(11-27)对 x 和 t 分别求导,得

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{c}\dot{p} \tag{11-28}$$

11.3.2 流—固耦合系统控制方程和变分原理

流场区域采用速度势变量,结构区域采用位移变量,根据 11.2 节的内容,可以得到结构区域和流体区域的控制方程、交界面条件以及各自区域的边界条件等。然后通过能量原理建立耦合系统的变分原理。

1. 结构区域

运动方程 $\nabla \cdot \sigma_s + f_s = \rho_s \ddot{u}_s$

边界条件 $u_s = \bar{u}_s$ (在 Γ_{su} 上)

$\sigma_s \cdot \hat{n} = \bar{t}$ (在 Γ_{st} 上)

2. 流体区域(忽略体力)

波动方程 $\nabla^2 \phi_f = \frac{1}{c^2} \cdot \ddot{\phi}_f$

边界条件 $\phi = \bar{\phi}$ (在 Γ_{f_1} 上)

$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n}$ (在 Γ_{f_2} 上)

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}+\frac{1}{g}\ddot{\phi}=0 \quad (在\Gamma_{ff}上)$$

状态方程 $$p_f=-\rho\dot{\phi}$$

交界面条件 $$u_s\cdot\hat{n}=\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \quad (在\Gamma_i 上)$$

$$\sigma_s\cdot\hat{n}=\rho_f\phi\cdot\hat{n} \quad (在\Gamma_i 上)$$

时端条件 $$u_s(t_1)=\bar{u}_{s1} \quad u_s(t_2)=\bar{u}_{s2}$$

$$\phi_f(t_1)=\bar{\phi}_{f1} \quad \phi_f(t_2)=\bar{\phi}_{f2}$$

式中：Γ_{f1}、Γ_{f2}为速度势场的狄利克莱边界条件和诺依曼边界条件。

根据不同物理场的运动方程和边界条件，从能量原理出发可得流固耦合系统的范函为

$$\begin{aligned}J(u_s,\phi_f)&=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\\&\left\{\int_{V_s}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_s\sigma_s+\frac{1}{2}\rho_s\dot{u}_s\cdot\dot{u}_s+f_su_s\right)\mathrm{d}V+\int_{V_f}\left(-\frac{1}{2}\rho_f\nabla\phi\cdot\nabla\phi+\frac{1}{2}\rho_f\dot{\phi}^2\right)\mathrm{d}V\right.\\&\left.\int_{\Gamma_{st}}\bar{t}_s\cdot u_s\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_{f2}}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n}\phi\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_{ff}}\frac{1}{2g}\rho_f\dot{\phi}^2\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_i}\rho_f\phi\dot{u}_s\cdot\hat{n}\mathrm{d}\Gamma\right\}\\&=J_s+J_f+J_{sf}\end{aligned} \tag{11-29}$$

在所有满足上述约束条件以及时端条件的速度流势场 ϕ_f 和结构位移场 u_s 所决定的耦合系统的容许运动状态中，真实运动 ϕ_f 和 u_s 使得范函 $J(u_s,\phi_f)$ 取驻值。从系统范函中可以看出，范函中除了与流体、结构区域对应的项以外，还出现了与耦合界面相关的项 J_{sf}。

11.3.3 耦合系统的离散形式

在离散单元中分别引入插值函数，即

$$[u_s]^{\mathrm{T}}=[N_s]\{\tilde{u}_s\} \quad [\phi_f]^{\mathrm{T}}=[N_f]\{\tilde{\phi}_f\} \tag{11-30}$$

式中：$\{\tilde{u}_s\}$，$\{\tilde{\phi}_f\}$为单元中各节点的位移场和速度流势场。

将单元插值函数代入到能量范函中，经过变分离散得到离散后的系统运动方程

$$\begin{bmatrix}K_s & 0\\ 0 & K_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_s\\ \phi_f\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -Q^{\mathrm{T}}\\ Q^{\mathrm{T}} & C_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{u}_s\\ \dot{\phi}_f\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}M_s & 0\\ 0 & M_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_s\\ \ddot{\phi}_f\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_s\\ F_f\end{Bmatrix} \tag{11-31}$$

耦合系统的矩阵通过对各个区域中的单元离散矩阵进行集成，其集成过程与第2章中结构的总刚矩阵的集成和载荷移置过程相同。在此不再赘述。式(11-31)中各单元矩阵和载荷矢量的计算公式如下：

结构单元矩阵

$$[K_s]=\int_{V_e}[B_s]^{\mathrm{T}}[D][B_s]\mathrm{d}V$$

$$[M_s]=\int_{V_e}\rho[N_s]^{\mathrm{T}}[N_s]\mathrm{d}V$$

$$[F_s] = \int_{V_e}[N_s]^T[f_s]dV + \int_{\Gamma_{st}}[N_s]^T([\bar{t}_s]d\Gamma$$

流体单元矩阵

$$[K_f] = \int_{V_e}\rho_f[\nabla N_f]^T[\nabla N_f]dV$$

$$[M_f] = \int_{V_e}\frac{\rho_f}{c^2}[N_f]^T[N_f]dV + \int_{\Gamma_f}\frac{\rho_f}{g}[N_f]^T[N_f]d\Gamma$$

$$[F_f] = \int_{\Gamma_e}[N_f]^T\frac{\partial[\phi_f]}{\partial n}d\Gamma$$

$$[C_f] = \int_{\Gamma_{ff}}\frac{\rho_f}{c^2}[N_f]^T[N_f]d\Gamma$$

交界面上

$$[Q_e] = \int_{\Gamma_i}\rho_f[N_f]^T[N_f]\hat{n}d\Gamma$$

从形式上看得到的方程不但不对称,而且在方程中还出现了与节点变量对事件的一次导数的相关项,相当于"阻尼"项。该"阻尼"项是流体与结构交界面上的交界面条件带来的不对称的"阻尼"耦合项和自由流体表面带来的对称的"阻尼"耦合项。不过,对上述方程进行修正,就可以得到矩阵对称但非正定的系统方程。

$$\begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & -K_f \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_s \\ \phi_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -Q \\ -Q^T & -C_f \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{\phi}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & -M_f \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{\phi}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ -F_f \end{Bmatrix} \quad (11-32)$$

11.4 岩土渗流—结构的耦合系统(域内耦合系统)

众所周知,像土壤等地岩土材料,其性能与材料空隙中的流体压力密切相关。为了更好地表达流体对土体性能的影响,引入了有效应力的概念。其定义如下:

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} + \{M\}p \quad (11-33)$$

式中:$\{\sigma'\}$为有效应力;$\{\sigma\}$为作用在土体和孔隙所在面上的应力;p为孔隙中流体(通常为水)的压力;$\{M\} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$。

11.4.1 渗流—应力耦合的基本方程

1. 应力场方程

在总应力下,介质的平衡方程为

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} - f_{x_i} = 0 \qquad (i,j = 1,2,3) \quad (11-34)$$

式中:x_j为3个坐标方向;f_{x_i}为x_i方向的体力。

将有效应力计算公式(11-33)代入式(11-34),可得有孔隙压力和有效应力表示的平衡方程

$$\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x} - f_{x_i} = 0 \qquad (i,j = 1,2,3) \quad (11-35)$$

同时,介质变形的几何方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{11-36}$$

对于弹性问题,由广义胡克定律知,应力应变之间满足本构方程

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{11-37}$$

将本构方程(11-37)和几何方程(11-36)代入平衡方程(11-35),得

$$G\nabla^2 u_i - (\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_V}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_{x_i} = 0 \quad (i,j = 1,2,3) \tag{11-38}$$

式中:λ、G 为拉梅常数;ε_V 为体积变形,$\varepsilon_V = -\left(\frac{\partial u_i}{x_i} + \frac{\partial u_j}{x_j} + \frac{\partial u_k}{x_k}\right)$。

位移边界上映满足的位移条件

$$u = \bar{u} \tag{11-39}$$

应力边界上应满足的位移边界条件

$$\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} + \bar{f}_x &= 0 \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} + \bar{f}_y &= 0 \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z + \bar{f}_z &= 0 \end{aligned} \tag{11-40}$$

式中:l、m、n 为边界外法线的方向余弦。

为讨论方便,将有效应力公式(11-33)、平衡方程(11-38)和应力边界条件(11-40)分别写成如下矩阵形式

$$\begin{aligned} \{\sigma'\} &= \{\sigma\} + \{M\}p \\ [L]^{\mathrm{T}}\{\sigma\} - \{f\} &= 0 \\ [n]^{\mathrm{T}}\{\sigma\} + \{\bar{f}\} &= 0 \end{aligned}$$

式中

$$\{M\} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$[n] = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix}$$

2. 渗流场的基本方程

Darcy 定律描述了渗流速度和孔隙压力之间的关系。其表达式为

$$v_i = -\frac{1}{\gamma_w}k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j} \tag{11-41}$$

式中：v_i 为 i 方向的渗流速度（m/s）；γ_w 为水的密度（N/m^3）；k_{ij}为介质的渗透系数张量（m/s）；p 为孔隙压力（Pa）。

在 Darcy 定律的基础上，根据渗流的连续性条件：单位时间内介质孔隙的改变量等于单位时间内流出的水的体积，可以得到渗流场的连续性方程

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{1}{S}\frac{\partial p}{\partial t}-\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad (11-42)$$

式中：S 为介质的储藏系数；α 为孔隙压力系数。

若介质的瞬时压缩应变与最后压缩相比可以忽略不计的话时，$S\to\infty$，且 $\alpha\to1$，此时，可将方程（11－42）简化为

$$\nabla\left[\frac{1}{\gamma_w}k_{ij}\nabla p\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad (11-43)$$

Darcy 定律和渗流连续方程只反映了渗流的一般规律，要求解该微分方程，需要确定地下水流动的边界条件和初始条件。边界条件是指在渗流区域的边界上的水力特征，即边界上孔隙压力的分布或边界上流入或流出含水层的水流速度的变化。通常，渗流区域的边界条件分为 3 类：

（1）孔隙压力边界条件　边界上孔隙压力分布已知。即

$$p\big|_{\Gamma_1}=p(x,y,z,t) \qquad ((x,y,z)\in\Gamma_1)$$

（2）流速边界条件　边界上的流速已知。即

$$-\frac{1}{\gamma_w}k_{ij}\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2}=v_n$$

式中：v_n为边界外法线方向的流速。一般情况下，边界上的流速很难测定。因此最常用的流速边界条件为隔水条件，即已知边界 Γ_2 上 $v_n(x,y,z,t)\equiv0$，此时边界条件可表达为

$$-\frac{1}{\gamma_w}k_{ij}\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2}\equiv0$$

（3）混合边界条件　含水层边界的内外孔隙压力差和流速之间保持一定的线性关系，即

$$p(x,y,z,t)+\alpha\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial n}=\beta \qquad ((x,y,z)\in\Gamma_3)$$

式中：α、β 为已知的常数。

渗流的初始条件通常为孔隙压力边界条件。即流场在开始时刻 $t=0$ 时渗流区域的孔隙压力 $p_0(x,y,z)$的分布情况。初始条件可表示为

$$p\big|_{t=0}=p_0(x,y,z) \qquad ((x,y,z)\in D)$$

3. 岩体介质渗透性和应力之间的耦合关系

岩体介质渗透系数和应力张量之间的非线性耦合关系得研究室岩体渗流—应力耦合研究的中的基本问题。目前的研究成果表明，渗透系数和应力张量之间的非线性耦合关系可通过式（11－44）表达。

$$k_{ij} = k_{ij}^0(\sigma, p) \tag{11-44}$$

式中：k_{ij}^0为介质的初始渗透系数张量。

4. 渗流场—应力场耦合方程

联立应力场平衡方程式(11－38)、渗流场方程式(11－43)和渗透系数和应力张量之间的耦合关系式(11－44)，可得到两场耦合方程组。

$$\begin{cases} G\nabla^2 u_i - (\lambda + G)\dfrac{\partial \varepsilon_V}{\partial x_i} - \dfrac{\partial p}{\partial x_i} + f_{x_i} = 0 \qquad (i,j = 1,2,3) \\ \nabla\left[\dfrac{1}{\gamma_w} k_{ij} \nabla p\right] = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \\ k_{ij} = k_{ij}^0(\sigma, p) \end{cases} \tag{11-45}$$

边界条件为：

(1) $u = \bar{u}$

(2) $l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} + \bar{f}_x = 0$

$l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} + \bar{f}_y = 0$

$l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z + \bar{f}_z = 0$

(3) $p\big|_{\Gamma_1} = p(x,y,z,t) \quad ((x,y,z) \in \Gamma_1)$

(4) $-\dfrac{1}{\gamma_w} k_{ij} \dfrac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = v_n$

11.4.2 渗流—应力耦合系统的有限元离散

对于三维的应力场和渗流场，可采用8节点的等参元对研究区域进行空间离散。渗流—应力耦合系统内单元中任意一点的位移和孔隙压力可用该单元各节点的位移和孔隙压力表示为

$$\begin{cases} u \approx \tilde{u} = \sum\limits_{i=1}^{8} N_i u_i \\ v \approx \tilde{v} = \sum\limits_{i=1}^{8} N_i v_i \\ w \approx \tilde{w} = \sum\limits_{i=1}^{8} N_i w_i \\ p \approx \tilde{p} = \sum\limits_{i=1}^{8} N_i p_i \end{cases} \tag{11-46}$$

式中：$\tilde{u}$、$\tilde{v}$、$\tilde{w}$、$\tilde{p}$ 分别为单元内任意点处沿 x、y、z 三个方向的位移 u、v、w 和孔隙压力 p 的近似解；u_i、v_i、w_i、p_i 分别是单元节点 i 处的位移和孔隙压力；N_i 为空间八节点等参元的形函数，且

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad (i = 1,2,3,\cdots,8) \tag{11-47}$$

单元位移$\{\delta\}^e$和节点位移$\{a\}^e$之间的关系可表达为

$$\{\delta\}^e \approx \{\tilde{\delta}\}^e = [N^m]\{a\}^e \tag{11-48}$$

式中：$\{\delta\}^e = \{u,v,w\}^T$ 为单元内任意点的位移矢量；$\{\tilde{\delta}\}^e = \{\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}\}^T$ 为单元位移矢量的近似解；$\{a\}^e = \{u_1,v_1,w_1,u_2,v_2,w_2,\cdots,u_8,v_8,w_8\}^e$ 为单元格节点处的位移矢量；$[N^m] = [N_1\boldsymbol{I},N_2\boldsymbol{I},\cdots,N_8\boldsymbol{I}]$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为三阶单位矩阵，且

$$N_i^m = N_i\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} N_i & & \\ & N_i & \\ & & N_i \end{bmatrix}。$$

定义应力场的形函数的偏导数矩阵为

$$[B^m] = [B_1^m,B_2^m,\cdots,B_8^m] \tag{11-49}$$

式中

$$[B_i^m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,\cdots,8)$$

对于弹性问题，单元内任意点的应力值为

$$\{\tilde{\sigma}\}^e = [D]\{\tilde{\varepsilon}\}^e = -[D][B]\{a\}^e \tag{11-50}$$

同理，单元内任意点处的孔隙压力与单元格节点处的孔隙压力之间的关系可表述为

$$\{p\}^e \approx \{\tilde{p}\}^e = [N^s]\{p_1,p_2,\cdots,p_8\}^T \tag{11-51}$$

式中：$\{p\}^e$ 为单元内任意一点处的孔隙压力；$\{\tilde{p}\}^e$ 为单元内任意一点处的孔隙压力的近似值；$\{p_1,p_2,\cdots,p_8\}^T$ 为节点处的孔隙压力矢量；$[N^s]$ 为渗流场形函数矩阵，且有 $[N^s] = [N_1,N_2,\cdots,N_8]$。

定义渗流场形函数的偏导数矩阵为

$$[B^s] = [B_1^s,B_2^s,\cdots,B_8^s] = \{\nabla\}^T[N^s] \tag{11-52}$$

式中

$$[B_i^s] = \{\nabla\}^T[N_i] = \left\{\frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad \frac{\partial N_i}{\partial z}\right\}^T$$

本节将通过加权余量法得到耦合系统的有限元空间离散形式，并通过 Galerkin 法选择加权函数。

1. 应力场方程的空间有限元离散

将应力$\{\sigma\}$的近似表达式$\{\tilde{\sigma}\}$代入平衡方程和应力边界条件,通过 Galerkin 加权余量法得到应力场方程的有限元空间离散形式,即

$$[K_m]\{a\} + [K_c]\{p\} = \{F_m\} \tag{11-53}$$

式中:$[K_m]$为应力场整体刚度矩阵,且有$[K_m] = \sum_e [K_m]^e$,其中$[K_m]^e$为应力场单元刚度矩阵,且有$[K_m]^e = \iiint_{\Omega^e} [B^m]^T[D]^e[B^m]\mathrm{d}V$;$[K_c]$为耦合整体矩阵,且有$[K_c] = \sum_e [K_c]^e$,其中$[K_c]^e$为耦合单元矩阵,且有$[K_c]^e = \iiint_{\Omega^e} -[B^m]^T[M]^e[N^s]\mathrm{d}V$;$\{F_m\}$为整体的等效节点载荷矢量,且有$\{F_m\} = \sum_e \{F_m\}^e$,其中$\{F_m\}^e$是单元的等效节点载荷列阵,且有$\{F_m\}^e = \iiint_{\Omega^e} [N^m]^T\{f\}^e\mathrm{d}V + \iint_{\Gamma_\sigma^e} [N^m]^T\{f\}^e\mathrm{d}S$。其中,$\iiint_{\Omega^e} [N^m]^T\{f\}^e\mathrm{d}V$为分布体力$\{f\}^e$产生的等效节点载荷,$\iint_{\Gamma_\sigma^e} [N^m]^T\{f\}^e\mathrm{d}S$为边界力产生的等效节点载荷。

2. 渗流场连续方程的有限元空间离散

将应力$\{p\}$的近似表达式$\{\tilde{p}\}$代入渗流连续方程和渗流场流速边界条件,通过 Galerkin 加权余量法得到应力场方程的有限元空间离散形式,即

$$[K_c]^T\{\dot{a}\} + [K_s]\{p\} = \{R_q\} \tag{11-54}$$

式中:$[K_c]$为耦合整体矩阵,其矩阵中各分量的计算方法相同;$[K_s]$为渗流场整体矩阵,且有$[K_s] = \sum_e [K_s]^e$,其中$[K_s]^e$为渗流场单元矩阵,且有$[K_s]^e = \iiint_{\Omega^e} [B^s]^T[k]^e[B^s]\mathrm{d}V$;$\{R_q\}$为整体的等效节点流量矢量,且有$\{R_q\} = \sum_e \{R_q\}^e$,其中$\{R_q\}^e$为单元的等效节点流量,且有$\{R_q\}^e = \iint_{\Gamma_2} [N^s]^T v_n\mathrm{d}S$。

3. 渗流场连续方程的时间离散。

渗流场的空间有限元离散形式中包含有节点位移对时间的一阶导数,因此需要对渗流场的连续方程进行时间域上的离散,将方程式(11-54)两边在时间$[t_n, t_{n+1}]$内对时间t进行积分,得

$$\int_n^{n+1} [K_c]^T\{\dot{a}\}\ \mathrm{d}t - \int_n^{n+1} [K_s]\{p\}\ \mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \{R_q\}\ \mathrm{d}t \tag{11-55}$$

式(11-55)中第 2 项的积分式可近似计算为

$$\int_n^{n+1} \{p\}\ \mathrm{d}t \approx (t_{n+1} - t_n)[\theta\{p\}_{n+1} + (1-\theta)\{p\}_n] \tag{11-56}$$

若定义$\Delta t = t_{n+1} - t_n$,$\Delta\{p\} = \{p\}_{n+1} - \{p\}_n$,则式(11-56)可简化为

$$\int_n^{n+1} \{p\}\ \mathrm{d}t = \Delta t[\{p\}_n + \theta\{\Delta p\}] \tag{11-57}$$

将式(11-57)代入式(11-55),并注意到

$$\int_n^{n+1}\{\dot{a}\}\ \mathrm{d}t = \{\Delta a\},\ \int_n^{n+1}\{R_q\}\ \mathrm{d}t = \Delta t\{R_q\}$$

得

$$[K_c]^{\mathrm{T}}\{\Delta a\}^e - \theta\Delta t[K_s]\{\Delta p\}^e = \{\Delta R_q\}^e \tag{11-58}$$

式中

$$\{\Delta R_q\}^e = \Delta t[[K_s]\{p\}_n^e + \Delta t\{R_q\}^e]$$

4. 渗流场—应力场耦合系统的有限元计算

渗流场—应力场耦合系统的有限元计算采用第10章提到的增量法进行求解。将应力场的空间有限元离散方程改写成其增量形式为

$$[K_m]\{\Delta a\} + [K_c]\{\Delta p\} = \{\Delta F_m\} \tag{11-59}$$

联立式(11-59)和式(11-58)可得到增量形式的渗流—应力耦合有限元计算总方程组

$$\begin{cases}[K_m]\{\Delta a)\} + [K_c]\{\Delta p\} = \{\Delta F_m\} \\ [K_c]^{\mathrm{T}}\{\Delta a\} - \theta\Delta t[K_s]\{\Delta p\} = \{\Delta R_q\}\end{cases} \tag{11-60}$$

采用增量法计算应力场和渗流场的具体步骤可参考相关文献。

第2篇　有限元建模方法

有限元模型(Finite Element Model)是为有限元计算提供所有原始数据的计算模型，它定量反映了分析对象在几何、材料、载荷、约束等各个方面的特性。建立有限元模型的过程称为有限元建模(Finite Element Modeling)，它是整个有限元分析过程的关键，模型合理与否将直接影响计算结果的精度、计算时间的长短、存储容量的大小以及计算过程能否完成。本篇将介绍有限元建模的基本方法和原则。

第12章　有限元建模概述

12.1　有限元分析过程

第1篇介绍了各类问题的有限元分析原理、过程和有关概念。不难看出，尽管不同问题所分析的内容不一样，相应的有限元方程也不相同，但分析过程很相似。图12－1回顾了结构静力分析、动力分析和热分析问题的主要步骤。

从应用角度来看，上述有限元分析过程可划分为3个阶段：前处理、求解和后处理。

12.1.1　前处理

通常，将一个有限元模型提交给求解程序计算之前所进行的所有工作称为前处理(Pre－processing)。前处理的核心工作是结构离散，但围绕离散还需要完成很多与之相关的工作，如结构形式处理、几何模型建立、单元类型和数量选择、单元特性定义、单元质量检查、编号顺序优化以及模型边界条件的定义等。因此前处理的基本任务就是建立有限元模型，故又称有限元建模。

12.1.2　求解

求解(Solving)的任务是基于有限元模型完成相关数值计算，并输出计算结果。其主要工作包括单元刚阵形成、总体矩阵集成、边界条件处理和特性方程求解等，即包括图12－1中从单元特性分析到计算出需要的物理量等步骤。由于求解运算量非常大，所以这部分工作由计算机程序自动完成。在有限元分析软件中，完成求解的程序模块称为求解器(solver)。除计算前需要对计算方法、计算内容、计算参数和工况条件等进行必要的设

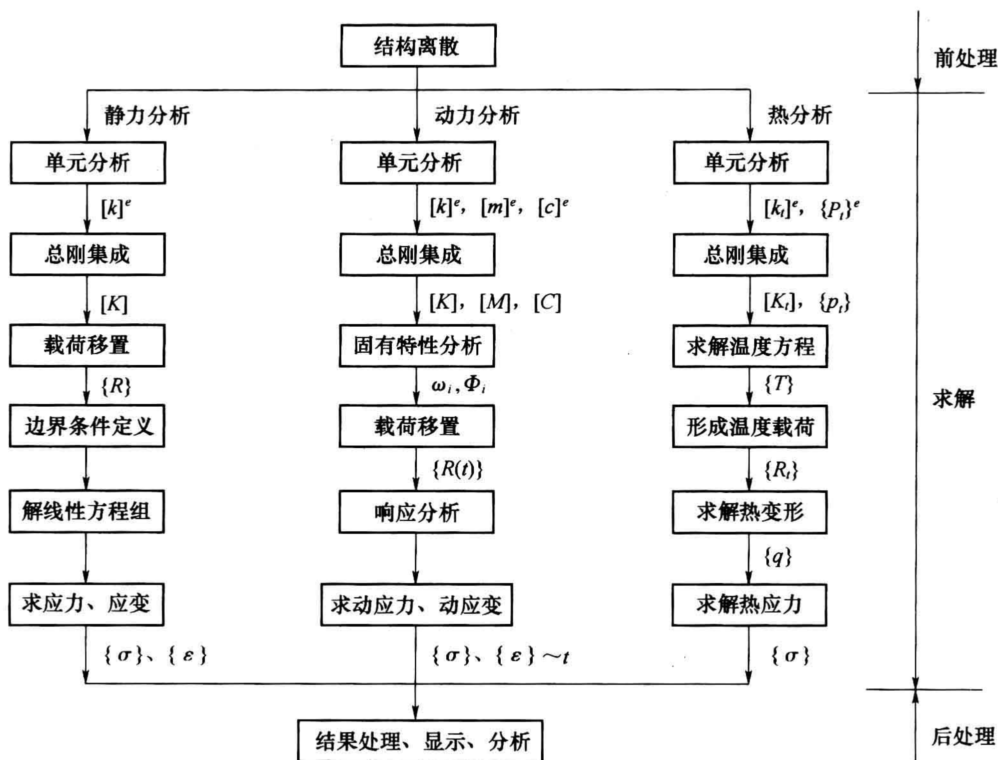


图 12－1　有限元分析的主要步骤

置和选择外，一般不需要人的干预。

12.1.3　后处理

后处理(Post-processing)的任务是对计算输出的结果进行必要的处理，并按一定方式显示或打印出来，以便对分析对象的性能或设计的合理性进行分析、评估，以做出相应的改进或优化，这是有限元分析的目的所在。

因此，整个有限元分析过程也可以用图 12－2 表示。

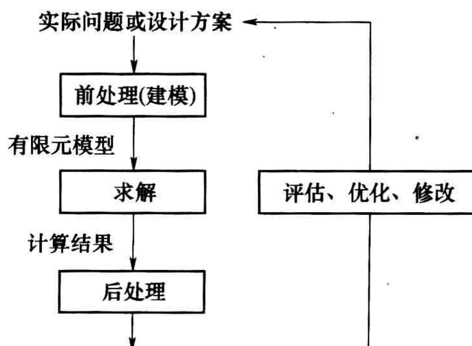


图 12－2　有限元分析的一般过程

12.2 有限元建模的重要性

在有限元分析过程的3个阶段中，建模是其中最为关键的环节。

1. 影响结果精度

有限元模型要为求解提供所有原始数据，这些输入数据的误差将直接决定计算结果的精度。如果模型本身不合理，即使求解算法再精确，也不可能得到高精度的分析结果。因此，有限元模型是决定结果精度的主要因素。

2. 影响计算过程

模型的形式不仅决定计算精度，还影响计算的过程。对于同一分析对象，不同的模型需要的计算时间和存储容量可能相差很大，不合理的模型还可能导致计算过程死循环或中断。

3. 对人员要求高

由于分析对象的形状、工况条件、材料性质的复杂性，要建立一个完全符合实际的有限元模型往往很困难。它需要综合考虑的因素很多，如形状的简化、单元类型的选择、边界条件的处理等，从而对分析人员的专业知识、有限元知识和软件使用技能等方面都提出了较高的要求。

4. 花费时间长

建模所花费的时间在整个分析过程中占有相当大的比例。目前世界上已有很多功能强大的有限元分析软件，如ANSYS、I－DEAS、NASTRAN、SAP、ABAQUS和ADINA等。利用现存的分析软件，分析人员可把求解过程作为“黑匣子”来对待，而把精力主要集中在建模上。据统计，建模所花费的时间约占整个分析时间的70%左右。因此，提高建模速度是缩短分析周期的关键。

鉴于以上原因，本篇将重点介绍有限元建模的相关知识。

12.3 有限元模型的定义

有限元模型是为数值计算提供所有原始数据的计算模型。图12－3为一支架的有限元模性，结构离散后形成节点和单元，这种由节点和单元组成的组合体称为离散模型，或称网格模型。仅有离散模型还不能获得结果数据，只有在离散模型上赋予相应的位移约束、载荷等边界条件，才能形成完整的有限元模性。

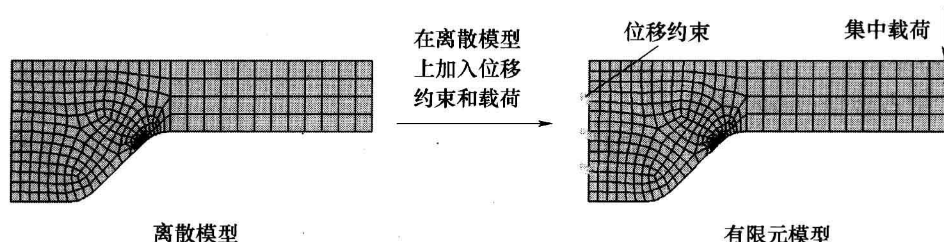


图12－3 有限元模型的组成

因此,有限元模型一般包括3类数据,即节点数据、单元数据和边界条件数据,图12-4对模型数据进行了分类总结。

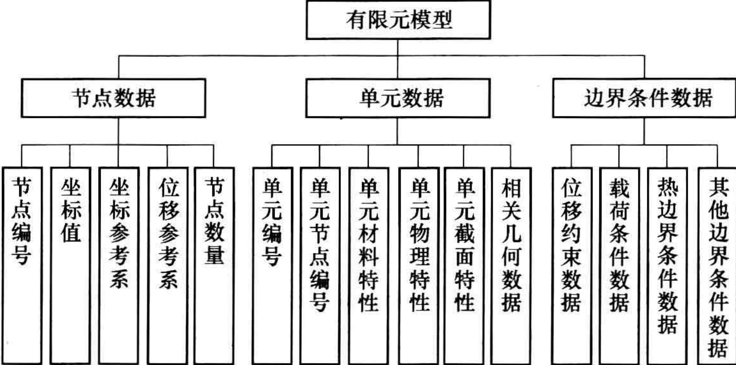


图12-4 有限元模型的数据类型

12.3.1 节点数据

节点数据包括以下数据类型。

1. 节点编号(node label)

模型中的每个节点都有一个唯一的编号,作为节点的标识符。节点编号不能重复,但可以不连续。在自动或半自动分网中,节点编号由计算机自动完成,编号顺序不一定合理,当删除一些节点后也可能造成编号不连续。由于节点编号影响总刚矩阵的带宽,因此在计算前可进行带宽优化,以重新对节点进行合理编号。特别是需要对模型进行多次重复计算时,带宽优化是很必要的。

2. 坐标值(node coordinates)

在给定的坐标参考系中,每个节点的位置是已知的。正是基于已知的节点位置,才能形成确定的单元形状。在自动分网中,每个节点的坐标值由计算机自动确定。

3. 坐标参考系代码(node coordinate reference system code)

在一个模型中,有时为了建模的方便可能建立多个坐标系,不同的节点可根据需要参考不同的坐标系。在不同坐标系中节点的坐标值是不相同的,因此应明确规定节点坐标相对的是哪一个坐标系。

4. 位移参考系代码(node displacement reference system code)

位移参考系是指节点的位移自由度所参考的坐标系,它可以不同于坐标参考系。在不同的位移参考系中,节点的位移分量所表示的方向是不同的,因此应指明节点位移是参考的哪个坐标系。

5. 节点数量(node number)

模型中的节点数量决定了模型的规模,可根据节点总数来衡量模型的大小,以便规划合理的建模策略。

12.3.2 单元数据

单元数据包括以下数据类型。

1. 单元编号(element label)

模型中的每个单元同样都有一个唯一的编号,作为单元的标识符。同一模型中,单元编号不能重复,但可以不连续。在自动或半自动分网中,单元编号也由计算机自动完成,编号顺序不一定合理,当删除一些单元后也可能造成编号不连续。由于单元编号影响总刚矩阵的波前数,因此在利用波前法计算时可进行波前优化,以重新对单元进行合理编号。

2. 组成单元的节点编号

指出单元由哪些节点组成,这组节点的坐标值实际上决定了单元的网格形状。

3. 单元材料特性(material properties)

该类数据定义分析对象的各种材料特性,如弹性模量、泊松比、热膨胀系数、传热系数和密度等,在形成单元特性矩阵时将用到这类数据。

4. 单元物理特性值(physical properties)

该类数据定义单元本身的物理特性和辅助几何参数,如弹簧单元的刚度系数、间隙单元的间距、集中质量单元的质量、板壳单元厚度和曲率半径等。

5. 一维单元的截面特性(section properties)

截面特性包括截面面积、惯矩、极惯矩、弯心位置、剪切面积比等。截面特性通常由定义的截面形状和大小由软件自动求出。

6. 相关几何数据

该类数据描述单元本身的一些几何特征,如单元材料的主轴方向、梁单元端节点的偏移量和截面方位、刚体单元自由度释放码等。

以上节点数据和单元数据定义了分析对象的几何特性和材料特性。

12.3.3 边界条件数据

边界条件数据用于描述分析对象与外界的相互作用,包括以下数据类型有。

1. 位移约束数据

该类数据规定模型中哪些节点、节点哪些自由度上的位移受到约束条件的限制以及约束的类型和大小。

2. 载荷条件数据

用于定义模型中节点载荷、单元棱边载荷和面力、体力以及温度载荷作用的位置、方向和大小。

3. 热边界条件数据

定义模型中节点温度、热流、对流换热和辐射换热的位置、大小或作用规律。

4. 其他边界条件数据

定义模型中的主从自由度、连接自由度或运动自由度等其他用于分析的边界条件。

12.4 建模的一般步骤

早期的建模主要采用脱机方式(如 SAP5),即在上机前先在坐标纸上分好网格,确定

每个节点的坐标值，然后将节点数据、单元数据和边界条件数据逐一输入到计算机中。这种方式输入工作量很大，建模速度慢，模型修改困难，且容易出现输入错误。20 世纪 80 年代后期以来，很多有限元分析软件都采用了自动分网功能，使得建模过程主要在计算机上通过人机交互方式进行。这种方式建模速度快，模型修改容易，人的劳动强度小，出错率也很低。

图 12 – 5 给出了交互式建模的一般过程。

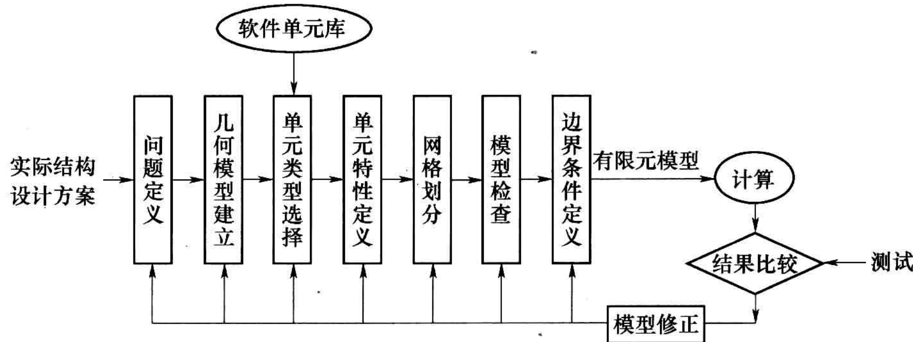


图 12 – 5　有限元建模的一般过程

下面分别对上述过程中每个步骤的主要工作做一概括介绍，后续章节还将对这些问题进行详细说明。

12.4.1　问题定义

在进行有限元分析之前，首先应对分析对象的形状、尺寸、工况条件、材料类型、计算内容、应力和变形的大致规律等进行仔细分析。只有准确掌握了分析对象的具体特征，才可能建立合理的有限元模型。一般来讲，在定义一个分析问题时应明确以下几点。

1. 结构类型

弹性力学中将结构分为平面问题、轴对称问题、空间问题、杆件结构、薄板弯曲问题、薄壳问题和轴对称薄壳问题等类型。对于不同类型的结构，划分网格时所选择的单元类型是不一样的，几何模型的形式、形状处理方法等也可能不相同。结构类型一般应根据结构的几何形状、边界条件、材料类型等进行判断。例如，如果结构的形状、位移约束、载荷、材料特性等都具有轴对称性时，则结构属于轴对称问题。

2. 分析类型

分析类型可分为静力分析、动力分析、热分析以及接触分析、断裂分析等，也可分为线性和非线性分析。不同的分析类型对有限元模型的要求也不尽相同。例如动态分析要求整个模型的网格趋于均匀，而静力分析时，则应根据应力分布采用疏密不同的网格。由于动态分析计算量很大，所以建模时应特别注意控制模型规模；而在热分析时，由于节点只有一个自由度，且计算只是求解线性方程组，所以相比之下模型规模就没有动态分析时那样重要。

3. 分析内容

分析内容不同，对模型的要求也可能不一样。例如在静力分析时，如果只需要计算变

形,则网格可以划分得比较均匀和相对少一些;若需要计算应力,则应力集中区域的网格应加密,整个模型的网格也应分得多一些。又如在动态分析时,如果只需要计算结构的少数低阶动态特性,则网格可以分得较稀;但若需要计算高阶动态特性,则应划分较密集的网格。

4. 计算精度要求

不同分析对象对计算精度的要求不完全一样。例如对于航空航天装置上的一些关键零件,由于其作用的重要性,要求零件应具有绝对可靠的强度,但受重量的严格限制又不可能将零件尺寸设计得太大,这就要求非常准确地掌握零件的应力大小和分布,这样既能保证强度要求,又不会将零件设计得太重。而对于一些非关键性零件,计算精度就可以取得相对低一些。

不同的精度要求对建模有很大影响。当精度要求高时,就需要对几何模型、网格数量、网格形状以及边界条件等进行认真考虑,也可能采用组合建模等措施来提高精度。当精度要求不是很高时,建模时就可能采用较多的近似处理,如空间问题近似为平面问题或轴对称问题,忽略一些结构细节等,网格数量也可以取得少一些。

5. 模型规模

分网之前还不能准确知道模型的大小,但根据分析对象的形状、尺寸、类型、精度要求等条件,可以判断单元和节点数量的大致量级。根据模型规模的大小和具体的硬件条件,建模时可采取相应的建模策略。例如,当模型规模很大而硬件条件有限时,就可能采用分步计算方法、子结构方法等建模方法,网格密度也尽可能取得小一些,一些影响网格划分的细节也要尽可能忽略。

6. 计算数据的大致规律

根据结构形状和工况条件的特点,有时在计算前便可对应力和变形的分布规律进行粗略的估计。计算数据的分布特点对于网格的相对密度、位移约束条件的定义以及几何模型的建立等都有直接影响。例如,如果能够判断结构某一部位有严重的应力集中,则划分网格时该部位应划分得非常密集,网格质量和边界几何离散精度也应尽可能高,这些部位的细节也必须仔细考虑,而其他应力变化平滑的部位则可以采用相对较低的要求。如果能够判断结构中某些位置的变形非常小,就可以将位移约束条件定义在这些位置上,或者只取出变形较大的局部结构进行分析。

12.4.2 几何模型建立

几何模型是对分析对象形状和尺寸的描述,又称几何求解域。它是根据对象的实际形状抽象出来的,但又不是完全照搬。即建立几何模型时,应根据对象的具体特征对形状和大小进行必要的简化、变化和处理,以适应有限元分析的特点。所以几何模型的维数特征、形状和尺寸有可能与原结构完全相同,也可能存在一些差异。

为了实现自动分网,需要在计算机内建立几何模型。几何模型在计算机中的表示形式有实体模型、曲面模型和线框模型三种,具体采用哪种形式与结构类型有关,如板、壳结构采用曲面模型,空间结构采用实体模型,杆件系统采用线框模型等。建立结构几何模型的有关内容请见第14章。

12.4.3 单元选择

分网之前首先要确定采用什么单元,包括单元的类型、形状和阶次。单元选择应根据结构的类型、形状特征、应力和变形特点、精度要求和硬件条件等因素进行综合考虑。例如,如果结构是一个形状非常复杂的不规则空间结构,则应选择四面体空间实体单元,而不要选择五面体或六面体单元。如果精度要求较高、计算机容量又较大,则可以选择二次或三次单元。如果结构是比较规则的梁结构,梁的变形又以弯曲变形为主,则选择非协调单元比协调单元更合适。为了能够正确选择单元类型,本书第 15 章将详细介绍结构分析中常见单元类型及其特点和应用范围。

此外,选择单元类型时必须局限在所使用分析软件提供的单元库内,也就是说只有软件支持的单元才能使用。从这个角度上讲,软件的单元库越丰富,其建模功能越强,应用范围越广。

12.4.4 单元特性定义

单元除了表现出一定的外部形状(网格)外,还应具备一组计算所需的内部特性数据。这些数据用于定义材料特性、物理特性、辅助几何特征、截面形状和大小等。所以在生成单元以前,首先应定义出描述单元特性的各种特性表。单元特性的类型、内容和定义方法见第 15 章。

12.4.5 网格划分

网格划分(简称分网)是建立有限元模型的中心工作,上面以及下面介绍的几个步骤都是围绕分网进行的,模型的合理性在很大程度上由网格形式决定。所以分网在建模过程中是非常关键的一步,它需要考虑的问题较多,如网格数量、疏密、质量、布局、位移协调性等,本书 16.1 节将详细介绍分网需要考虑的一般原则。

分网也是建模过程中工作量最大、耗时最多的一个环节。为了提高建模速度,目前广泛采用了自动或半自动分网方法。自动分网是指在几何模型的基础上,通过一定的人为控制、由计算机自动划分出网格。半自动方法是一种人机交互方法,它由人定义节点和形成单元,由软件自动进行节点和单元编号,并提供一些加快节点和单元生成的辅助手段。本书将在第 16 章介绍这两种方法。

12.4.6 模型检查和处理

一般来讲,通过自动或半自动方法划分出来的网格模型还不能立即用于分析。由于结构形状和网格生成过程的复杂性,网格或多或少都存在一些问题,如质量较差、存在重合节点或单元、编号顺序不合理等,这些问题将影响计算精度和时间,或产生不合理的计算结果,甚至中止计算。所以分网之后还应该对网格模型进行必要检查,并作相应处理。本书第 17 章将介绍模型检查的主要内容及其处理方法。

12.4.7 边界条件定义

通过分网生成的网格组合体定义了节点和单元数据,它并不是完整的有限元模型,因

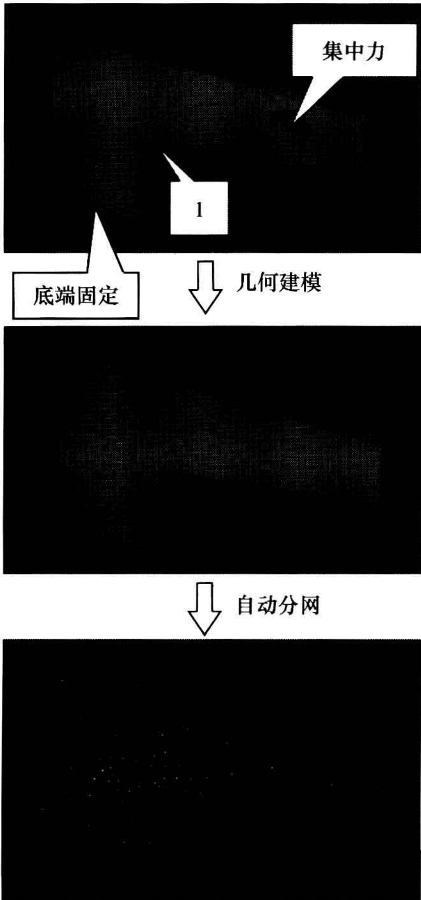
此还不能直接用于计算。

边界条件反映了分析对象与外界之间的相互作用，是实际工况条件在有限元模型上的表现形式。只有定义了完整的边界条件，才能计算出需要的计算结果。例如，当在模型上施加了力和位移约束，才能算出结构的变形和应力分布。

建立边界条件一般需要两个环节。第 1 个环节是对实际工况条件进行量化，即将工况条件表示为模型上可以量化的形式，如确定表面压力的分布规律、对流换热的换热系数、接触表面的接触刚度、动态载荷的作用规律等，这部分工作有时可能很复杂，往往需要借助一些测试数据。第 2 个环节是将量化的工况条件定义为模型上的边界条件，如单元面力和棱边力、惯性体力、单元表面的对流换热等。有关模型边界条件的类型和形式见第 18 章。

当划分出合理的网格形式并定义了正确的边界条件后，也就建立起了完整的有限元模型，这时便可以调用相应的分析程序对模型进行计算，然后对计算结果进行显示、处理和研究。但是，对于复杂的分析对象，由于不确定因素较多，往往并不可能通过上面介绍的建模过程一次就能建模成功，而是要通过“建模——计算——分析、比较计算结果——对模型进行修正”这样一个反复过程，以使模型逐渐趋于合理。所以在建模过程中，进行适当的试算，采用由简单到复杂、由粗略到精确的建模思路是必要的。

图 12－6 用一示例说明了上述有限元建模过程。



分析对象： 两个支架圆孔中装有一轴，轴上悬吊重物，支架底端与地面固定，要求计算支架在承受重物后的应力和变形。由于两个支架形状和受力相同，因此只需计算其中一个。

(1) 问题定义： 分析对象可视为平面应力问题。分析类型为线性静力分析。根据经验，在倒圆1处将出现应力集中，最大应力值可能发生该位置。

(2) 建立几何模型： 忽略支架CAD模型中自由顶端的两个倒圆以及对根部应力影响不大的轴孔，将CAD模型转换为有限元分析的几何模型。

(3) 选择单元类型： 选择3节点三角形平面应力单元。

(4) 定义单元特性： 定义材料的弹性模量E和泊松比μ，以及板厚 t。

(5) 自动分网： 定义单元总体尺寸，采用自由映射分网，并在应力集中部位加密网格。

(6) 模型检查： 检查自动形成的网格中有无低质量单元、畸形单元、重合单元以及重合节点等。

定义边界条件

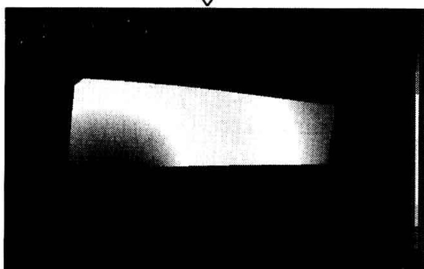


(7) 定义边界条件：在位于底线上的节点上施加刚性位移约束，以模拟支架底端的固定连接。在圆孔中心节点施加集中力(自动分网时将圆心预定义为节点)，以考虑重物影响。

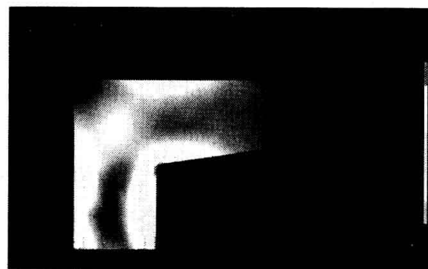
至此，有限元模型建立完毕。

将有限元模型提交求解器计算。

有限元模型



支架变形



支架应力

计算结果

图 12－6　有限元建模过程

第13章　有限元建模的基本原则

建立有限元模型时需要考虑的因素很多,不同分析问题所考虑的侧重点也不一样。但不论什么问题,建模时都应考虑两条基本原则:一是保证计算结果的精度,二是适当控制模型的规模。

精度是有限元解与真实解之间的相差程度,规模则指有限元模型的大小。精度和规模通常是一对相互矛盾的因素。精度要求高,模型规模一般会增加;模型规模减小,精度又会相应降低。因此建模时应根据具体的分析对象、分析要求和分析条件权衡考虑。保证精度是必须的,通过减小规模来降低精度将使分析失去意义。在保证精度的前提下,减小模型规模是必要的,它可在有限的条件下使有限元计算更好、更快地完成。

13.1　保证精度原则

有限元分析的目的是要利用分析结果验证、修改或优化设计方案,如果结果误差太大,有限元分析也就失去了实用价值,甚至会引起负作用,所以保证精度是建模时首要考虑的问题。不同分析问题对精度的要求不一样,关键结构的精度要求可能高一些,非关键结构的精度要求则要低一些。

有限元分析是一个非常复杂的计算过程,计算结果的精度与很多因素有关,且许多因素对精度的影响有较大的偶然性,所以对结果精度做出定量估计非常困难。由于一般结构均不能求出其应力、位移和动态特性的解析解,所以实际应用中通常通过实物或相似结构的实验结果来验证计算结果的准确性。

本节首先介绍在整个有限元分析过程中可能产生误差的各种原因,然后定性地提出提高结果精度的一些途径。

13.1.1　误差分析

从有限元分析的整个过程来看,计算结果的误差主要来自两个方面:一是模型误差,二是计算误差。

模型误差是指将实际问题抽象为适合计算机求解的有限元模型时所产生的误差,即有限元模型与实际问题之间的差异。它包括有限元法离散处理所固有的原理性误差,也可能包括几何模型处理、实际工况量化为模型边界条件时所带来的偶然性误差。

计算误差是指采用数值方法对有限元模型进行计算所产生的误差,误差的性质是舍入误差和截断误差。

图13－1指出了分析过程中产生误差的两个环节。

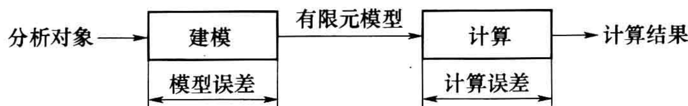


图 13－1　产生误差的两个环节

图 13－2 对各种误差进行了分类总结。

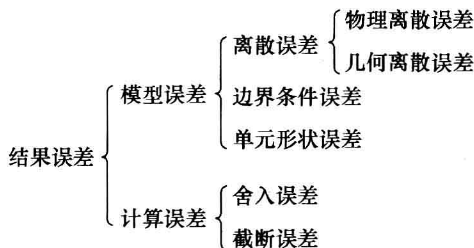


图 13－2　结果误差分类

下面分别对各种误差进行分析。

1. 模型误差

模型误差是建立有限元模型所产生的误差,产生这类误差的主要原因有以下几种。

(1) 离散误差　有限元法是将一个连续的弹性体离散为由有限个单元组成的组合体,并在单元内用一假设的插值函数逼近真实函数。这样,插值函数与真实函数之间就存在一定的差异,组合体的形状也可能与原有结构不完全相同,这种由于离散处理引起的原理性误差称为离散误差。

离散误差是一种原理性误差,包括物理离散误差和几何离散误差。

物理离散误差是插值函数与真实函数之间的差异,其量级可用下式来估计

$$E = O(h^{p+1-m}) \tag{13-1}$$

式中:E 表示物理离散误差的量级;h 为单元特征长度尺寸;p 为单元插值多项式的最高阶次;m 为函数在泛函中出现的最高阶导数。

式(13－1)只是对误差的量级做出了估计,并没给出误差的绝对大小,只有通过解析法求出精确解后,才能判断误差的具体值。

从式(13－1)可以看出,对于给定的场函数,m 的大小是确定的。因此物理离散误差的大小与单元尺寸和插值多项式的阶次有关。单元尺寸减小(网格划分越密),插值函数的阶次增高(采用二次或三次单元),都将使误差减小,或者说使有限元解收敛于精确解。通常称前者为 h 收敛,后者为 p 收敛。因此式(13－1)也对有限元解的收敛速度做出了量级估计。

例如,对于3节点三角形位移单元,插值函数是线性函数,即 $p=1$。由于在能量泛函中只有位移函数本身,没有位移导数,即 $m=0$,所以位移误差是 $O(h^2)$,收敛的速度也是 $O(h^2)$。若用6节点三角形单元,插值函数是二次函数,则误差和收敛速度的量级变为 $O(h^3)$。因此,如果所有单元的尺寸减半,则3节点单元的误差将减小1/4,而6节点单元的误差将减小1/8。也就是说,后者的收敛速度比前者要快一倍。

对于应力和应变数据,由于它们通过位移的一阶导数求得,即 $m=1$,因此其精度量级和收敛速度要比位移数据低。如3节点三角形单元的误差和收敛速度量级为 $O(h)$,6节点单元为 $O(h^2)$。这时若所有单元尺寸减半,误差减小为前一次的1/2和1/4,说明应力和应变的收敛速度要比位移慢。

图13-3利用一维问题对物理离散误差与单元尺寸和插值函数阶次的关系进行了几何描述,其中图13-3(b)通过减小单元尺寸来减小误差,图13-3(c)通过提高插值函数阶次来减小误差。

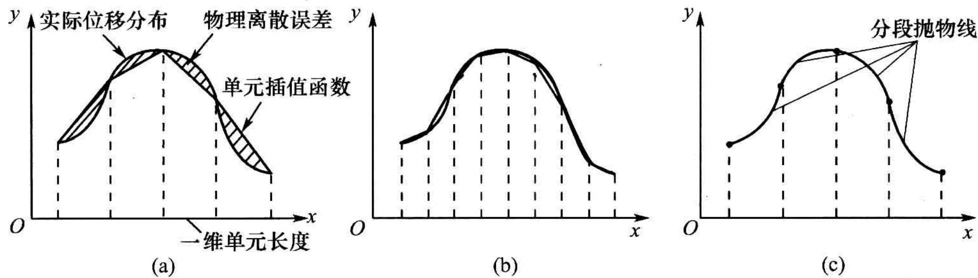


图13-3 一维问题物理离散误差的几何描述

(a)一维问题;(b)单元缩小,仍用直线逼近;(c)单元大小不变,用抛物线逼近。

物理离散误差除与插值函数阶次和单元尺寸有关外,与真实函数的性态也有很大关系。在某些情况下,即使采用较少的单元和较低的插值函数阶次,也能获得满意的离散精度。例如,假设场函数在整个结构内的分布是二次函数,则用一个二次单元离散就能得到场函数的精确解。如果场函数为线性或接近于线性分布,则用线性单元离散也能得到很好的离散精度。但实际问题的场函数往往很复杂(如存在应力集中),在整个结构内很难遵循某一种函数规律,某些部位可能按高阶函数规律分布,某些部位又可能接近低阶函数的性质。因此在划分网格时,结构内的不同部位可能采用不同密度和阶次的网格形式。

几何离散误差是指离散后的组合体与原有结构在几何形状上的差异。对于由直线或平面边界组成的规则结构,这类误差可能很小或者为零。但对于具有复杂曲线或曲面边界的结构,离散后就有可能产生较大的形状误差。

例如,图13-4是一个梁的带孔圆截面用不同数量单元离散的情况。可以看出,截面的外圆、内圆都是用一些线性单元的直线边界逼近,由直线组成的多边形与圆之间的面积之差就是梁截面的几何离散误差。随着单元数量增加,多边形越逼近圆,几何离散误差也就随之减小。设悬臂梁长度为200mm,截面外圆半径为10mm,内圆半径为3mm,材料弹性模量为206GPa,泊松比为0.3,在自由端施加集中力1000N。按照图13-4中三种截面的网格离散,进行弯曲计算得到梁自由端最大位移分别为2.42mm、1.91mm、1.73mm,其中理论值为1.66mm。由此可见形状误差对计算结果的影响。

(2) 边界条件误差　进行有限元分析时,常常是将所关心的结构单独提出来进行分析,而分析结构与其他结构或外部环境的相互作用通过在模型上设置已知的边界条件来表示。这样,将结构实际工况量化为模型边界条件时,两者之间也可能存在一定的差异,这种差异便称为边界条件误差。

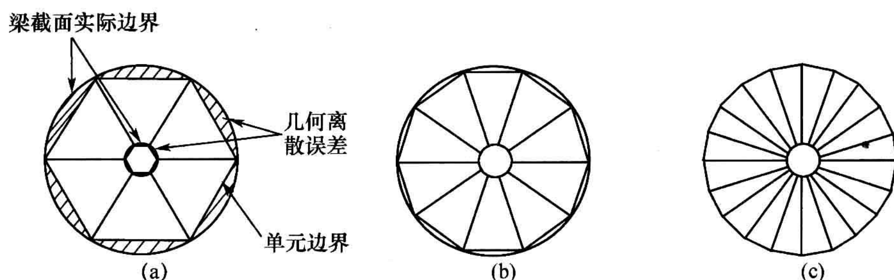


图 13－4　梁截面的几何离散误差

(a) 6 个四边形单元；(b) 10 个四边形单元；(c) 20 个四边形单元。

例如图 13－5 中，当需要分析结构 B 的变形时，通常是将 B 单独提取出来，其中 A 对 B 的作用用分布载荷 q 表示（$q = W/bt$，W 为 A 的重量，b 为 A 的宽度，t 为 A 的厚度），C 对 B 的作用用节点位移约束表示。这时可能产生两类误差，一是结构 A 的重量 W、宽度 b、厚度 t 的测试误差，它们影响 q 的大小；另一个是用节点位移固定约束表示 B、C 之间的作用，没有考虑 C 的变形。实际上当 C 受到 A、B 的压力后，会发生一定变形。使用节点位移约束，是将 C 近似为刚体。

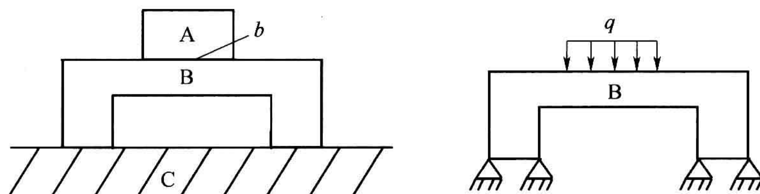


图 13－5　边界条件误差示意

边界条件误差来自两个方面。第 1 个是对实际工况进行定量表示时产生的，如图 13－5中的 q。这类误差并不是有限元法固有的误差，而属于测量误差，误差大小有较大偶然性。如果结构实际工况很简单（如图 13－5 中的 W），则误差可能很小。但很多结构的工况很复杂，要相当准确地定量表示实际工况的大小并不是件容易的事。例如发动机活塞顶部承受的爆破压力就不是一个可通过理论计算得到的恒定值，活塞表面的温度分布也与负荷情况、润滑条件等多种因素有关，因此压力和温度的大小只能通过测试获得。由于测试误差，测试值与实际的压力和温度必然存在一定差异。

由于上述误差有较大的偶然性，所以难以做出定量的或量级上的估计，其大小也难以通过理论方法进行控制。只有较准确地掌握了实际受力大小、位移状态和温度分布，才能减小这类误差。目前大多数计算以结构的最危险工况进行，以使计算结果偏于安全。但如果安全裕度太大，结构设计就难以达到最优。

第 2 类边界条件误差来自载荷的移置，这是有限元法离散所引起的。由于在有限元计算过程中，设置在模型上的所有非节点集中载荷、分布的棱边载荷、表面载荷以及体积力等都需要移置为等效的节点载荷，这与结构的实际受载情况并不一致，因而也会带来一定的误差。根据圣为南原理，载荷移置仅对载荷附近的局部特性有影响，而对整个结构的力学性能影响不大。当需要考查结构在载荷附近的局部特性时，可以通过加密网格的方

法来减小载荷移置的影响。

(3) 单元形状误差　单元的网格形状对计算结果的误差大小也有影响。例如,3 节点三角形单元内部应力的误差可以用下式来估计,即

$$E \leqslant 4M_2h/\sin\theta \qquad (13-2)$$

式中: M_2 为真实位移场函数的二阶导数在单元上的最大模;h 为三角形的最大边长;θ 为三角形的最大内角。

可以看出,当单元的三角形网格很“钝”时,最大内角 θ 接近 180°,$\sin\theta$ 趋于零。这时即使单元分得很小,应力误差仍可能非常大,这种由于单元形状引起的误差称为单元形状误差。

单元形状对误差的影响一般仅限于单元内部或相邻单元,因此当整个模型中存在少数形状较差的单元时,它们对整个模型的变形不会产生太大影响,但对局部应力的影响可能较大,因此在应力集中等重要部位应尽量划分比较规则的网格。

2. 计算误差

计算误差是利用计算机对模型进行数值计算时所产生的误差。它的性质是由于计算机字长限制引起的舍入误差和数值算法所产生的截断误差,其大小取决于数值算法、机器性能、程序设计方法、计算次数、误差累积以及计算题目的性质等多种因素。

计算误差尽管在计算阶段产生,误差大小的控制也主要应在有限元计算程序的设计和开发中加以考虑,但这类误差也与有限元模型的性质、规模等因素有关,所以建模过程中也应予以充分注意。

(1) 舍入误差　任何数据在计算机中都必须以二进制数表示,二进制数在计算机中的表示形式称为机器数,机器数所包含的二进制数的位数称为字长。由于计算机存放一个数所使用的电子器件是有限的,因此一台机器的字长也是固定的。例如较早的微型计算机字长为 8 位,目前微计算机的字长为 32 位,而工作站、大中型计算机的字长都高于 64 位。一般来讲,计算机字长越大,性能越高。

由于字长限制,任何原始数据和结果数据都只能用有限的有效数字表示,这样就必然进行四舍五入处理,由此产生的误差称为舍入误差。例如,若用 3.14159 近似代替 π,产生的误差 0.0000026 就是舍入误差。

舍入误差除与字长有关外,还与采用的数值方法、运算次数等因素有关。对于同一个计算问题,数值方法可能是数值稳定的,而某些方法则可能是不稳定的,这时即使原始输入误差很小,但误差传播也可使误差积累得越来越大,最后使计算结果完全失去意义。因此,减小、控制舍入误差除采用高字长的计算机外,还应在有限元程序设计时加以考虑,如采用双精度数,采用合理的程序结构和有效的、稳定的数值方法等。此外,建模时减小模型规模,降低运算次数,也能使这类误差得到合理控制。

(2) 截断误差　有限元法是一种数值分析方法,一些解析的代数运算必须转换为适合于计算机特点的数值计算。这些计算包括线性方程组的求解、单元刚度矩阵和节点载荷列阵的积分运算、特征值和特征矢量求解以及动力响应特性的计算等,其中求解线性方程组的在整个计算过程中占有很大的比重。

由于解析运算需要通过某种适合于程序编制的数值方法转换为相应的数值运算,这种转换必然引起数值运算结果与解析运算结果之间存在一定误差,这种误差便称为截断

误差。例如,函数$f(x)$若用泰勒多项式

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

近似代替,则数值方法的截断误差为

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

截断误差的大小与所选用的数值方法类型、特点和参数有关。例如,等参元的刚度计算通常采用高斯积分法,积分误差就与所选择的积分点数目和积分点分布有关;在求解线性方程组时,可以采用高斯消去法、塞德尔迭代法、分块解法、波前法等多种数值方法。不同方法对误差的影响也不一样,所以程序设计时应根据数值方法的特点选择适合有限元计算特点的数值方法。

截断误差的大小还与模型性质有关。如果总刚矩阵$[K]$近似于奇异,即$[K]$中某行或某列元素很小(或与其他行、列元素的差别很大),则在求解线性方程组$[K]\{q\} = \{R\}$时,即使总刚矩阵和载荷列阵出现非常小的原始误差,不论采用何种方法,最后得到的方程组解的误差都非常大,这类方程组称为“病态”方程组,建模时应避免出现。

13.1.2 提高精度的措施

上面定性介绍了有限元分析过程中的各种误差来源。这些误差中,一些是程序设计人员在软件开发中需要考虑的,一些是分析人员在建模时应该考虑和能够控制的。下面介绍一些在建模过程中可以采用的提高精度的途径,这些途径并不一定适合于所有分析问题,建模时可视分析问题的特点有选择地采用。

1. 提高单元阶次

单元阶次是指单元插值函数完全多项式的最高次数。阶次越高,插值函数越能逼近复杂的真实场函数,物理离散精度也就越高。其次,由于高阶单元的边界可以是曲线或曲面,因此在离散具有曲线或曲面边界的结构时,几何离散误差也较线性单元小。所以当结构的场函数和形状较复杂时,可以采用这种方法来提高精度。

2. 增加单元数量

增加单元数量,等同于减小单元尺寸,可使有限元解收敛于精确解,收敛速度与单元阶次有关。即单元尺寸减小时,单元的插值函数和边界能够逼近结构的实际场函数和实际边界,物理和几何离散误差都将减小。所以当模型规模不太大时,可以采用这种方法来提高精度。

值得注意的是,精度随单元数量增加是有限的,当数量增加到一定程度后,继续增加单元数量,精度却提高甚微,这时再采用这种方法就不经济了。实际操作时可以比较两种单元数量的计算结果,如果两次计算的差别较大,可以继续增加单元数量,否则应停止增加。

3. 划分规则的单元形状

单元形状的好坏将影响模型的局部精度,如果模型中存在较多的形状较差的单元,则会影响整个模型的精度。所以划分网格时应尽量采用规则的单元形状,特别是在存在应力集中的危险部位。直观上看,单元各条棱边或各个内角相差不大的形状是较好的形状。

本书第 17 章专门介绍单元质量的评估及其处理方法。

4. 建立与实际相符的边界条件

如果模型边界条件与实际工况相差较大,计算结果就会出现较大的误差,这种误差有时甚至会超过有限元法本身带来的原理性误差,所以建模时应尽量使边界条件值与实际值相一致。如采用组合结构建模法,这种方法可以较好地考虑影响较大的结构间的相互作用,避免人为设置边界条件带来的误差。或采用一些测试结果,将计算值与测试值进行比较,以逐步将边界条件调整合理。

5. 减小模型规模

计算误差与运算次数有关,运算次数越多,误差累积就可能越大。所以采用适当措施降低模型规模,减小运算次数,也可能提高计算精度。13.2 节将介绍降低模型规模的各种途径。

13.2 控制规模原则

模型规模是指模型的大小(model size),直观上可用节点数和单元数来衡量。一般来讲,节点和单元数越多,模型规模越大,反之则越小。在数值计算中,主要采用带宽法和波前法求解刚度方程$[K]\{q\}=\{R\}$,运算次数和存储空间不仅与方程阶数有关,而且与节点和单元的编号顺序也有直接关系。从这个意义上讲,模型规模还受节点和单元编号的影响。

在估计模型规模时,除了考虑节点的多少外,还应考虑节点的自由度数。因为总刚矩阵的阶次等于节点数与其自由度数的乘积,即结构的总自由度数。例如在热分析中,每个节点仅有一个温度自由度,模型节点数量增加一倍时,总刚矩阵的阶次也仅增加一倍。而壳单元节点自由度达到 6 个,这时节点数量增加一倍,总刚矩阵的阶次将增加 6 倍。所以在节点数量相同的情况下,后者单元的模型规模要远远大于前者。

13.2.1 规模对计算过程的影响

模型规模主要影响以下因素:

1. 计算时间

据统计,计算机求解线性方程组的近似运算次数正比于 N^3(N 为总刚矩阵的阶次),采用半等带宽存储总刚矩阵时,近似运算次数正比于 NB^2(B 为半带宽)。所以当节点数增加时,运算次数将显著增加。此外,模型单元数增加时,将增加单元矩阵形成和总刚集成的时间。

2. 存储容量

在计算过程中,需要将运算程序和模型原始数据调入到内存执行和参与运算,并不断将暂不需要的计算结果送出到硬盘储存,以腾出内存用于其他计算,需要时再调入内存,所以内、外存之间不断地在进行数据交换。模型规模越大,需要一次调入内存的数据量越大,产出的中间结果就越多。一般来讲,暂存中间结果需要的动态硬盘空间(虚拟内存)要远远大于存储一个模型所用的静态硬盘空间。对于具体的分析环境,机器内存和硬盘

大小总是有限的，如果模型太大，存储容量不够，计算过程就会中断。

3. 计算精度

模型规模越大，需要的运算次数越多，就有可能累积较大的计算误差。当模型过于庞大时（如方程阶数达到数万阶），累积的误差就有可能使计算结果完全失去意义。

4. 其他

除了上述因素外，模型规模越大，对网格划分、模型处理、边界条件引入、多种工况重复计算、模型修改以及结果后处理等都会增加更多的工作量和处理时间。

鉴于上述原因，在建立有限元模型时，在保证计算精度的前提下，应尽量控制或减小模型规模。下面介绍降低模型规模的一些措施，这些措施的具体实施方法将在后续章节中陆续介绍。

13.2.2 降低模型规模的措施

1. 对几何模型进行处理

建立几何模型时，并不总是完全照搬结构的原有形状和尺寸，有时需要作适当的简化和变换处理。合理的近似和变换可以降低模型规模，而仍然保持一定的工程精度要求。几何模型的处理方法有降维处理、细节简化、等效变化、对称性利用和划分局部结构等，这些方法见第 14 章。

2. 采用子结构法

子结构法是将一个复杂的结构从几何上分割为一定数量的相对简单的子结构，首先对每个子结构进行分析，然后将每个子结构的计算结果组集成整体结构的有限元模型，这种模型比直接离散结构所得到的模型要相对简单得多，从而使模型规模得到控制。这种方法可用于静力分析和动力分析。

3. 利用分步计算法

如果结构局部存在相对尺寸非常小的细节，可利用分步计算法来控制模型规模。即第一步计算首先忽略细节，对整个结构采用比较均匀和稀疏的网格；第二步计算从整体结构中划出存在细节的局部建立模型，并以第一步计算的结果作为模型边界条件，这时模型网格可以划得更密，以保证所关心的结构局部具有足够的精度。这种从大到小的分步计算还可以重复多次，以在规模一定的条件下逐步提高计算精度。

4. 进行带宽优化和波前处理

有限元计算的计算时间和存储容量与模型带宽和波前有关，而带宽和波前的大小又取决于节点和单元的编号顺序。所以对节点和单元的编号进行优化，使模型带宽和波前最小，同样能使模型规模降低。

5. 利用主从自由度方法

主从自由度法是在模型的所有自由度上选择部分典型自由度作为主自由度，其余自由度均作为从属自由度，然后将结构运动方程缩减到主自由度上，从而使运动方程的阶次降低。求解缩减的运动方程后，再将主自由度上节点的运动情况还原到所有自由度上，就可以获得整个结构的运动情况。

第14章 几何模型的建立

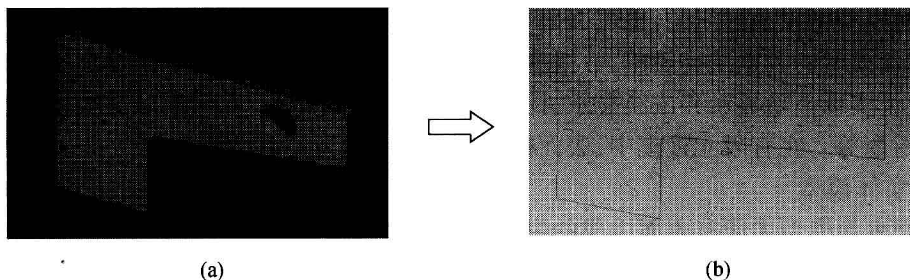
14.1 几何模型的定义和型式

14.1.1 几何模型的定义

建立有限元模型时,首先应根据分析对象的形状、尺寸比和边界条件等特点确定一个适合有限元分析的几何区域,这种反映分析对象几何特征的求解域称为几何模型。

由于自动分网必须基于几何模型,因此分网之前应首先在计算机内建立几何模型,该过程称为几何建模。几何建模属于CAD技术领域,产品设计时,设计人员会对产品零件进行完整的几何描述。为区别起见,对零件形状、大小进行完整描述的模型称为CAD模型。而有限元分析中的几何模型,由于分网、减小规模等要求,可能对CAD模型进行适当简化和处理,因此其维数、形状及大小有可能与原结构完全相同,也可能存在一些差异,两者并不要求完全相同。

例如,图14-1(a)为一支架的CAD模型,由于是平面应力问题,不需要厚度尺寸,因此几何模型是一平面图形。同时为了减少网格,忽略了应力较小部位的倒角和圆孔。



(a) (b)

图14-1 有限元分析几何模型与CAD模型的区别
(a) CAD模型;(b) 有限元分析几何模型。

14.1.2 几何模型的型式

在CAD技术中,几何模型可以分为线框模型、曲面模型(包括平面)和实体模型三种型式。不同型式的几何模型用于不同维数单元的自动划分。

1. 线框模型

用组成结构的棱边表示结构形状和大小的模型称为线框模型(wireframe model)。例如图14-2(a)所示的立方体,若给定了8个顶点的坐标值,便可利用这些顶点组成的12条棱边唯一地确定该立方体的形状和大小,这12条棱边就形成了立方体的线框模型。

线框模型是最早使用的几何模型,其特点是数据量少、数据结构简单、算法处理方便,模型输入可以通过定义线段端点坐标来实现。但它的几何描述能力差,只能提供一个铁

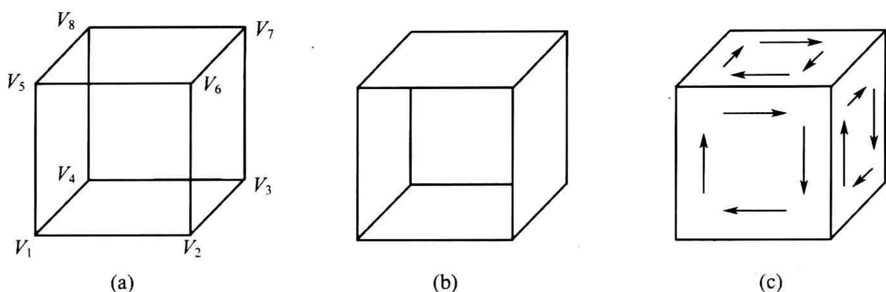


图 14－2　几何模型的型式

丝笼似的框架，对形状的理解很容易产生多义性，不能利用算法消除隐线，不能生成结构的浓淡图像和剖视图，也不能计算结构的质量、体积、惯性积等物理特性。

这类模型的建立与实体模型和曲面模型相比要简单得多，一般是在平面或空间坐标系中建立点，再由点生成直线、圆弧或其他曲线，由这些曲线组成平面或空间的线框模型。线框模型可用于杆件系统一维单元的自动划分，但由于一维单元的节点位置比较容易确定，所以杆件系统多采用半自动方法进行离散。

2. 表面模型

若将线框模型中棱边围成的封闭区域定义成面，那么由这些面形成的模型就是表面模型（surface model），或称曲面模型。直观上看，表面模型可理解为在线框模型的框架上蒙上了一层表皮。例如在图 14－2(a)所示的线框模型上，除由顶点 V_1、V_2、V_6、V_5 组成的封闭区域外，将其他 5 个封闭区域定义成面，便可形成图 14－2(b)所示的表面模型。

表面模型可以是封闭的，也可以是不封闭的，因此多用于三维曲面造型。与实体模型相比，表面模型的数据结构简单，数据存储量少，操作运算方便。由于模型定义了边界表面，因此可实现消隐显示和浓淡显示、计算表面积和表面曲率、求两模型交线以及生成数控加工指令等。在有限元建模中，表面模型用于二维单元的自动划分。

3. 实体模型

若把表面模型中所有表面围成的封闭体积定义成结构材料的存在空间，则形成的模型就是实体模型（solid model）。直观上看，实体模型可理解为在表面模型定义的封闭体积内充满了材质。因此实体模型必须是封闭的，即模型的各个表面必须形成封闭的体积，像图 14－2(b)中那样的表面模型就不能定义成实体模型。如果将顶点 V_1、V_2、V_6、V_5 组成的封闭区域也定义成面，再利用各个边界表面的有向性规定结构材料存在的一侧，就可形成如图 14－2(c)所示的实体模型，其中箭头表示用右手螺旋法则规定表面哪一侧存在材料。

和表面模型相比，实体模型的数据量较大，数据结构较复杂。但由于它定义了结构的完整空间，因此可进行剖切显示其内部结构，进行布尔运算，计算结构体积、质量、惯性矩等。

在有限元建模中，实体模型主要用于空间实体单元的自动生成，利用其边界表面也可进行二维单元的自动划分。

不同的结构类型要求相应的几何模型，如轴对称问题的几何模型为平面，薄壳结构为曲面，空间结构为实体等。表 14－1 列出了各种结构类型所对应的几何模型型式。

表 14-1　结构类型所对应的几何模型型式

结构类型	几何模型型式
平面(应力、应变)问题	表面模型(平面)
轴对称问题	
空间问题	实体模型
杆件结构	线框模型
薄板弯曲问题	表面模型(三维)
薄壳问题	
轴对称薄壳问题	线框模型

14.2　形状处理方法

几何模型是网格划分的基础,它对网格数量、质量、布局和分网过程都有直接影响。对分析对象的形状进行适当处理,既能保持必要的精度要求,又能减少网格数量并获得合理的网格形式。

结构形状处理需根据形状和边界条件的特点进行,本节介绍一些常见的处理方法。

14.2.1　降维处理

平面问题和轴对称问题的几何模型是平面,在平面上划分网格比在空间区域划分要容易得多,单元数量也少得多,计算也相对简单。实际结构完全满足平面问题或轴对称问题条件的并不多,但有些结构若作某些近似,仍可按平面问题或轴对称问题来计算,这种把三维问题简化为二维问题的处理方法称为降维处理。

例如在图 14-3 中,轴与轮毂紧配合,轮辐圆周上设计了六个均布的辐孔。在计算轮毂与轴颈表面的接触压力时,由于辐孔尺寸较小且远离接触面,它们对接触压力的影响不大,因此建模时可以忽略,这样轮毂可简化为轴对称结构。又如图 14-4 中的螺纹连接,由于螺纹升角很小,也可认为螺纹牙的受力在周向相同,从而将螺栓和螺母近似为轴对称结构。

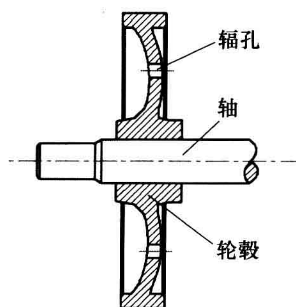


图 14-3　紧配合结构

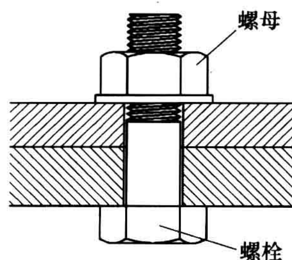
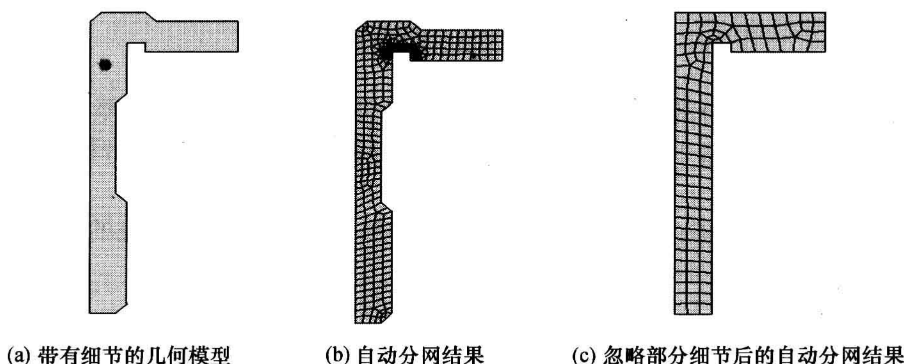


图 14-4　螺纹连接结构

14.2.2 细节简化

结构中常常存在一些相对尺寸很小的细节,如倒圆、倒角、退刀槽、加工凸台等。细节的存在将影响网格的大小、数量和分布。因为在自动分网时,一段直线或曲线至少划分一个单元边,一个平面或曲面至少划分一个单元面,一个圆最差也应由三个单元边来离散,所以细节将限制网格的大小,从而影响整个模型的网格数量和分布。

图 14－5(a)为一轴对称零件,由于配合和加工需要,结构中设计了一些倒角、退刀槽和配合面,倒角的长度、退刀槽的长和宽、配合面的凸出高度相对总体尺寸都很小,如果几何建模时将这些细节都考虑进去,自动分网结果如图 14－5(b)所示,这时网格数量为140。若忽略某些细节,则自动分网结果如图 14－5(c)所示,单元数量较前者减小了68,由此可以看出细节对网格划分的影响。细节尺寸与总体尺寸相差越大,细节对网格分布和数量的影响越严重,因此应尽量忽略中一些不必要的细节。



(a) 带有细节的几何模型　(b) 自动分网结果　(c) 忽略部分细节后的自动分网结果

图 14－5　细节对网格划分的影响

在决定细节取舍时可以参考以下两条原则。

1. 细节处的应力大小

如果细节处于高应力区,这种细节常常会引起应力集中,细节的尺寸和形状对应力大小有很大影响,因此这类细节非但不能忽略,且在分网时还应加以特别注意。例如图 14－6中的悬臂挂耳,在计算其应力时,由于悬臂根部应力大,所以根部的两个过渡圆弧必须考虑,为此在几何模型中还包括了根部附近的部分机架,以便用较高的精度计算根部应力。而自由端的应力小,因此端部的两个倒圆可以忽略。挂耳几何模型及其网格划分如图 14－6(a)所示。

如果细节的取舍事先难以判断,这时可以先考虑所有细节,并采用较稀疏的网格进行粗算,然后根据计算出的应力分布决定细节的取舍。大应力区域内的细节应加以考虑,并细化这些细节处的网格。小应力区域内的细节可以忽略,且网格可以适当加大。

2. 计算内容

通常,细节对结构的应力大小和分布影响较大,所以在计算应力时应特别注意细节的取舍。在变形计算和模态分析时,由于细节处的材料很少,忽略或增加这部分材料对结构的质量和刚度分布影响不大,因此一般都可以忽略。例如,同样对于图 14－6 中的挂耳,

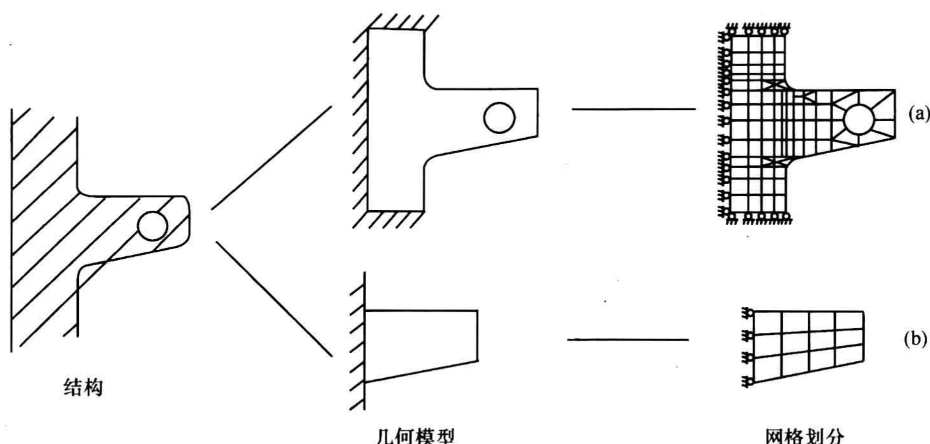


图 14－6　挂耳的细节简化及网格划分

（a）静力分析中的几何模型及网格划分；（b）动力分析中的几何模型及网格划分。

动态分析时就可以忽略根部和端部所有 4 个倒圆，甚至连销孔也可以不计，这时挂耳的几何模型和网格划分如图 14－6（b）所示。同样，在只计算结构的静态变形时，也可以考虑较少的细节。

在热分析中，由于细节对结构的温度分布影响很小，细节一般不会引起局部高温，这时可考虑较少细节。但如果温度计算后还要计算热应力，由于温度和应力计算一般采用相同的网格（热—力耦合分析），所以热分析时应事先考虑细节对热应力的影响。

以上所述的是结构本身存在的细节。当在计算机内建立结构几何模型时，由于一些复杂模型要经多次运算或变换才能生成，因此模型中有时可能存在一些因误差等原因产生的相对很小的几何元素，这种小元素同样也会影响网格的划分，模型中应避免和消除这类元素，关于这种小元素对网格划分的影响和处理方法将在第 16 章介绍。

14.2.3　形式变换

分析结构的形状是多种多样的，有些结构的形状尽管不是很复杂，但网格划分却很困难。这时若对结构形式作适当变换，则可能使网格划分更容易，分出的单元更少。

图 14－7 是一个用于大型结构支撑的箱式立柱，立柱用板件焊接而成，为提高立柱刚度，板的一侧附有一定数量的加强肋。这种立柱的离散采用板梁组合方式，即平板部分用板单元，加强肋用有偏心的梁单元。这种方式有两个不便，一是板单元划分要适应加强肋的分布，以便进行单元组合，而自动分网难以满足这种要求；二是加强肋较多，单元组合较麻烦，离散后的单元数量也较多。

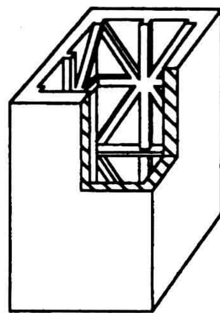


图 14－7　箱式立柱

如果去掉上述立柱上的加强肋，立柱则由平板构件组成，这样便能直接进行自动分网，为此可进行等效变换。由于立柱用于支撑，其特性要求主要是刚度，因此可按等刚度原则将带肋板变换为平板，即在相同受力条件和边界条件下，带肋板与等效平板的对应点应具有相同的变形。

从立柱中取出具有相同米字形加强肋的带肋板，如图 14－8(a)所示，采用板梁组合建模方式。设这种带肋板模型的总刚度矩阵为$[K^a]$，其矩阵元素为 $k_{ij}^a(i,j=1,2,13,\cdots,n;n$ 为模型节点数)。又设去掉加强肋后的平板与带肋板具有相同的板单元划分，模型总刚度矩阵为$[K^b]$，矩阵元素为 $k_{ij}^b(i,j=1,2,13,\cdots,n)$。显然，由于去掉了加强肋，板的刚度下降，因此有

$$k_{ij}^b \leqslant k_{ij}^a \tag{14－1}$$

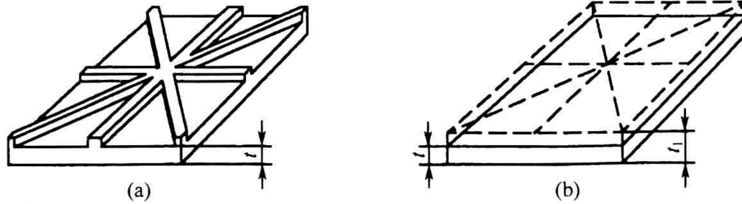


图 14－8　带肋板的等效变换

等刚度变换要求等效平板与原有带肋板在相同的边界条件下对应节点的位移相同，即

$$\{u^a\} = \{u^b\}$$

因变换前后的节点力矢量相同，因此等刚度条件为

$$k_{ij}{}^b = k_{ij}^a \tag{14－2}$$

由于板单元的刚度矩阵与弹性模量 E 成正比，因此可以调整 E 的大小，使式(14－2)变为

$$E_{ij}k_{ij}^b = k_{ij}^a$$

从而

$$E_{ij} = \frac{k_{ij}^a}{k_{ij}^b}$$

取各个刚阵元素弹性模量的平均值作为等效平板的弹性模量，即

$$E^b = \frac{1}{n^2}\sum E_{ij} \quad (i,j = 1,2,13,\cdots,n) \tag{14－3}$$

上述变换只是改变板件的材料特性，而没有改变板的尺寸，如图 14－18(b)中的实线所示。由于板单元的刚度矩阵与板厚度 t 的三次方成比例，因此也可以改变板的厚度，使式(13－1)成为

$$t_{ij}^3 \cdot k_{ij}^b = k_{ij}^a$$

从而

$$t_{ij} = \sqrt[3]{\frac{k_{ij}^a}{k_{ij}^b}} \tag{14－4}$$

同样取各个厚度的平均值作为等效平板的厚度，即

$$t^b = \frac{1}{n^2}\sum t_{ij} \quad (i,j = 1,2,13,\cdots,n) \tag{14－5}$$

上述变换不改变板的材料特性，而改变板的尺寸，如图 14－8(b)中的虚线所示。

例如带肋板的尺寸为 100mm × 200mm × 4mm，米字型肋的尺寸为 4mm × 4mm，按第 1 种方法进行等效变换时，材料的弹性模量由原来的 29.4N/cm^2 改变为 132.7N/cm^2，按第 2 种方法处理时，板的厚度由 4mm 变换为 4.14mm。经这样的变换处理后，整个立柱变为一个平板结构，其几何模型便是一个由平面组成的表面模型，如图 14－9 所示，在该模型上便可直接进行自动分网。

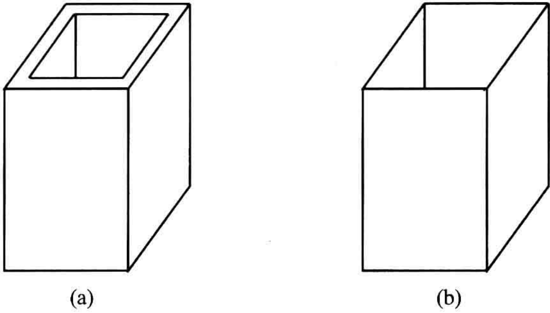


图 14－9　等效变换后的立柱及其几何模型

（a）变换后的立柱；（b）立柱几何模型。

14.2.4　局部结构

工程中有些结构只是在某一局部受力较大，而其他部位不受力或受力很小，这时就可以从整个结构中取出受力最严重、应力或变形最大的局部区域来建立几何模型。有些结构即使是整体受力，也可以只取出所关心的重要部位进行分析，而舍去部分的影响可用边界上的力或位移代替。由于局部结构的求解区域缩小，因而能使建模和计算简化。

局部结构是从整体结构中人为划分出来的，进行局部结构分析的关键是如何确定划分边界的位置及边界上的力或位移条件，以较准确考虑舍去部分的作用。

图 14－10 是齿轮分析中常见的局部模型，其中单齿模型较简单，计算结果偏于安全。三齿模型考虑了齿轮啮合时轮齿的重叠，传递的力由三个齿分担，计算结果包括了轮齿之间的相互影响，即一个轮齿弯曲时在相邻轮齿中引起的应力，因而比单齿模型更合理，但模型较复杂。对于载荷沿齿宽分布均匀的直齿轮，可以采用平面模型。对于斜齿轮，或需要考虑载荷沿齿宽分布不均的直齿轮，则需要用三维模型。研究表明，对于直齿轮，当高度 $AB > 1.5m$（m 为齿轮模数）、宽度 $BD > 3m$ 时，边界 $ABCD$ 的位移均小于最大位移的 3%，因此划分边界可取为零位移约束。

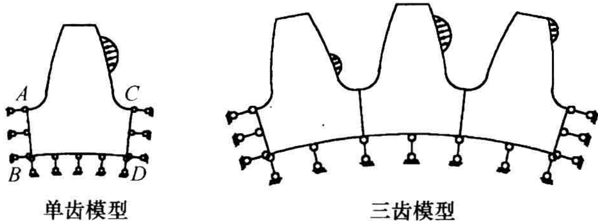


图 14－10　齿轮局部模型

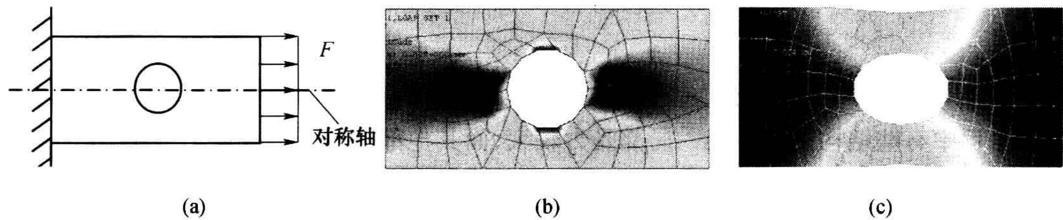
建立局部模型的关键在于如何确定划分边界的位置。划分边界可以通过结构实物的测试数据或经验确定,也可以利用试算确定,试算时可以采用以下两种途径。

(1) 首先划分一个较小的边界,然后增加边界尺寸,若计算发现边界尺寸增加时局部结构中的应力或变形没有变化或变化非常小,则可取上一步边界作为精确计算的边界。

(2) 首先划分一个较大的边界或取整个结构,若计算发现边界以内仍有大部分节点位移为零,则可将边界缩小到这些节点位置。这种方法不仅可以确定划分边界的位置,还可以确定比较合理的边界形状。

14.2.5 对称性的利用

当结构形状和边界条件具有某种对称性时,应力和变形也将呈相应的对称分布。图14-11是一相对水平轴对称的平板,在对称力的作用下,对称轴两边的应力和变形完全相同。在这种情况下,只要取出结构的1/2计算,便能了解整个结构的应力和变形,从而减小模型规模。



(a) (b) (c)

图14-11 对称结构及其计算结果

(a) 对称结构图;(b) 应力图;(c) 变形图。

1. 对称的基本形式

对称性有反射对称和周期对称两种基本形式。

(1) 反射对称 当结构的某一部分相对某一平面进行映射时,如果该部分的形状、载荷和约束条件与另一部分完全重合,则这种对称形式称为反射对称。反射对称又包括两种情况,一是载荷对称情况,即载荷反射后大小和方向均重合,如图14-12(a)所示。一是载荷逆对称情况,即载荷反射后大小重合,但方向相反,如图14-12(b)所示。

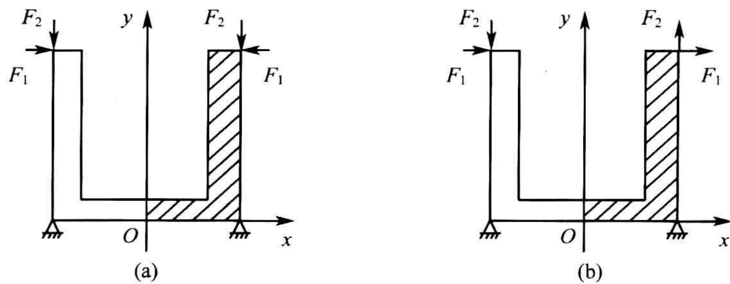


图14-12 反射对称形式

(a) 载荷对称;(b) 载荷逆对称。

如果结构具有反射对称性,就可以取出对称面任一侧的1/2结构进行分析,例如图14-12中就可以取出阴影部分的结构。

如果取出的结构还具备反射对称性，那么还可以进一步取结构的1/2，直到取出的结构无对称性为止，如图14－13所示。即当结构不止具有一个反射对称面时，可以取出结构的1/4、1/8甚至更小进行分析。

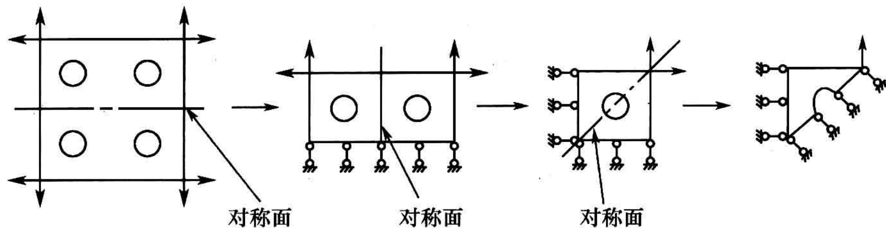


图14－13　具有多个对称面的反射对称结构

值得注意的是，反射对称不仅要求结构的形状、载荷对称，而且还要求位移约束也对称。例如图14－14所示的结构，形状对称面的左侧为固定约束，右侧为滑动约束，所以该结构不具有反射对称性。此外，对称部分的材料特性也应相同。

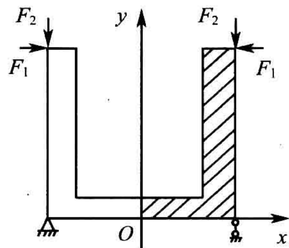


图14－14　非反射对称结构

有些结构的载荷虽然不对称，但只要结构形状和位移约束是对称的，将载荷进行适当分解，仍可将一般载荷化为几种对称载荷的组合，图14－15给出了两个分解示例。根据叠加原理，原载荷作用下结构的变形和应力应等于几种载荷分别作用时变形和应力的叠加。这种分解是有实际意义的，因为目前很多有限元分析软件都允许对同一模型进行不同工况的重复计算，且能对计算结果进行自动叠加。而对于大型复杂结构，减小几何模型能使单元和节点数量大大减小。

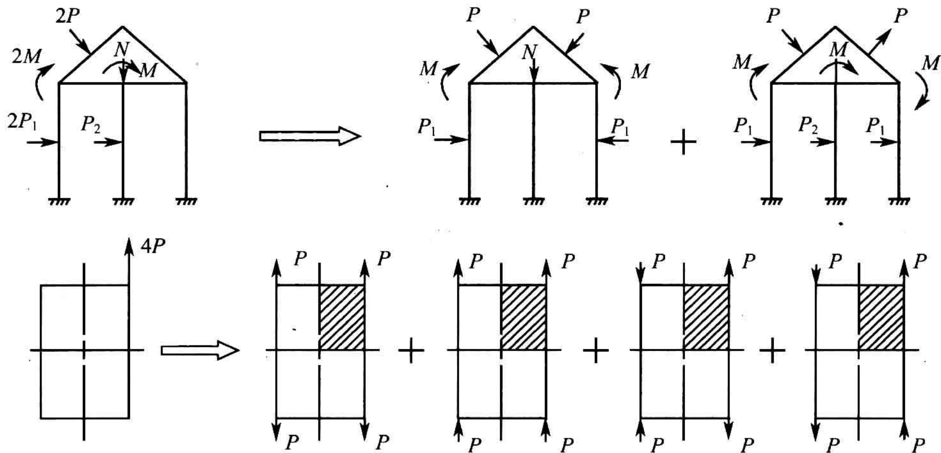


图14－15　一般载荷分解为对称载荷

（2）周期对称　指结构可以划分为若干形状完全相同的子结构，当任一子结构绕对称中心旋转一定角度后，该子结构的形状、载荷和位移约束将与其他子结构完全重合。工程中如发动机叶片、花键、螺旋桨等均属于周期对称结构。

当结构具有周期对称性时，其内部应力和变形也将呈周期变化。图14－16是一周期

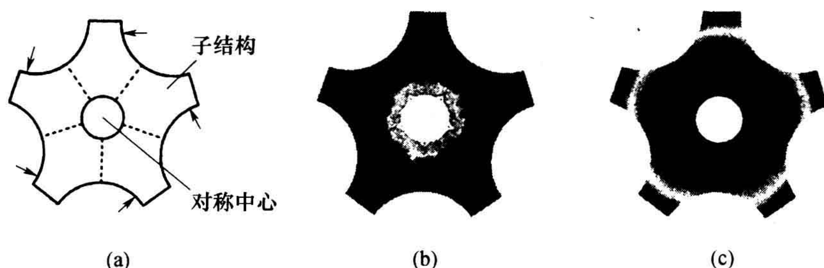
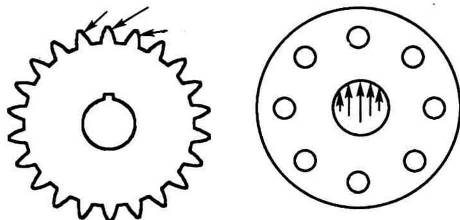


图 14－16　周期对称结构的应力与位移分布

（a）周期对称结构；（b）应力分布；（c）位移分布。

对称结构及其分析结果，可以看出，在用虚线画出的子结构中，各个子结构的变形和应力是完全相同的。因此，对于这类结构可以只取任一子结构进行分析。

和反射对称相似，周期对称不仅要求结构形状对称，而且还应保证载荷和位移约束对称，而且各子结构的材料特性和物理特性也应相同。例如图 14－17 所示的齿轮和法兰盘，尽管结构形状呈周期变化，但载荷不具有周期性，因此不是周期对称结构。


图 14－17　非周期对称结构

2. 对称面上的位移条件

在利用对称性时，要正确定义对称面上的位移条件，以准确考虑舍去部分对分析部分的作用。

（1）反射对称的位移条件　当载荷是对称载荷时，对称面上的位移条件为：

① 垂直于对称面的移动位移分量为零；

② 方向矢量平行于对称面的转动位移分量为零。

例如，取图 14－12(a)所示平面应力结构的阴影部分分析时，对称面上的位移条件为

$$u_i = 0 \quad (i\text{ 表示对称面上的节点}) \tag{14-6}$$

对于图 14－18(a)所示的空间梁结构，对称面上的位移条件为

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ \theta_{1y} = \theta_{2y} = \theta_{1z} = \theta_{2z} = 0 \end{cases} \tag{14-7}$$

当载荷是逆对称载荷时，对称面上的位移条件为：

① 平行于对称面的移动位移分量为零；

② 方向矢量垂直于对称面的转动位移分量为零。

例如，取图 14－12(b)所示平面应力结构的阴影部分分析时，对称面上的位移条件为

$$v_j = 0 \quad (j\text{ 表示对称面上的节点}) \tag{14-8}$$

对于图 14－18(b)所示的空间梁结构，对称面上的位移条件为

$$\begin{cases} v_1 = v_2 = 0 \\ w_1 = w_2 = 0 \\ \theta_{1x} = \theta_{2x} = 0 \end{cases} \tag{14-9}$$

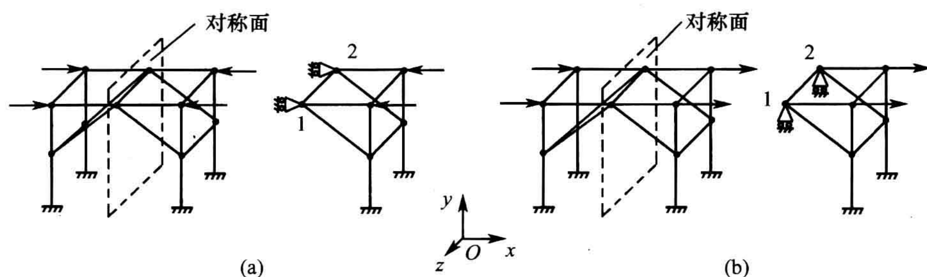


图 14－18　反射对称结构的位移条件

比较式(14－6)～式(14－9)可知,反射对称结构在两种载荷条件下的位移条件刚好是互补的,即对称载荷时为零的位移分量在逆对称载荷时不为零,而不为零的位移分量则为零,反之亦然。图 14－19 放大画出了图 14－18 中两个反射对称结构的变形图,从该图可以看出位移条件的几何意义。

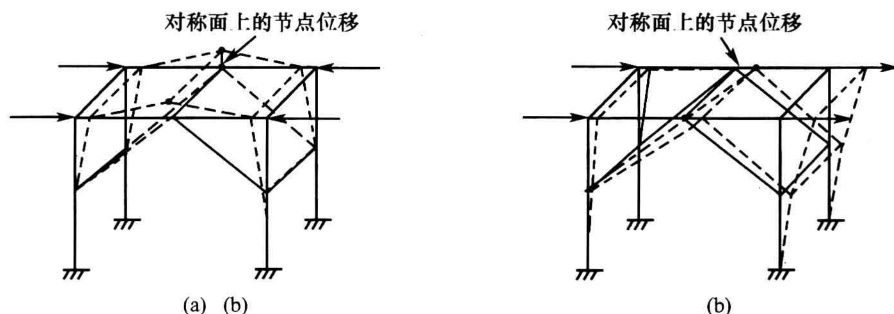


图 14－19　对称结构的变形图

(2) 周期对称的位移条件　图 14－20(a)为一周期对称的花键结构,它可以划分为 8 个相同的子结构,如图 14－20(b)所示。当其中任一子结构 A 旋转 45°的整数倍时,其形状、载荷和位移约束将与其他子结构完全重合,因此各子结构的变形是相同的。考查子结构 A,当它旋转 45°时,其 aa 边界正好与子结构 B 的 bb 边界重合,由于 A、B 两子结构的变形相同,因此 aa 和 bb 两条边界上对应点的位移状态应完全一样,这就是周期对称结构划分边界上的位移条件。

为了在有限元模型上施加位移条件,被分析子结构的两条划分边界上应划分为具有相同的节点数量,且节点位置应严格对应相同,如图 14－19(c)所示。这样在直角坐标系下,位移条件可表示为

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i+5} \\ v_{i+5} \end{Bmatrix} \quad (i = 1,2,3,4,5) \tag{14-10}$$

如果在结构中心 O 建立极坐标系 $Or\theta$,并作为节点的位移坐标系,则位移条件可以方便地表示为

$$\begin{cases} u_i = u_{i+5} \\ v_i = v_{i+5} \end{cases} \quad (i = 1,2,3,4,5) \tag{14-11}$$

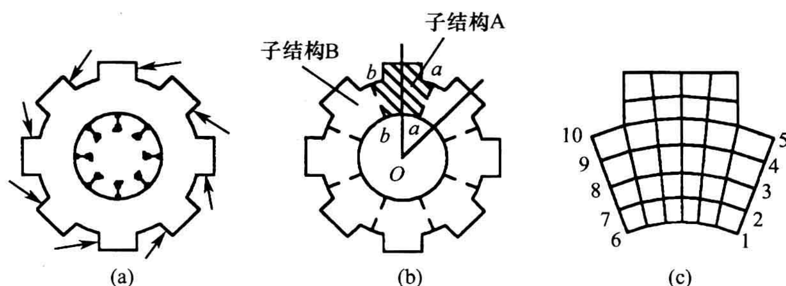


图 14－20　周期对称结构的位移条件

比较反射对称和周期对称的位移条件可以看出,反射对称的位移条件是绝对位移约束,可以消除结构的刚体位移。而周期对称的位移条件是相关位移约束,不能消除结构的刚体位移,分析时还需要其他的绝对位移约束。建模时相关位移约束式(14－10)和式(14－11)可采用以下方法进行处理:

① 多点约束等式或耦合约束　将式(14－10)和式(14－11)表示的位移关系直接加在边界上的对应节点上。

② 特殊单元法　用刚体单元或约束单元将边界上对应的节点对连接在一起,以保证它们具有相同的位移状态。

3. 对称性利用的注意事项

利用结构对称性进行分析时,应注意以下几个问题:

(1) 若对称面上作用有载荷,则应取载荷的 1/2 进行分析。

(2) 若对称面上存在板或梁,则离散板和梁的单元所有节点均位于对称面上,这时板或梁单元的刚度应取整个单元刚度的 1/2,而不是取 1/2 单元的全部刚度。

例如在图 14－21(a)所示的对称结构中,对称面 $A-A$ 上作用有一集中载荷 P,并设计有一矩形加强肋。在取右边部分进行分析时,载荷应取为 $P/2$,离散加强肋的梁单元弹性模量应取材料弹性模量的一半,如图 14－21(b)所示。

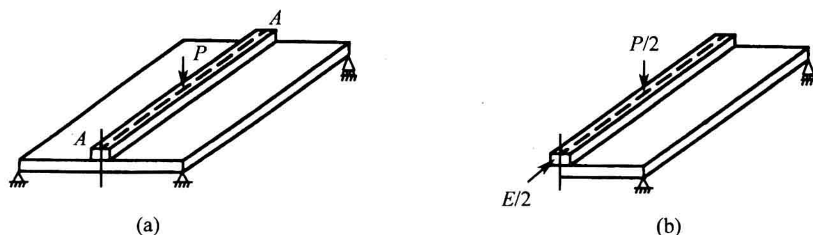


图 14－21　对称面上的载荷和单元

(3) 用对称面剖分结构时,应尽量使剖分面不在结构的最大应力位置。如对于图 14－22(a)所示的结构,该结构有 $A-A$ 和 $B-B$ 两个对称面,按一般原则可用这两个面剖分出结构的 1/4 进行分析,但由于 V 形槽根部存在应力集中,为了更好地研究该部位的应力,最好只用 $A-A$ 面剖分结构的一半进行分析,如图 14－22(b)所示。

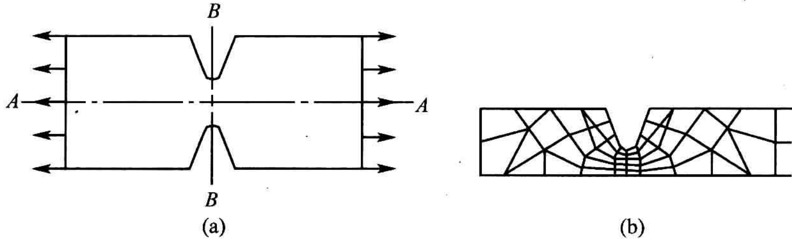


图 14－22　对称面上存在最大应力的结构

4. 热分析时结构对称性的利用

当结构形状和热边界条件具有某种对称性时,结构内部的温度和热流也呈相应的对称分布,这时也可以只划出结构的一部分进行分析。图 14－23(a)是一具有反射对称的热分析结构,图 14－23(b)和(c)分别为计算出的温度分布和热流方向。可以看出,结构左右、上下两部分的温度分布是相同的,热量的流动情况也完全一样。由于对称面左右、上下两侧的结构形状和热边界条件相同,所以任一侧的热量不会通过对称面流向另一侧,否则将破坏温度的对称性,从图 14－23(c)也可以看出对称面附近的热流箭头均不会穿越对称面。因此,在热分析中利用对称性时,对称面上的热边界条件应取为绝热边界条件。它可以通过令对流边界条件的换热系数为零来定义。

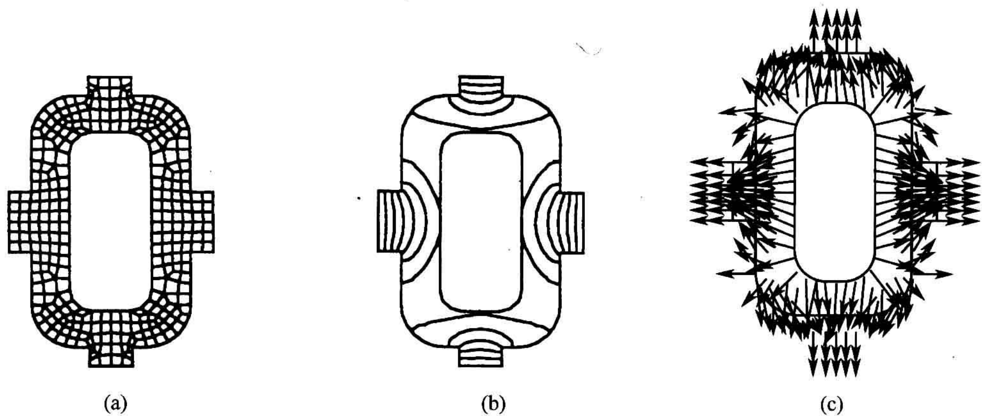


图 14－23　热对称结构及其计算结果

(a) 热对称结构;(b) 温度分布;(c) 热流矢量图。

第 15 章　单元类型及特性定义

划分网格之前首先需要选定单元类型。单元类型的选择应根据分析类型、形状特征、计算数据特点、精度要求和计算条件等因素综合考虑。为适应特殊的分析对象和边界条件，一些问题需要采用多种单元进行组合建模。

单元特性定义了单元内部数据，包括材料特性、物理特性、截面数据等。这些数据在形成单元特性矩阵时是必需的，它们可以在分网之前定义，也可先采用缺省值，形成网格后再进行修改。

单元类型是否选择合理，单元特性是否定义正确，对计算结果都将产生很大影响。本章介绍单元类型选择和单元特性定义方法，以及各类单元的应用特点。

15.1　单 元 分 类

表 15－1 列出了一些常见的结构单元类型。

表 15－1　常见结构单元类型

单元名称	维 数	节点自由度	应 用
平面应力单元 Plane stress element	2	2 个移动自由度	平面应力结构
平面应变单元 Plane strain element	2	2 个移动自由度	平面应变结构
空间实体单元 Solid element	3	3 个移动自由度	空间任意三维结构
轴对称实体单元 Axisymmetric solid element	2	2 个移动自由度	空间轴对称结构
板单元 Plate element	2	3 个移动自由度 3 个转动自由度	平板结构
壳单元 Shell element	2	3 个移动自由度 3 个转动自由度	曲面壳体
轴对称壳单元 Axisymmetric shell element	1	2 个移动自由度 1 个转动自由度	轴对称曲面壳体
杆单元 Rod element	1	3 个移动自由度（平面杆 2 个）	桁杆结构
梁单元 Beam element	1	3 个移动自由度（平面梁 2 个） 3 个转动自由度（平面梁 1 个）	梁结构

（续）

单元名称	维 数	节点自由度	应 用
弹簧单元 Spring element	1	3 个移动自由度（平面 2 个） 3 个转动自由度（平面 1 个）	弹簧结构
集中质量单元 Lump element	0	3 个移动自由度 3 个转动自由度	体积相对很小的结构

表中列出的结构单元可用于离散工程中具体的结构类型。但在有限元建模时，有时为了模拟特殊的边界条件和单元之间的关系，有些软件也提供了一些非结构单元。如模拟两个结构接触的接触单元、间隙单元和界面单元，模拟刚性结构的刚体单元，模拟节点间位移关系的约束单元等。这些特殊单元的类型和特性因软件不同而异，具体使用时需参考软件使用手册。

按照不同的分类方法，上述单元可分为以下不同的形式。

15.1.1 一维、二维和三维单元

根据网格的维数特征，单元可分为一维单元、二维单元和三维单元，如图 15 – 1 所示。

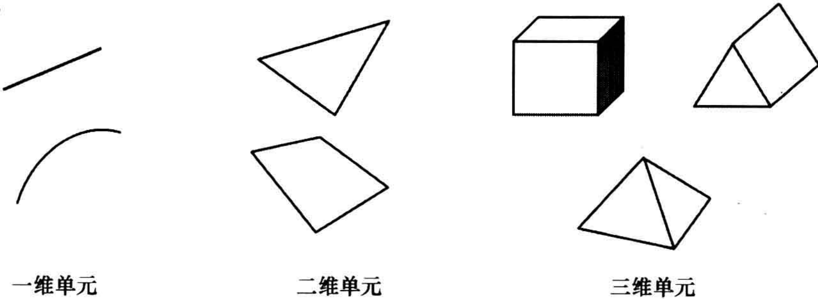


图 15 – 1 一维单元、二维单元和三维单元

一维单元的网格为一条直线或曲线。直线表示由两个节点确定的线性单元，曲线代表由两个以上节点确定的高次单元，或具有特定形状的线性单元（如曲梁单元）。杆单元、梁单元、轴对称壳单元等都属于一维单元。一维单元只能反映结构长度方向的尺寸，不能反映截面大小和形状。

二维单元的网格是一个平面或曲面，它不能反映结构厚度方向的尺寸。这类单元包括平面单元、轴对称实体单元、板单元、壳单元等。二维单元的形状通常有三角形和四边形两种，在自动划分网格时，这类单元要求的几何模型是表面模型或实体模型的边界面。

三维单元的网格具有空间三个方向的尺寸，其形状有四面体、五面体和六面体，这类单元包括空间实体单元和厚壳单元，在自动分网时它要求的几何模型是实体模型。

15.1.2 线性、二次和三次单元

根据单元插值函数完整多项式的最高阶次数的多少，单元可分为线性单元、二次单元和三次单元，如图 15 – 2 所示。

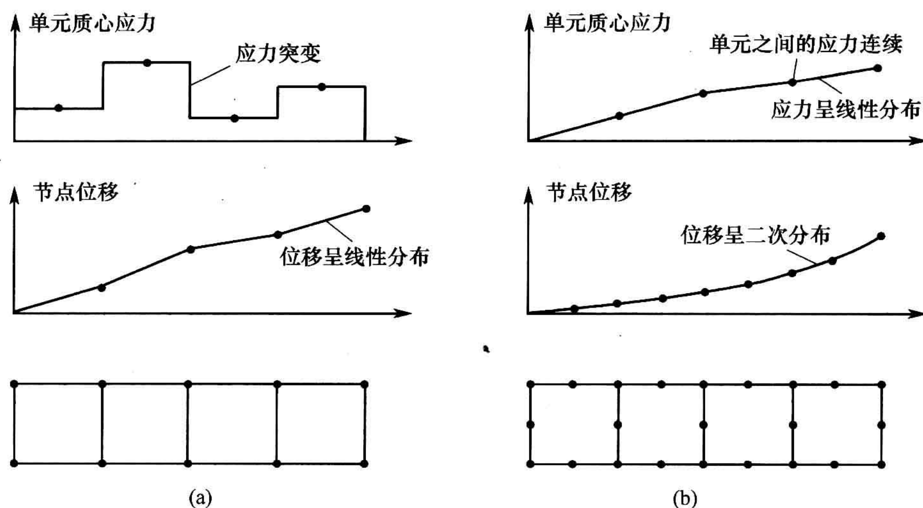


图 15－2　线性单元和二次单元的位移、应力变化

（a）线性单元；（b）二次单元。

线性单元具有线性形式的插值函数，其网格通常只有角节点而无边节点，网格边界为直线或平面。这类单元的优点是节点数较少，在精度要求不高或结果数据梯度不大的场合，采用线性单元可以得到较小的模型规模。但由于单元位移函数是线性的，单元内的位移呈线性变化，而应力则是常数，因此单元之间的应力不连续，单元边界上存在应力突变，如图 15－2(a)所示。

二次单元的插值函数是二次多项式，其网格不仅在每个顶点处有角节点，而且在棱边上还存在一个边节点，因此网格边界可以是二次曲线或曲面。这类单元的优点是几何和物理离散精度都较高，单元内的位移呈二次变化，应力呈线性变化，因此单元边界上的应力是连续的，如图 15－2(b)所示。但在单元数量相同的条件下，二次单元的节点数比线性单元多，模型规模偏大。

三次单元的插值函数是三次多项式，其网格的每条边上存在两个边节点，有些三次单元还具有内部节点。这类单元的离散精度更高，但由于单元节点数较多，网格划分较困难，模型规模很大，一般用于具有特殊精度要求的场合。

15.1.3　传弯单元与非传弯单元

根据单元节点自由度变量的性质不同，单元可分为传弯单元和非传弯单元。如果节点仅具有移动自由度，单元之间通过节点只能传递力而不能传递弯矩，则称这类单元为非传弯单元。平面单元、轴对称实体单元、空间实体单元、杆单元等均属于这类单元。如果节点既具有移动自由度又具有转动自由度，单元之间通过节点可以传递弯矩，则称这类单元为传弯单元。梁单元、板单元和壳单元均为传弯单元。

从插值函数的连续性要求和形式看，非传弯单元的位移连续性只要求位移本身连续，所以又称 C^0 阶单元，其插值函数的形式为拉格朗日多项式，因此有时也称为拉格朗日族单元。而传弯单元不仅要求位移本身连续，还要求位移的一阶导数连续，其位移多项式的形式为 Hermit 多项式，所以又称为 C^1 阶单元或 Hermit 族单元。

在不同类型单元的组合建模中，区分传弯单元与非传弯单元是有用的。当组合的两类单元同属传弯单元或非传弯单元时，由于节点自由度变量的性质相同，一个单元上的力和力矩可完整地传递到另一个单元，因此这样的单元可直接连接，不需额外处理。但是当传弯单元与非传弯单元组合时，如图 15－3 所示，传弯单元上的力矩就不能传递给非传弯单元，这时就必须进行必要的约束处理。

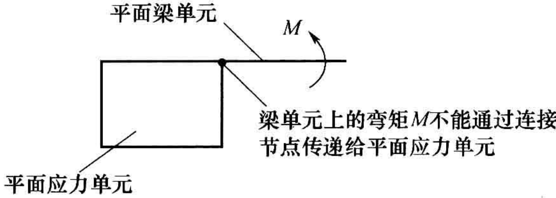


图 15－3　传弯单元与非传弯曲单元的组合

15.1.4　位移单元和温度单元

根据有限元分析的类型不同，单元可分为位移单元和温度单元。在其他应用领域中，还有流场单元、电磁场单元及塑料单元等。位移单元以节点位移为变量，用于位移场分析；温度单元以节点温度为变量，用于温度场计算。尽管不同分析类型的单元可能具有相同的单元名称和网格形状，但单元特性矩阵是不同的。如同样对于空间六面体单元，位移单元的刚度矩阵与材料弹性模量和泊松比有关，而温度单元却与材料的传热系数有关。所以在选择单元时，必须根据分析的类型选择相应类型的单元。

15.2　单元特性定义

有限元模型中，每个单元除了表现出一定的外部形状（网格）外，还应包括单元分析需要的各种数据，如平面应力单元的弹性模量、泊松比和厚度等（见式（2－54））。网格反映了单元的外部特征，网格的组合则反映了分析对象的形状和大小；单元特性是单元的不可见特征，包括材料特性、物理特性、截面特性等。单元的完整组成如图 15－4 所示。有限元建模时，“单元”和“网格”通常没有严格的区分。

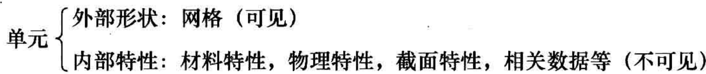


图 15－4　单元组成

由于每个单元都有大量特性数据，如果这些数据都依附于单元，则单元数据量将非常庞大。因此单元特性通常利用各种特性表来定义。即独立于单元建立特性表，特性值存储在特性表中，单元与特性表链接。因此单元数据中只保留了一个链接信息，而不是所有特性数据。

由于不同单元可能具有相同的特性，所以一个特性表通常可被一组单元共用。由于特性表独立于单元，因此删除单元并不会删除单元所参考的特性表。但单元相关几何数据是依附于单元存在的，不同单元的相关几何数据可能不一样，删除单元后这些数据也随之消失。

特性表通常有材料特性表、物理特性表和截面特性表三种形式。特性表中根据材料

类型、单元类型及截面形式规定了各种相应的特性项，分析人员输入表中各个特性项的具体值，便可建立各种具体的特性表，分网时再规定单元参考哪些特性表。这样在形成单元特性矩阵时，软件就会从指定的特性表中提取相应的特性值进行计算。各种特性表及相关几何数据与单元的关系如图 15－5 所示。

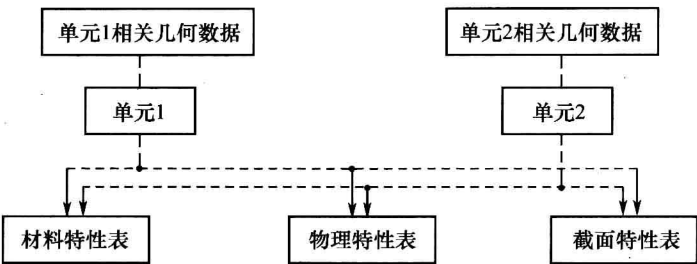


图 15－5　单元特性表与单元的关系

15.2.1　材料特性

材料特性用于定义分析对象的材料在力学、热学等方面的性能。材料特性表与材料类型有关，而与单元类型无关。因此，对于不同类型的材料，应分别建立不同的特性表。

在有限元模型中，一个单元只能由一种材料组成，因此每个单元只能参考一个材料特性表。但在整个模型中，不同单元可以分别参考不同的特性表，这样就可很容易建立由不同材料组成的有限元模型，这体现了有限元法对不同材料进行组合分析的优越性。例如在图 15－6 中，结构大端和小端分别由材料 A、材料 B 制成，因此划分网格前应建立两个对应的材料特性表，划分网格时再规定离散大端和小端的单元分别参考各自的特性表。

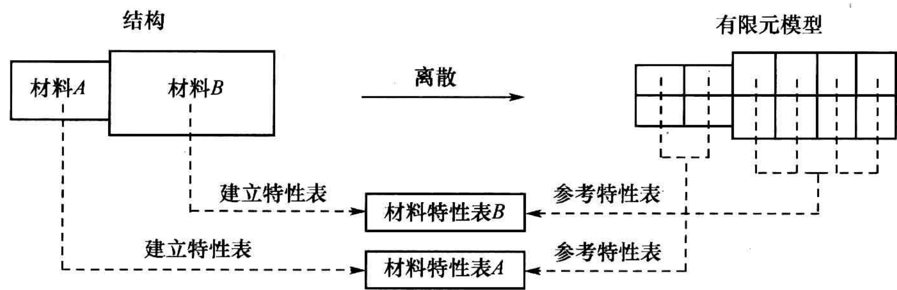


图 15－6　由不同材料组成的有限元模型

材料特性表中的具体内容与材料类型有关，因此在建立这类特性表时应首先选择材料类型，然后输入每一个相应的特性值。目前有限元法能够处理各向同性、各向异性、正交各向异性、横观各向同性材料和叠层复合材料。

15.2.2　物理特性

物理特性用于定义单元物理参数或辅助几何特征，具体内容与单元类型有关，如弹簧单元为弹性系数，间隙单元为间隙值，平面单元、板单元、壳单元为厚度值。单元所有物理特性值均定义在一个特性表中，凡具有相同特性的单元都参考同一物理特性表。有限元计算时，分析软件从所参考的物理特性表中提取相关的特性值进行计算。

和材料特性表相似，物理特性表也独立于具体单元。即不因单元存在而存在，删除单元并不会删除它所参考的物理特性表，而只是删除了特性表的一个链接点。一个单元只能参考一个特性表，一组特性相同的单元可以共同参考同一个特性表。例如图 15－7 所示的不等厚薄板，就可以按等厚度值和不等厚度值分别建立三个不同的物理特性表，然后使不同厚度区域的单元参考各自的特性表。

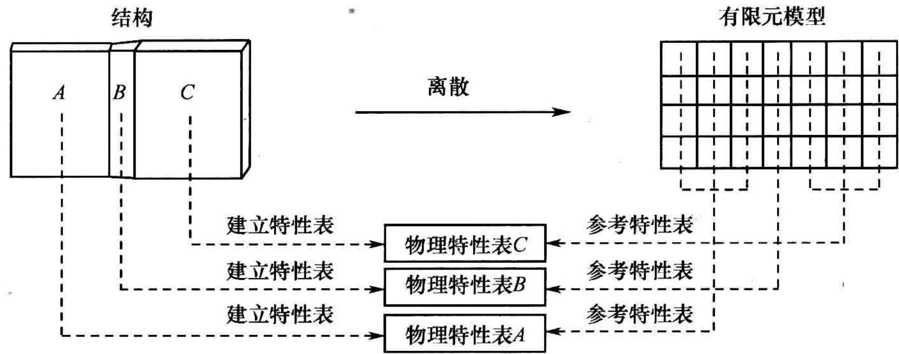


图 15－7　不同厚度板的有限元模型建立

物理特性表中常见的物理特性有：

（1）板、壳单元的厚度值。支持不等厚板、壳单元的软件允许在单元的每个节点处分别定义不同的厚度值。

（2）平面应力单元的厚度值。

以上厚度值是二维单元网格形状不能描述的辅助几何参数。

（3）单位面积或单位长度上的非结构质量。非结构质量是指与单元本身体积无关的质量，在计算惯性载荷时，它可用于考虑连接于单元上但并没包括在模型中的其他结构质量的影响。

（4）弹簧单元的刚度系数和刚度参考坐标系。

（5）间隙单元的间距、接触方向、切变方向和摩擦系数。

（6）集中质量单元的质量、转动惯量和惯量参考坐标系。

（7）空间实体单元的积分规则码等。

15.2.3　截面特性

杆、梁单元的网格是一条直线或曲线，它们只能表示杆件长度方向的几何特征，无法描述截面的形状和大小，而杆件的力学性能又与截面形状和大小有关，因此这类一维单元需要定义其截面特性。

单元截面特性用截面特性表定义，同材料特性表和物理特性表一样，截面特性表也独立于单元。每个一维单元只能参考一个截面特性表，一组截面相同的单元可以同时参考同一截面特性表。例如图 15－8 中的刚架结构，四根立柱和四根横梁分别采用角钢和槽钢，因此应根据两种型材截面的形状和尺寸分别建立两个不同的截面特性表，然后使模型中的梁单元各自参考相应的特性表。计算时分析软件从单元所参考的截面特性表中提取需要的截面特性值进行计算。

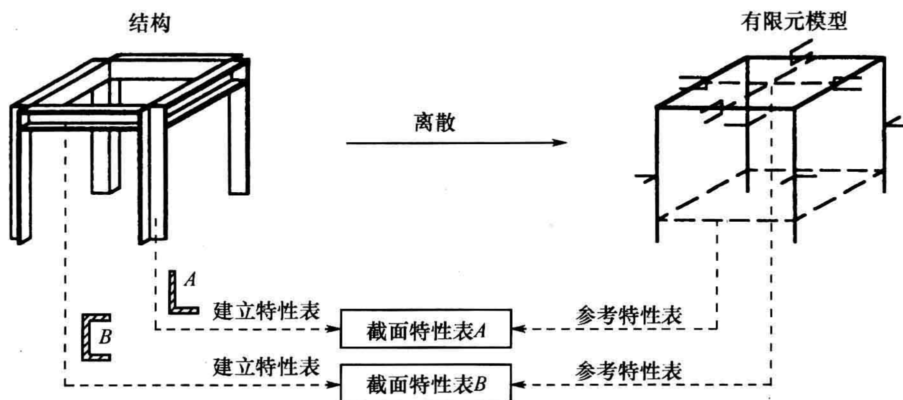


图 15－8　由不同截面杆件组成的刚架有限元模型

截面特性的定义方式有两种：一是参数定义方式，即直接输入截面的各个特性值，这时需要预先计算出各个截面特性值。另一种为图形定义方式，即利用前处理软件提供的截面定义功能，首先按截面的实际尺寸画出截面形状，然后基于该形状由软件自动计算截面的各个特性值。显然后一种方式更加方便，利用它可以定义任意形状截面的特性表，图形定义方式也是衡量分析软件功能的指标之一。

由于杆件结构只承受拉压，因此其截面特性只有截面积。而梁结构可以承受拉压、弯曲和扭转，因此其截面特性主要包括以下几项。

1．截面积

截面积用于梁单元拉压应力和变形的计算。

2．主惯矩

主惯矩用于梁单元的弯曲应力和变形计算。

设有一任意的截面图形，如图 15－9 所示，取微面积 dA 与到 z 轴的距离 y 的平方的乘积，在整个截面内求积分，亦即截面对 z 轴的二次矩，称为截面对 z 轴的惯矩，表示为

$$I_{zz} = \int_A y^2 \mathrm{d}A \tag{15-1}$$

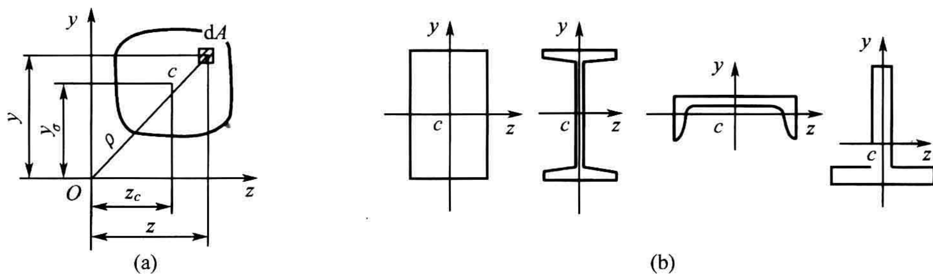


图 15－9　梁单元截面图形

同理，截面对 y 轴的惯矩为

$$I_{yy} = \int_A z^2 \mathrm{d}A \tag{15-2}$$

如果取截面微面积 dA 与两个坐标乘积的积分，则称为截面对 y、z 轴的惯积，表示为

$$I_{yz} = \int_A yz \mathrm{d}A \tag{15-3}$$

从上述定义可以看出，惯矩始终是正值，而惯积可以是正值、负值，也可能为零。只要 y、z 轴中有一个是对称轴，则截面对 y、z 轴的惯积必为零。

当坐标轴 y、z 绕其原点 O 旋转时，截面对坐标轴的惯矩和惯积都将随之变化，其中惯积的值将在正值和负值之间变化，因此通过原点必然能找到一对特殊的 y、z 轴，其惯积为零，这对惯积为零的坐标轴便称为截面通过 O 点的主轴。如果将坐标原点选在截面的形心，那么通过形心也能找到一对主轴，这对主轴称为形心主轴。梁单元的单元坐标系通常就是以截面形心主轴作为 y 轴和 z 轴，它们是梁截面弯曲变形时的中性轴。显然，如果截面有对称轴，此对称轴就是形心主轴，图 15－9(b) 列出几种常见梁截面形心主轴的位置和方向。

截面对主轴的惯矩称为主惯矩，它是截面对过某点所有轴的惯矩中的极大值和极小值。截面主惯矩是弯曲计算时常用的几何性质，如梁结构在绕 z 轴的弯曲载荷作用下，在最大弯矩截面的上、下边缘上产生的最大正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$$

式中：W_z 为截面对于 z 轴的抗弯截面系数，$W_z = \frac{I_{zz}}{y_{\max}}$。

梁结构绕 z 轴和 y 轴的抗弯刚度可以表示为 EI_{zz} 和 EI_{yy}，可见截面的主惯矩越大，梁的抗弯刚度越高。因此梁截面常采用工字形或槽形，目的就是在截面积一定时，增大截面主惯矩，提高梁的抗弯特性。

3. 极惯矩

极惯矩用于梁单元扭转应力和扭转变形的计算。

上面介绍的主惯矩是截面相对坐标轴的二次矩，而极惯矩则是截面相对坐标原点的二次矩，极惯矩的定义为

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A \tag{15-4}$$

式中：ρ 为 $\mathrm{d}A$ 到原点 O 的距离，$\rho^2 = y^2 + z^2$。

根据惯矩和极惯矩的定义，有

$$I_p = I_{yy} + I_{zz}$$

极惯矩是梁结构扭转计算时常用的几何特性。如圆截面梁在扭矩 M_n 作用下产生的最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{M_n}{W_n}$$

式中：W_n 为抗扭截面系数，$W_n = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$。

相距为 l 的两个截面，在扭矩 M_n 作用下的相对扭转角度为

$$\Phi = \frac{M_n l}{GI_p}$$

式中：GI_p 称为圆轴的抗扭刚度。可见 I_p 越大，梁的抗扭刚度越大。所以在相同截面积的

情况下，采用空心圆截面可以提高轴的抗扭刚度。

15.2.4 单元相关几何数据

除材料特性、物理特性和截面特性外，某些单元还可能具有一些相关几何数据，以对单元作进一步说明。相关几何数据依附于具体单元，删除单元后将随之消失。不同类型单元的相关几何数据值可能不一样，主要包括以下类型。

（1）材料方向数据。当材料为各向异性时，模型中各个单元的材料主轴方向不完全相同，因此每个单元应附有一组材料方向数据，用于定义材料主轴相对模型整体坐标系的方向。

（2）梁单元的截面方位数据。用于定义梁单元的截面方向。

（3）梁单元端节点的刚性偏移量。用于定义梁单元端面形心位置的偏距大小。

（4）梁单元节点自由度释放码及弹性释放的刚度系数。

（5）曲梁单元的曲率半径。

（6）锥梁单元的锥度形式和锥度大小。

（7）刚体单元的自由度释放码等。

上面介绍了单元的材料特性、物理特性、截面特性和相关几何数据，一个单元并不一定具有所有这些特性或数据。建立模型时除了划分合理的单元形状外，还必须根据结构特点和计算要求正确定义每一个单元所必需的各种特性值，这样才能计算出正确合理的结果。

15.3 常见单元类型

本节介绍结构分析中一些常见的单元及其应用特点。

15.3.1 平面单元

平面单元（plane element）包括平面应力单元（plane stress element）和平面应变单元（plane strain element），分别用于平面应力结构和平面应变结构的离散。平面单元的网格形状有三角形和四边形 2 种，每种形状的单元可以有线性、二次和三次 3 种阶次，图 15－10显示了 2 种形状、3 种阶次共六种平面单元。

三角形单元的边界适应能力比四边形强，常用于曲线边界的离散，有时也用于不同大小四边形单元的过渡。四边形单元多用于形状比较规则的结构，其精度要高于同阶次的三角形单元。在 3 种阶次中，二次单元具有合适的计算精度和计算量，实际分析中应用较多。线性单元是常应变（应力）单元，精度较低，常用于精度要求不高的初算或结构中的次要部位。三次单元则用于精度具有特殊要求的场合。

平面单元的节点具有沿单元平面内 x、y 轴方向的两个移动自由度（u，v），属于非传弯单元。单元上可以施加单元平面内的节点力、棱边分布力、面力和体力等机械载荷，可用于分析各向同性和正交各向异性材料，可以输出位移、应力、应变能、约束反力和单元力等计算结果。

平面单元的主要物理特性为板的厚度。

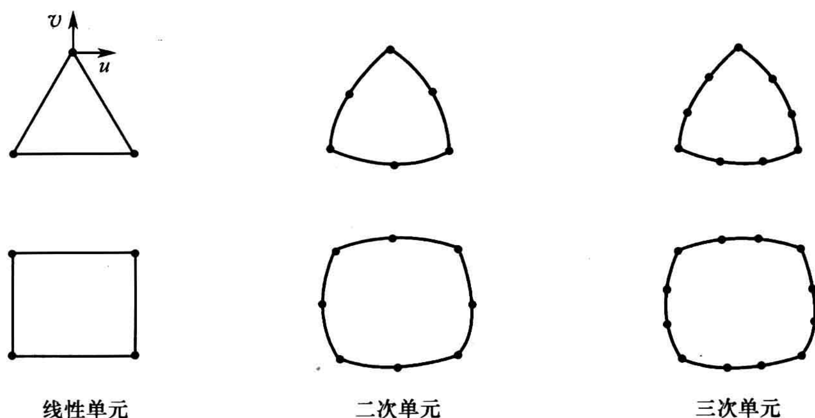


图 15－10　平面单元类型

15.3.2　实体单元

实体单元(solid element)用于空间问题或厚壳结构的离散,可进行静力和动力分析。网格形状有四面体、五面体和六面体 3 种,每种形状可以有线性、二次和三次 3 种阶次,图 15－11 显示了 3 种形状、3 种阶次共 9 种实体单元。

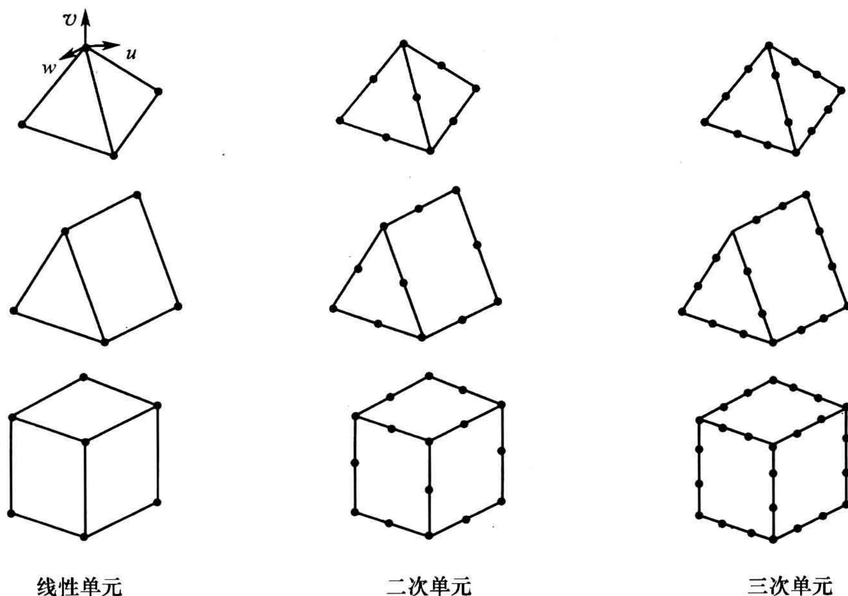


图 15－11　空间实体单元类型

四面体网格(tetrahedron)的边界适应能力较强,常用于具有复杂边界曲面的不规则结构的离散,而五面体(pentahedron)和六面体网格(hexahedron)多用于形状较规则的结构。在 3 种阶次中,二次单元具有较合适的计算精度和计算量,应用较普遍。线性单元是常应变(应力)单元,精度较低,常用于精度要求不高的初算或结构中的次要部位和应力梯度较小的部位,三次单元则用于精度具有特殊要求的场合。

实体单元的节点具有 3 个移动自由度（u，v，w），属于非传弯单元。单元上可以施加节点力、面力和体积力以及温度载荷，但不能施加棱边载荷。可分析各向同性、完全各向异性和正交各向异性材料，输出位移、应力、应变、应变能、单元力和反作用力等计算结果。

实体单元的物理特性有单元积分码等，相关几何数据有材料主轴方向矢量（当材料为完全各向异性和正交各向异性时）。

15.3.3 轴对称实体单元

轴对称实体单元（axisymmetric solid element）用于轴对称实体结构的离散，可进行静力分析和动力分析。其网格是一平面图形，而单元本身具有环状的空间结构。网格形状有三角形和四边形 2 种，每种形状一般具有线性和二次 2 种形式，图 15－12 显示了 2 种形状、2 种阶次共 4 种轴对称实体单元，其中每种形状和阶次单元的应用特点与平面单元相似。

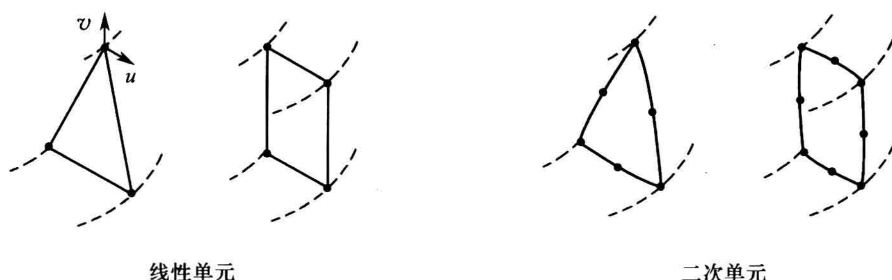


图 15－12　轴对称实体单元类型

轴对称实体单元的节点具有沿子午面内的两个移动自由度（u，v），属于非传弯单元。单元上可以施加节点力、棱边切变载荷、棱边膜载荷、体力和温度载荷，但不能施加面载荷。由于轴对称条件要求结构的材料也应具有轴对称性，所以这类单元只能分析各向同性和正交各向异性材料，而不能分析完全各向异性材料。计算结果包括位移、应力、应变、应变能、单元力和约束反力。

轴对称实体单元的相关几何数据只有材料方位数据。

15.3.4 杆单元

杆单元（rod element）用于桁杆结构的离散，可进行静力和动力分析。杆单元为一维单元，通常只有线性形式，网格形状为一条直线。

空间杆单元具有 3 个移动自由度（u，v，w），平面杆单元只有两个移动自由度（u，v），均属于非传弯单元。杆单元上可以施加节点力、轴向力、沿截面 y 向和 z 向的棱边切变载荷、沿截面 y 向和 z 向的棱边弯矩、体力和温度载荷，由于节点不具有转动自由度，所以不能在杆单元上施加节点力矩和扭矩。杆单元可分析各向同性材料，计算结果包括位移、应力、应变、应变能、单元力和约束反力。由于桁杆只能承受轴向拉压作用，所以杆单元的截面特性只有截面积。

15.3.5 梁单元

梁单元(beam element)用于刚架结构的离散,可进行静力和动力分析。常见的单元形式有等截面梁、锥形梁和曲梁3种,其中等截面梁有线性和二次2种阶次,图15-13显示了4种梁单元的网格形状。图中线性等截面梁和锥形梁的网格形状均为一条直线,它们的截面尺寸差异只能在截面特性表中体现。曲梁单元的网格尽管也是一条曲线,但其插值函数仍属一次函数,曲线具有恒定的曲率半径,而不是像二次梁单元那样是由3个节点确定的抛物线。



图15-13 梁单元类型

(a) 线性等截面梁单元; (b) 二次等截面梁单元; (c) 锥形梁单元; (d) 曲梁单元。

梁单元的单元坐标系以梁的质心轴为 x 轴,并由第一个节点指向第2个节点,梁截面的两个主惯轴分别为 y 轴和 z 轴,梁单元的节点位于 x 轴上,如图15-14(a)所示。对于二次梁单元,其 x 轴仍为梁的质心轴,且与抛物线相切,如图15-14(b)所示。

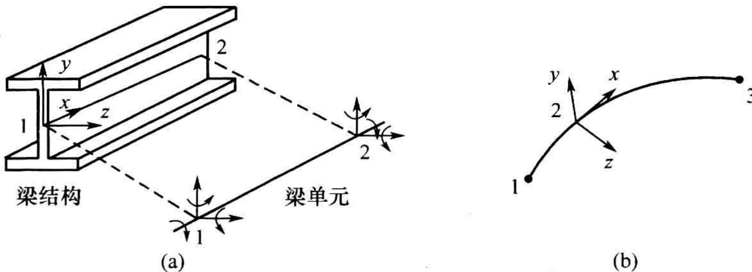


图15-14 梁单元的单元坐标系

(a) 直梁单元的单元坐标系; (b) 二次单元的单元坐标系。

空间梁单元节点具有3个移动自由度(u,v,w)和3个转动自由度($\theta_x,\theta_y,\theta_z$),共6个自由度,平面梁单元节点具有2个移动自由度(u,v)和1个转动自由度(θ_z),共3个自由度,属于传弯单元,所以单元特性不仅与截面大小有关,还与截面形状和方位有关。梁单元上可以施加的载荷包括节点力、节点力矩、棱边轴向分布力、棱边轴向分布扭矩、沿截面 y 向或 z 向的棱边分布切变载荷、沿截面 y 向和 z 向的棱边分布弯矩以及体力和温度载荷等。目前多数软件提供的梁单元仅限于分析各向同性材料,单元可以输出位移、应力、应变、应变能、单元力和约束反力等计算结果。

梁单元的物理特性包括单位长度上的非结构质量、初始应变等,截面特性包括15.2节列出的各项特性值,相关几何数据随梁单元类型不同而存在一些区别。其中曲梁单元的主要数据是曲率半径,锥梁单元主要数据是梁的锥度形式和锥度大小。锥度形式有两种,一是只沿一个方向产生锥度,二是沿两个方向均产生锥度。

用梁单元建模时应注意以下几个问题。

1. 截面方位

梁单元的网格形状只能确定梁长度方向的尺寸,截面特性也只能反映截面的形状和

大小，它们均不能反映梁截面的方位。网格划分后，梁截面仍可绕质心轴旋转而具有不同的方位，如图 15－15(a)所示。由于梁单元可以承受弯矩作用，而梁截面在不同的方向可能具有不同的抗弯刚度，所以建立梁单元时还应按结构的实际方位确定单元截面方位。

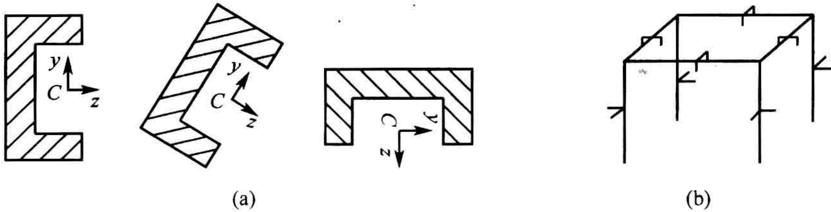


图 15－15　梁截面方位及其显示

建立梁单元时，有限元分析软件按规定的缺省方式确定截面方位，并提供在网格上显示截面形状和方位的功能，如图 15－15(b)所示。分析人员可利用显示的图形判断截面方位与实际方位是否一致，并利用截面旋转功能将截面旋转到正确的方位上。梁截面的方位数据将保留在单元的相关数据中。

2．节点偏移

由于梁单元节点位于梁结构的质心轴上，而有些结构由于连接部位尺寸的差异和限制，导致两个相邻单元的节点不能重合。例如图 15－16 中的几种结构，连接部位的节点之间均存在一定量的偏移，这在有限元模型中是不允许的，因为一个单元的力和力矩无法传递到另一个单元。

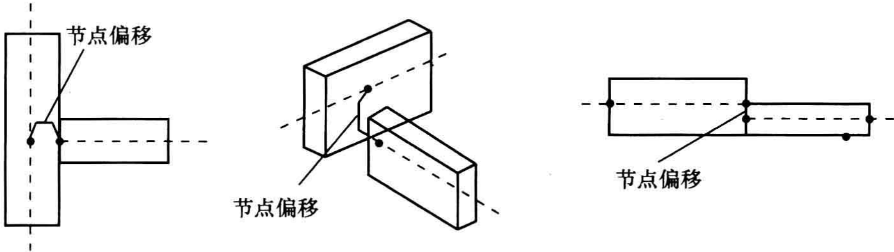


图 15－16　存在节点偏移的结构

对于上述存在节点偏移的结构，应在偏移的节点之间建立连接条件，以保证单元间的位移协调。连接方法可以采用多点约束等式，也可以在两个偏移节点之间人为连接一个刚度很大的梁单元。有些软件也允许梁单元的端节点沿任意方向偏移一定距离，并在节点与偏移点之间自动连接一个刚度非常大的梁单元，即建立两者间的刚性连接。节点的偏移量保留在单元的相关几何数据中。

3．自由度释放

一般情况下，梁单元在节点所有自由度方向上均与相邻单元刚性连接在一起，单元所有方向的力或力矩均能完全传递到另一个单元。但有些梁结构之间并非在所有自由度方向上都具有约束连接，例如在图 15－17 中，图(a)所示的两个结构在水平方向可以相对滑动，图(b)所示的两个结构可以绕一个方向相对转动，因此在用图(c)和图(d)所示梁单元离散上述结构时，就应释放部分节点的自由度，即释放图(c)中单元③在节点 1 处沿 x 轴方向的移动自由度，图(d)中单元⑥在节点 2 处绕 z 轴的转动自由度。

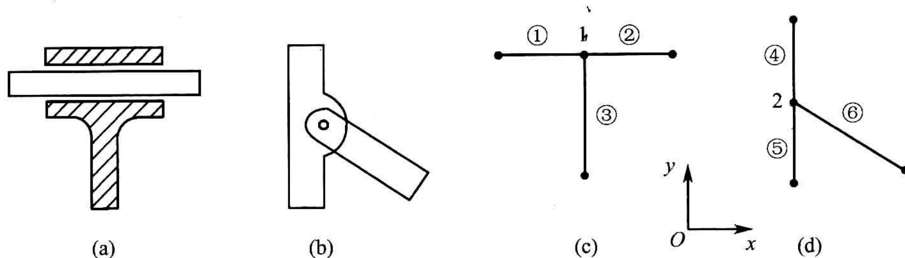


图 15－17　节点自由度释放

15.3.6　板单元

板单元(plate element)用于平直薄板结构的离散,可进行静力和动力分析,其网格为平面图形,形状有三角形和四边形 2 种,每种形状也可以有线性、二次和三次 3 种阶次。板单元的网格类似平面单元的网格,各种形状和各种阶次板单元的应用特点也与平面单元相似。

板单元是在薄板结构的中面上划分的,所以单元坐标系的 Oxy 面取在板的中面,z 轴平行于中面的法线方向,中面法向根据节点编号顺序由右手法则确定,如图 15－18 所示,板的 z 向尺寸(即板厚)在物理特性表中定义。

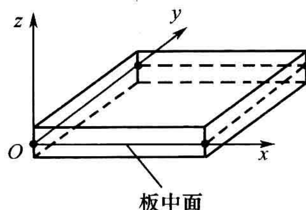


图 15－18　板单元及其坐标系

目前使用的板单元有 3 自由度和 6 自由度两种类型。3 自由度板单元的节点只有 3 个自由度(w,θ_x,θ_y),这种单元是根据薄板弯曲理论建立的,只能承受横向弯曲载荷的作用,所以也称为横向弯曲板单元。但实际上板结构通常是受任意力系的作用,受力后的板也是处于连弯带扭的复杂变形状态,所以工程中应用较多的还是六自由度板单元,即单元每个节点有 6 个自由度($u,v,w,\theta_x,\theta_y,\theta_z$)。这种单元可以承受任意载荷的作用,可以和梁单元直接进行组合。

板单元可用于分析各向同性材料、正交各向异性材料和叠层复合材料。单元物理特性包括板的厚度和单位面积上的非结构质量等。当板为叠层材料时,板的厚度应取为所定义的叠层材料的厚度。板的相关几何数据只有材料方向矢量数据,单元的输出计算结果包括位移、应力、应变、应变能、单元力和约束反力。

使用板单元时应注意不同厚度板的连接。例如图 15－19(a)所示的变厚度平板,由于不同厚度部位的中面连续,所以离散各个部位的单元在变厚度线上的节点是重合的。这类结构只需要以变厚度线作为单元分界线,并建立不同的单元特性表以定义不同的厚度值。但对于图 15－19(b)所示的变厚度平板,由于不同厚度部位的中面不连续,所以在变厚度线上两边单元的节点不重合。如果要考虑这种偏心影响,就应在各自连续的中面上划分网格,并在变厚度处建立不重合节点的连接关系。一般可以在每对节点之间加入一刚体单元或刚度很大的梁单元,也可以用位移约束等式连接。

15.3.7　薄壳单元

薄壳单元(thin shell element)用于薄壳结构的离散,可进行静力和动力分析。网格为一曲面(也可为平面),形状有三角形和四边形 2 种,每种形状的单元也有线性、二次和三次 3 种阶次。图 15－20 显示了 2 种形状、3 种阶次共 6 种薄壳单元。

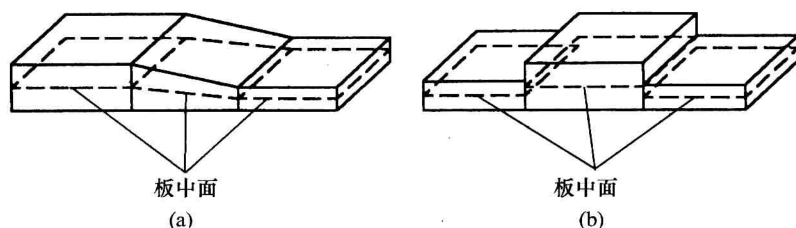


图 15－19 不同厚度的板结构

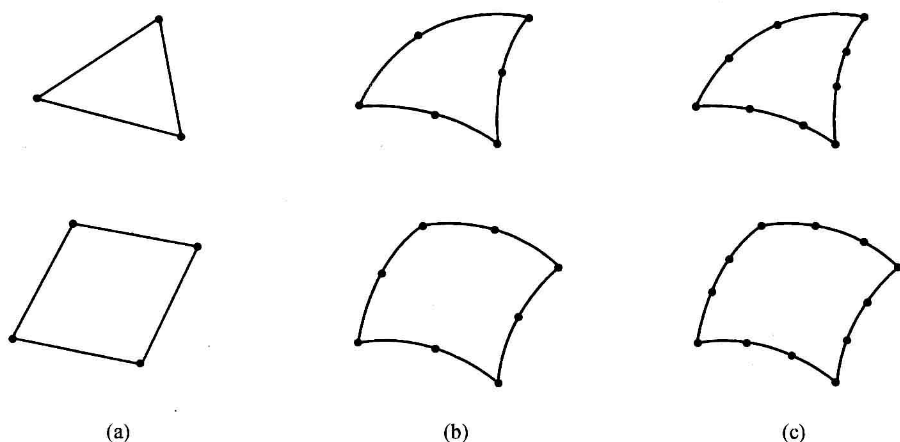


图 15－20 薄壳单元类型

（a）线性单元；（b）二次单元；（c）三次单元。

与板单元相似，薄壳单元也是在结构的中面上划分的，但这时中面可能是曲面。单元坐标系的 Oxy 面仍位于中面上，z 轴为中面的法线方向，法线方向根据单元节点的编号顺序由右手螺旋法则确定。

壳单元的每个节点具有 3 个移动自由度（u,v,w）和 3 个转动自由度（$\theta_x,\theta_y,\theta_z$），属于传弯单元。单元上可以施加节点力、节点力矩、各种棱边载荷、表面压力、体力和温度载荷等，可用于分析各向同性材料、正交各向异性材料和叠层复合材料，可以输出位移、应力、应变、应变能、单元力、约束反力和壳应力合力矢量等计算结果。

壳单元物理特性包括单元厚度和单位面积上的非结构质量，当结构材料为叠层复合材料时，单元厚度应取为所定义的叠层材料厚度。壳单元的相关几何数据是当材料为正交各向异性材料时定义材料主轴的方向矢量数据。

用壳单元离散变厚度的薄壳结构时，如果不同厚度部位的中面不连续，则应对变厚度线上的节点进行和板单元相似的连接处理。

15.3.8 轴对称薄壳单元

轴对称薄壳单元（axisymmetric shell element）用于轴对称薄壳结构的离散，可进行静力和动力分析。网格形状为一条直线（线性单元）或抛物线（二次单元），但单元本身具有环状的空间结构，图 15－21 列出了两种轴对称壳单元的网格形状。

轴对称壳单元的节点具有 2 个移动自由度（u,v）和 1 个转动自由度（θ），属于传弯单元。单元上可以施加节点力、节点力矩、棱边膜载荷、棱边切变载荷、棱边弯矩、体力和温

度载荷,这些载荷的大小都是指实际结构单位角度上所对应的值。单元可用于分析各向同性和正交各向异性两类材料,可以输出位移、应力、应变、应变能、单元力和约束反力等计算结果。单元物理特性为壳的厚度值。

15.3.9 弹簧单元

弹簧单元(spring element)分为拉压弹簧单元和扭转弹簧单元两种,前者能在3个移动方向上提供3个拉伸刚度,后者可在绕3个轴的转动方向上提供3个扭转刚度。根据节点数量不同,弹簧单元又可分为边界弹簧单元和中间弹簧单元。前者只有一个节点,单元另一端与基础相连,所以这种单元只能建在模型的边界上。后者具有两个节点,节点的位置可以重合,这种单元一般建在模型内部。弹簧单元的网格形状如图15-22所示,其中拉压弹簧单元和扭转弹簧单元的网格形状并无区别。



图15-21 轴对称壳单元类型

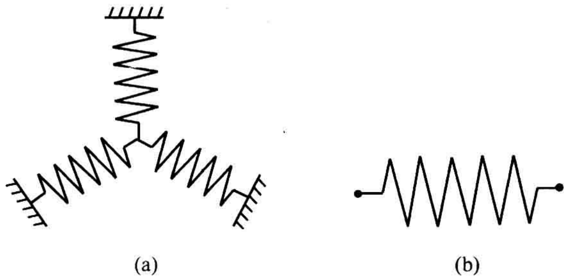


图15-22 弹簧单元类型

(a) 边界弹簧单元; (b) 中间弹簧单元。

拉压弹簧单元节点有3个移动自由度,因此只能承受3个自由度方向的节点力作用。单元物理特性是3个拉伸刚度系数和一个刚度参考系,刚度系数表示节点产生绝对或相对单位位移时需要的节点力大小,刚度参考系规定单元在哪3个相互垂直的方向上提供刚度。如果单元是节点不重合的中间弹簧单元,则这种单元只能在两个节点的连线方向上提供刚度。

扭转弹簧单元节点具有3个转动自由度,因此单元只能承受3个自由度方向的节点力矩。物理特性包括3个扭转刚度系数和一个刚度参考系,刚度系数表示节点产生绝对或相对单位位移时需要的节点力矩大小,刚度参考系规定单元在绕哪3个相互垂直的方向上提供刚度。如果单元是节点不重合的中间弹簧单元,则这种单元只能在绕两个节点的连线方向上提供刚度。

由于弹簧单元的刚度是直接定义的,所以没有材料特性。单元可以输出节点位移、单元力、应变能和反作用力等计算结果,不能输出单元内部的应力和应变。

15.3.10 集中质量单元

如果结构中存在相对体积很小、但质量较大的局部结构,则这种结构可用集中质量单元(lump element)离散。例如在建立飞机整机有限元模型时,发动机部件就可用一个集中质量单元表示。

集中质量单元只有一个节点,节点具有3个移动自由度和3个转动自由度,节点上可以施加节点力和节点力矩。由于单元本身具有质量,所以单元上还可以施加各种惯性力。

单元可以输出的计算结果有位移和反作用力两类。

集中质量单元本身无材料特性,其质量大小和描述质量分布的转动惯量直接在单元物理特性表中定义,所以单元的物理特性包括以下3项。

1. 质量 m

当模型具有移动加速度 a 时,集中质量单元处将产生一惯性力,惯性力大小为

$$F = -ma \tag{15-5}$$

2. 惯量坐标系

惯量坐标系规定集中质量单元转动惯量和惯性积的参考坐标系。

3. 转动惯量和惯性积

转动惯量描述集中质量单元的质量分布情况,用于度量单元转动惯性的大小。单元相对惯量坐标系 $Oxyz$ 三个坐标轴的转动惯量为

$$\begin{cases} J_x = \iiint (y^2 + z^2)\rho \mathrm{d}v \\ J_y = \iiint (x^2 + z^2)\rho \mathrm{d}v \\ J_z = \iiint (x^2 + y^2)\rho \mathrm{d}v \end{cases} \tag{15-6}$$

式中:ρ 为单元材料的密度值。

由上述公式可见,转动惯量始终是一正的标量,它与单元的质量大小和惯性坐标轴的方位有关。惯性积的定义为

$$\begin{cases} J_{xy} = \iiint xy\rho \mathrm{d}v \\ J_{yz} = \iiint yz\rho \mathrm{d}v \\ J_{zx} = \iiint zx\rho \mathrm{d}v \end{cases} \tag{15-7}$$

由上可见,惯性积是可正、可负、也可为零的代数量。如果单元相对某坐标轴的惯性积为零,则该坐标轴称为惯性主轴。

转动惯量和惯性积都满足平行轴定理

$$J_x = J_x^c + m(y_c^2 + z_c^2) \tag{15-8}$$

$$J_{xy} = J_{xy}^c + mx_c y_c \tag{15-9}$$

式中:J_x^c 为单元相对于平行于 x 轴的质心轴的转动惯量;J_{xy}^c 为单元相对于平行于 x、y 轴的质心轴的惯性积;x_c、y_c、z_c 为单元质心相对惯量坐标系的坐标值。

同样,有

$$\begin{cases} J_y = J_y^c + m(x_c^2 + z_c^2) \\ J_z = J_z^c + m(x_c^2 + y_c^2) \\ J_{yz} = J_{yz}^c + my_c z_c \\ J_{zx} = J_{zx}^c + mx_c z_c \end{cases} \tag{15-10}$$

当集中质量相对惯量坐标系转动时，将在单元节点上产生绕各个坐标轴的惯性力矩。例如，当单元绕 z 轴旋转时，产生的相对 x、y、z 轴的惯性力矩为

$$\begin{cases} M_x = \varepsilon_z J_{xz} - \omega_z^2 J_{yz} \\ M_y = \varepsilon_z J_{yz} - \omega_z^2 J_{zx} \\ M_z = -J_z \varepsilon_z \end{cases} \tag{15-11}$$

式中：ω_z、ε_z 分别为绕 z 轴旋转的角速度和角加速度。

同理，当单元绕 x、y 轴旋转时，也可写出和式(15－11)相似的惯性力矩的表达式。

第16章　网格划分方法

建立几何模型和选择单元类型以后,接下来的工作就是基于几何模型划分网格,简称分网(meshing)。分网的工作量大,需要考虑的问题多,网格形式直接影响结果精度和模型规模,因此分网是建模过程中最为关键的环节。

本章首先介绍网格划分的一般原则,然后介绍半自动和自动两种分网方法,并简要介绍自适应分网的基本概念。

16.1　网格划分原则

划分网格时一般应考虑以下一些原则:

16.1.1　网格数量

网格数量又称绝对网格密度,是分网时首先应考虑的问题,它通过设置网格的尺寸来控制。网格数量主要影响以下两个因素。

1. 结果精度

网格数量增加,结果精度一般会随之提高。这是因为:

(1) 单元插值函数能够更好地逼近实际函数。

(2) 网格边界能够更好地逼近几何模型的曲线或曲面边界。

(3) 在应力梯度较大的部位,能够更好地反映应力值的变化。

但应注意,对于某些模型,当网格数量太大时,数值计算的累积误差反而会降低精度。

2. 计算规模

网格数量增加,将主要增加以下几个方面的计算时间:

(1) 网格划分时间　网格数量增加时,无论采用半自动还是自动方法,都会使网格划分花费更多的时间。

(2) 单元形成时间　这部分时间与单元数量直接相关。当单元为高阶单元时,由于计算单元刚度矩阵要进行高斯积分,所以单元形成要占用相当大的比例。

(3) 求解方程时间　网格数量增加,节点数量会相应增加,有限元方程的数量增加,求解方程组的时间将大大增加。

由于网格数量增加对结果精度和计算规模都将提高,所以分网时应权衡两个因素综合考虑。一般原则是:首先保证精度要求,当结构不太复杂时尽可能选用适当多的网格。而当结构非常复杂时,为了不失计算精度而又不致网格太多,应采用其他措施来降低模型规模,如子结构法、分步计算法等。

图16-1中的实线表示结构位移随网格数量收敛的一般曲线,虚线代表计算时间随网格数量的变化曲线。可以看出,当网格数量较少时,增加网格数量可明显提高精度,而

计算时间不会明显增加。当网格数量增加到一定程度后(如点 P),继续增加网格对精度提高甚微,而计算时间却大幅度增加。因此并不是网格越多越好,应该考虑网格增加的经济性。

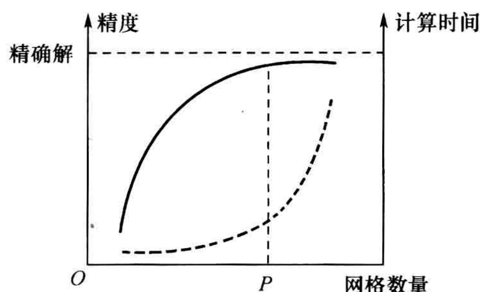


图 16-1　位移精度和计算时间随网格数量的变化

实际应用时并不知道划分多少网格最合理,即不能事先确定点 P 的位置。这时可先试算一次,然后适当增加网格,再进行计算。比较两次计算的结果,如果结果相差较大,则应继续增加网格;如果结果相差很小,则没必要继续增加。

结果精度与网格数量的关系因具体分析结构而异。一些简单结构在简单载荷作用下,变形非常简单,则用少量网格就可得到很高的精度。例如受集中载荷的等截面悬臂梁,即使用一个梁单元也可得到非常精确的结果。但对一些复杂工况下的复杂结构,由于内部位移场分布很复杂,即使采用较多网格,也不一定能得到满意的结果。

在选择网格数量时还应考虑分析数据的类型和特点,一般可以遵循以下原则。

(1) 静力分析时,如果仅仅是计算变形,则网格可以取得较少。如果需要计算应力或应变,若保持相同精度,则应取相对多的网格。

例如,图 16-2 中的悬臂梁分别用图(a)所示的 3 种网格离散,计算出的最大应力和最大变形如图(b)所示。可以看出,在网格数量相同的条件下,位移计算精度高于应力精度,或者说在精度相当的条件下,应力计算需要的网格比位移计算多。

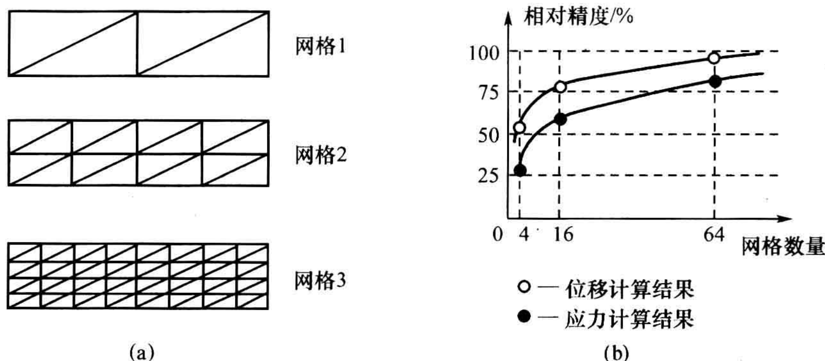


图 16-2　悬臂梁结构

(2) 在固有特性分析时,如果仅仅计算少数低阶模态,可以选择较少的网格。如果需要计算高阶模态,由于高阶振型更复杂,所以应选择较多的网格。计算的模态阶次越高,要求模型越精细。此外,选择网格数量时还应考虑质量矩阵的形式。由于一致质量矩

阵的计算精度高于集中质量矩阵，所以在采用一致质量矩阵计算时可以划分较少的网格，而采用集中质量矩阵时则应选择相对较多的网格。

图 16－3 是一梁的固有频率随网格数量的变化，其中实线表示一致质量矩阵，虚线表示集中质量矩阵。可以看出：①采用一致质量矩阵和集中质量矩阵时，随着网格数量增加，固有频率分别从精确值的上方和下方收敛；②在相同网格数量的条件下，采用一致质量矩阵的计算精度高于集中质量；③网格数量相同时，高阶频率的计算精度要比低阶频率低。或者说，如果要保持各阶固有频率具有相同的计算精度，那么计算高阶频率时应选择更多的网格。

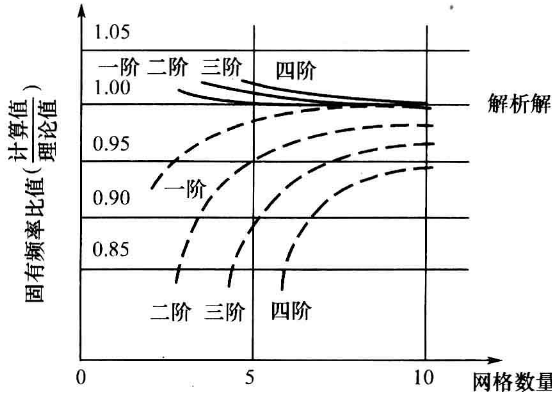


图 16－3　固有频率与网格数量的关系

（3）在结构的响应分析中，如果仅仅是计算某些位置的位移响应，则网格数量可以少一些。如果需要计算应力响应，则应选择相对多的网格。

（4）在热传导分析中，结构内部的温度梯度趋于常数，不需要大量的内部单元，所以可以划分较少的网格。但如果热变形和热应力计算采用同热传导分析相同的模型，则应根据应力和位移计算的特点选择网格数量。

16.1.2　网格疏密

网格疏密是指结构不同部位采用不同大小的网格，又称相对网格密度。实际应力场很少有均匀分布的，或多或少存在不同程度的应力集中。为了反映应力场的局部特性和准确计算最大应力值，应力集中区域就应采用较密集的网格。而在其他非应力集中区域，由于应力变化梯度小，为减小网格数量，则可采用较稀疏的网格。因此整个结构显示出疏密不同的网格划分。

图 16－4 是一中心带圆孔的方形板的 1/4 模型，其网格形式反映了上述原则。即小孔附近存在应力集中，采用了较密的网格，而板的四周应力梯度小，网格相对较稀。其中图 16－4(a)网格疏密相差较小，模型共有 132 个单元。而图 16－4(b)网格疏密相差较大，只有 72 个单元。但通过两者计算出的孔缘最大应力分别为 300.60MPa 和 296.36MPa(理论值为 300MPa)，误差仅相差 1%，而计算时间可减小 36%。可见，采用疏密不同的网格划分，既可保持相当的精度，又可使网格数量减小。该例也说明，计算精度并不随着网格数量增加而绝对增加，网格数量应该增加到结构的关键部位，在次要部位增加网格是不经济的。

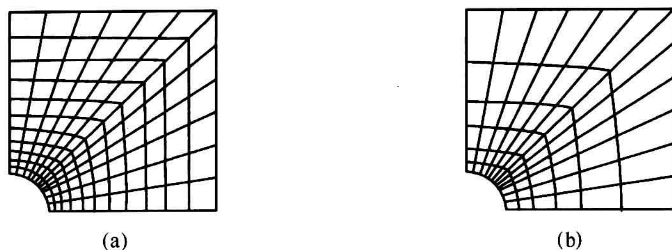


图 16－4　带孔方板的 1/4 模型

采用不同密度的网格划分时，应注意疏密网格之间的过渡。过渡的一般原则是使网格尺寸突然变化为最小，以避免出现畸形或质量较差的网格。过渡的常见方式有以下几种。

1．单元过渡

单元过渡是用三角形网格过渡不同大小的四边形网格，或用四面体和五面体网格过渡不同大小的六面体网格。图 16－5 是三角形网格过渡四边形网格的情况，其中图(a)中的四边形网格相差不大，只用了一层三角形网格过渡，而图(b)中的四边形网格相差较大，采用了两层三角形网格过渡。

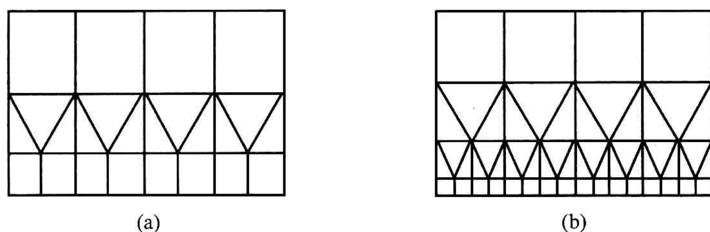


图 16－5　单元过渡

2．强制过渡

强制过渡是指用约束条件保持大小网格之间的位移连续性，这时大小网格的节点不可能完全重合，大小网格之间具有明显的界面，如图 16－6(a)所示。为保证过渡界面位移的连续性，必须对小网格在大网格边上的节点(即节点 2、4、6、8)进行位移约束。约束方式有两种，一是利用多点约束等式，二是通过约束单元。例如节点 2，其位移 u_2、v_2 应满足约束等式

$$u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2} \quad 和 \quad v_2 = \frac{v_1 + v_3}{2}$$

3．自然过渡

单元过渡和强制过渡均适合于半自动分网方法，而对于自动分网，目前还不能完全按照人的意愿划分出图 16－5 或图 16－6(a)所示的网格形式，尽管这些形式并不复杂。对于一定大小的平面区域或空间体积，目前的自动分网算法只能划分出具有相同形状和平滑过渡的疏密网格，如图 16－6(b)所示，这种大小网格之间的平滑过渡称为自然过渡。自然过渡将引起网格变形，从而降低网格质量。网格尺寸越悬殊，过渡距离越近，网格质

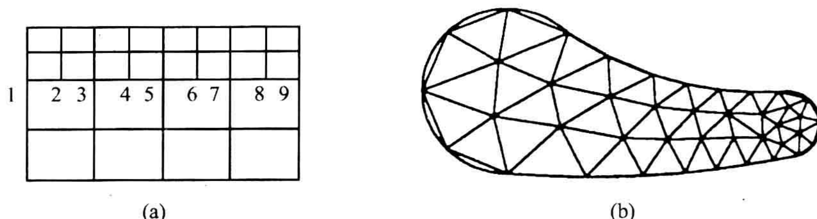


图 16-6　强制过渡和自然过渡

量影响越严重。

划分疏密不同的网格主要用于应力分析，包括静应力和动应力。而在固有特性分析时，则应采用比较均匀的网格。这是因为固有频率和振型仅与结构的质量分布和刚度分布有关，不存在类似应力集中的现象。其次，均匀网格可使刚度矩阵和质量矩阵的元素大小不致相差太大，可以减小数值计算误差。例如，对于图 16-7(a)所示的卡子，在计算其应力和固有频率时，就可以采用图 16-7(b)和图 16-7(c)两种不同的网格形式。此外，计算温度场时也趋于采用均匀的网格。

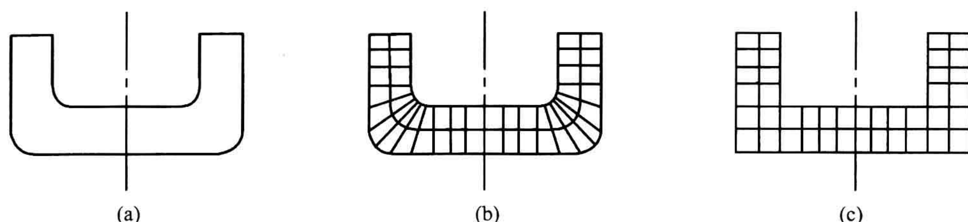


图 16-7　同一结构的不同网格划分

实际建模中，有时并不能事先知道结构哪些部位存在应力集中，特别是热应力分布。这时可以先用均匀的网格进行初算，再根据得到的应力等值线图来调整网格疏密。等值线密集的部位说明应力梯度大，应增加网格密度。等值线稀疏的部位应力梯度小，可以保持或减小网格密度，然后再作精确计算。这种过程还可以重复进行，以逐步提高计算精度。目前一些分析软件可以根据计算结果自动调整网格疏密，这种功能称为自适应网格划分，详见 16.2 节。

16.1.3　单元阶次

很多单元都有低阶和高阶形式，采用高阶单元的目的是为了提高精度，这主要基于两点考虑。一是利用高阶单元的曲线或曲面边界更好地逼近结构的边界曲线或曲面，二是利用高次插值函数更好地逼近复杂的实际函数。但高阶单元的节点较多，使用时也应权衡精度和规模综合考虑。

增加网格数量和单元阶次都可提高结果精度，但在节点总数相同的情况下，增加阶次的效果更理想。图 16-8(a)中的两种单元总自由度相同，根据式(13-1)可知，线性单元的应力计算误差为 $O(h/2)$，二次单元的应力计算误差为 $O(h^2)$，显然后者比前者的计算误差小。而对于图 16-8(b)所示的网格，二次单元不仅误差小，且节点数还比线性单元少一个。

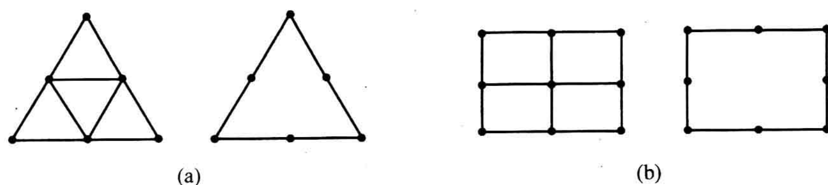


图 16－8　线性单元和二次单元的比较

图 16－9 是一悬臂梁分别用线性和二次三角形单元离散时，其顶端位移随网格数量的收敛情况，从该图不难看出以下几点：

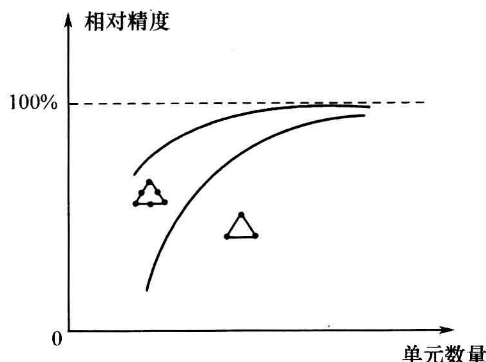


图 16－9　不同阶次单元的收敛情况

（1）当网格数量较少时，两种阶次单元的精度相差很大，这时采用低阶单元划分网格是不合适的。

（2）当网格数量较多时，两种阶次单元的精度相差很小，这时再采用高阶单元并不经济。例如在离散结构细节时，由于细节处的网格分得很密，这时采用高阶单元的意义就不大了，采用密集的线性单元可能比稀疏的高阶单元效果更好。

（3）在精度一定时，需要的高阶单元数要远远少于线性单元数。因此在使用高阶单元时要选择适当的网格数量，太多的网格并不能带来明显的效益。例如在计算齿轮根部应力时，采用了图 16－10 所示的线性单元和二次单元，尽管两者网格数量相差近 15 倍，但计算结果却非常接近。

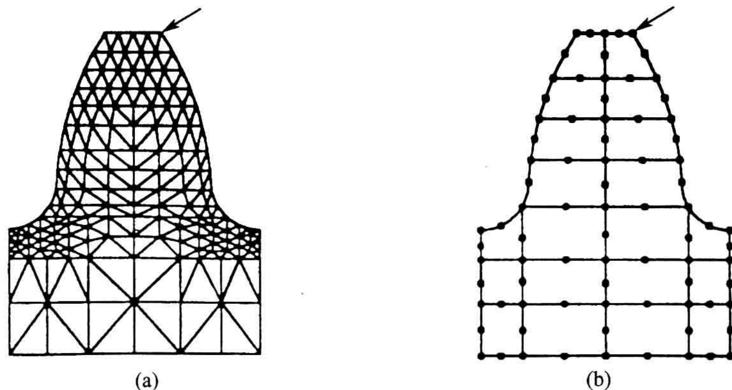


图 16－10　采用两种阶次单元的齿轮模型

（a）线性单元；（b）二次单元。

有时为了兼顾精度和计算量，可以在不同部位采用不同阶次的单元，即精度要求高的重要部位采用高阶单元，而精度要求低的次要部位采用低阶单元。不同阶次单元之间应注意正确连接，以保证位移连续。

16.1.4　网格质量

网格质量是指网格几何形状的合理性。质量的好坏将直接影响结果精度，质量太差

的网格甚至会中止计算过程。直观上看,若网格各边和各个内角相差不大,网格表面不过分扭曲,边角点位于边界等分点附近,则这类网格的质量较好。

网格质量可用一些具体指标定量表示。网格划分之后,特别是自动划分的网格,应进行网格质量检查,并对质量差的网格(特别是重要部位的网格)进行修正,以保证计算精度和使数值计算过程顺利完成。这部分内容详见第 17 章。

在有限元模型中,图 16 - 11 所示的几种网格是不允许的,它们将导致单元刚阵为零或负值,数值计算时将出现致命错误而中断,这些网格称为畸形网格。图 16 - 11(a)的网格节点交叉编号,节点必须按顺时针或逆时针统一编号。图 16 - 11(b)的网格的内角大于 180°。图 16 - 11(c)所示网格的两对节点重合,导致网格面积为零。

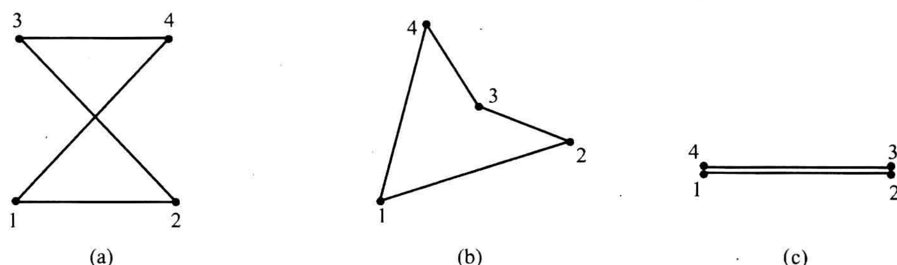


图 16 - 11　几种畸形网格

16.1.5　网格分界面和分界点

划分网格时,结构中的一些特殊界面和特殊点应划分为网格边界或节点。常见特殊界面和特殊点有以下几种。

(1) 不同材料的分界面。

(2) 几何尺寸的突变面,如板壳结构和平面应力结构不同厚度的分界面,杆件结构不同截面的分界面。

(3) 不同分布载荷的分界线或分界点。

(4) 集中载荷的作用点。

(5) 位移约束的作用点。

将上述(1)、(2)项界面划分为网格边界的目的是为了定义单元特性,而将(3)、(4)、(5)项划分为网格边界则是为了定义边界条件。图 16 - 12 是上述界面和相应的网格划分情况。

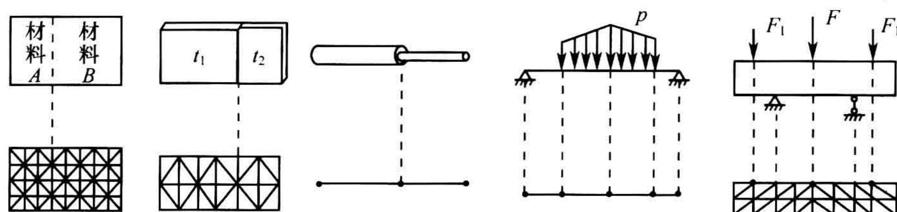


图 16 - 12　特殊界面和特殊点的网格划分

16.1.6 位移协调性

在有限元模型中，单元与单元之间是通过节点连接的，一个单元上的力和力矩通过节点传递到相邻单元。为了保证这种传递，就应保持节点位移的连续性或协调性。为此，划分网格时应注意以下两个问题：

（1）一个单元的节点必须同时也是相邻单元的节点，而不应是内点或边界点。例如图 16－13(a)中的网格划分是不合理的，节点 1 上的节点力无法传递到单元①。

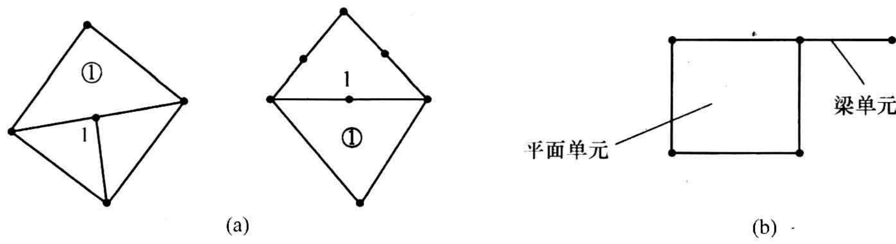


图 16－13　位移不连续的网格划分

（2）相邻单元的节点自由度性质不同时，一个单元上的力矩不能通过节点传递到另一个单元。例如图 16－13(b)所示的平面单元和梁单元连接，由于梁单元节点具有转动和移动自由度，而平面单元节点只有移动自由度，因此梁单元上产生的力矩就无法传递到平面单元。

对于上述不连续的网格划分，必须在不连续边界上进行约束，以强制位移连续。

16.1.7 网格布局

当结构形状对称时，划分的网格也应尽量具有相应形式的对称性，以使结构在各个对称点上表现出相同的特性。例如图 16－14(a)所示的正方形截面梁，由于截面相对 y 轴对称，所以在对称载荷作用下，梁自由端两个对称节点 1 和节点 2 的挠度值本应相等。但若采用图 16－14(b)所示的不对称网格，则计算出的两个节点的挠度稍有差别，其中 $y_1 = 0.0346$，$y_2 = 0.0350$。若改用图 16－14(c)所示的对称网格，则计算出的两个节点的挠度完全相同。

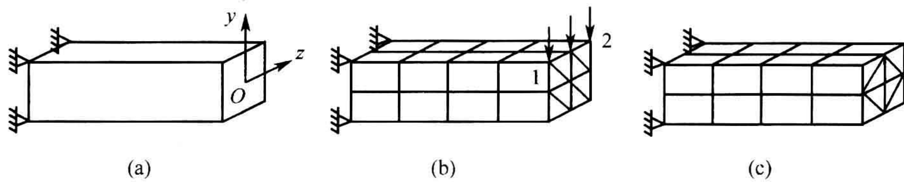


图 16－14　方形截面梁及不同的网格划分形式

动态分析时，即使结构形状是对称的，但不对称的网格布局也会导致质量不对称。例如图 16－15 所示的矩形截面，采用图(a)中的对称网格，利用集中质量矩阵计算出的质量分布是对称的，但采用图(b)所示的不对称网格时，计算出的质量分布就不对称了，这将对动力计算产生不利影响。

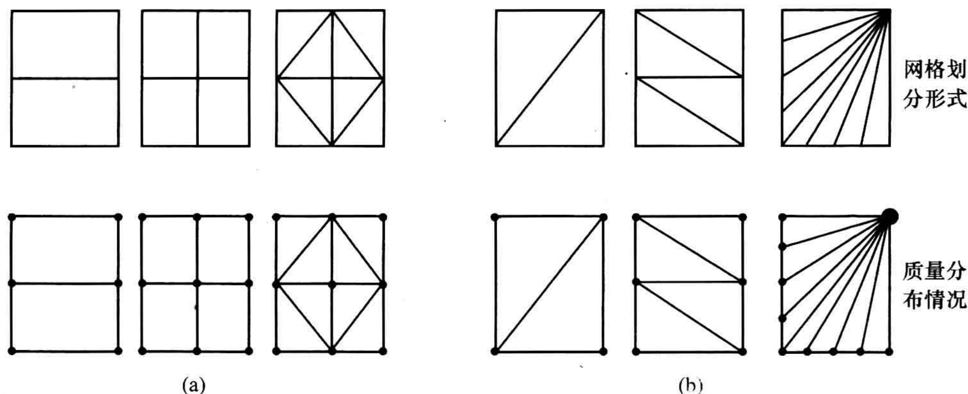


图 16－15　对称结构的网格划分与质量分布

16.2　网格划分方法

网格划分(简称分网)最早采用人工方式,即分析人员首先在坐标纸上画好分析结构的形状,然后人为确定每个节点的位置,连接节点形成单元,进行节点和单元编号,上机时再按编号顺序在程序的输入卡中依次填入节点坐标、单元的节点编号、单元材料特性和物理特性等模型数据。这种方法的劳动强度大,划分速度慢,出错率高,对复杂空间结构的划分非常困难。这也严重制约了有限元方法的应用。

为提高建模效率,目前有限元分析软件基本上都具备了自动分网功能,这种方法可以显著提高分网速度,大大减轻人的劳动强度。对于平面问题和形状较规则的空间问题,为了对网格形式进行人为控制,目前也广泛采用半自动分网方法。

16.2.1　半自动分网方法

半自动分网仍由分析人员确定节点位置和形成单元,但分网过程直接在计算机屏幕上通过人机交互方式进行。分析人员可通过多种方式建立节点和单元,分析软件根据节点、单元的生成顺序自动进行编号。由于分网之后可进行带宽优化或波前处理,因此在分网时可不必考虑生成顺序。这种方法的特点是可以任意控制节点位置和单元形状,划分的网格容易满足给定的要求。

1. 定义坐标系

定义坐标系(definition coordinate system)是节点位置的参考系。为了定义节点在模型中的空间位置,首先应建立和选择定义坐标系。采用半自动分网方法时,分析软件一般允许在不同位置建立不同类型的坐标系,包括直角坐标系、柱坐标系和球坐标系。根据节点定义的方便,可以建立和选择任意位置、任意类型的坐标系作为定义坐标系。如对于图 16－16 所示的容器结构,为了定义容器球冠部位的节点,可选择建立在球冠中心的球坐标系作为定义坐标系。同样,为定义容器壁圆柱部位和螺栓孔孔壁上的节点,可选择建立

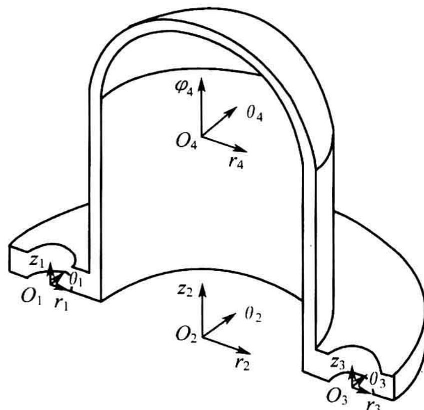


图 16-16　节点定义坐标系的作用

在容器圆筒轴线和各个孔心的柱坐标系作为定义坐标系。

2. 节点定义方法

分网时首先应生成节点,然后连接节点形成网格。在半自动分网中,定义节点位置的方法主要有以下几种。

(1) 坐标定位　输入节点相对定义坐标系的坐标值确定节点位置。坐标系类型不同,坐标值的含义也不一样。在直角坐标系中,3 个坐标值表示沿坐标轴方向的距离;在柱坐标系中,3 个坐标值表示径向距离、切向夹角和轴向距离;在球坐标系中,3 个坐标值表示径向距离和两个切向夹角。

(2) 屏幕定位　用光标拾取屏幕上的任意位置定义节点。该方法不能确定节点的准确坐标,但速度较快,常用于一些不需准确定位的内部节点的定义。

(3) 曲线定位　定义结构边界上的节点时,节点应准确位于边界曲线上。曲线定位就是当用光标拾取屏幕上的点时,将节点锁定在最靠近的曲线点上。

(4) 几何特征点　利用几何模型上的特殊位置点确定节点位置。特征点包括端点、交点、圆心、切点、象限点和直线中点。

(5) 偏移定位　通过几何模型特征点或已有节点沿坐标轴方向偏移一定值确定节点位置,这实际上是相对坐标定位方法。

(6) 投影定位　将几何特征点或已有节点向规定平面内投影,用投影点的位置确定节点。

除通过上述定位方法生成单一节点外,为提高节点生成速度,半自动分网还提供以下一些复制手段。

(1) 定位复制　将已有节点沿定义坐标系的坐标轴发生一定增量,并在新的位置上复制原节点。

(2) 插值复制　是在两组节点之间沿某一坐标轴等分若干份,并在等分点上复制节点。

(3) 映射复制　是指将已有节点沿某一平面进行对称反射,并在对称位置上产生映射节点。

3. 单元定义方法

通过上述方法定义节点之后，用光标依次拾取节点，分析软件将根据单元节点数自动形成单元，并根据生成顺序自动进行编号。除了这种生成单一单元的方法外，也可通过以下手段加快单元生成速度。

（1）定位复制　通过移动、旋转等定位方式将已有单元定位在新的位置上，并在新的位置产生单元及其节点的复制。通过多次连续复制，可以快速生成一些规则的网格图案。例如图 16－17 中的三齿模型，就可以通过一个齿的网格绕齿轮中心作两次旋转复制生成。

（2）映射复制　将已有单元沿给定平面或直线作对称反射，并在反射位置产生单元及其节点的复制，这种方法多用于生成一些对称的网格图案，如图 16－18 所示。

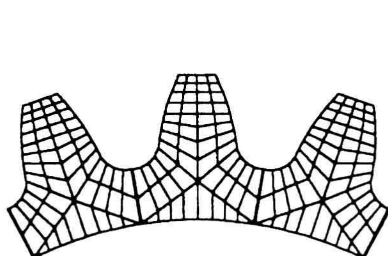


图 16－17　定位复制生成的三齿模型

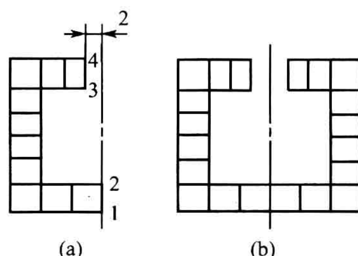


图 16－18　映射复制

采用定位和映射复制方法生成的单元与原有单元保持同样的材料特性、物理特性和截面特性。

（3）拉伸变换　将已有单元的棱边或单元面沿给定方向拉伸一定距离，利用这些边或面扫描形成的面积或体积生成平面单元或空间实体单元，如图 16－19 所示，其中虚线表示通过拉伸形成的单元。

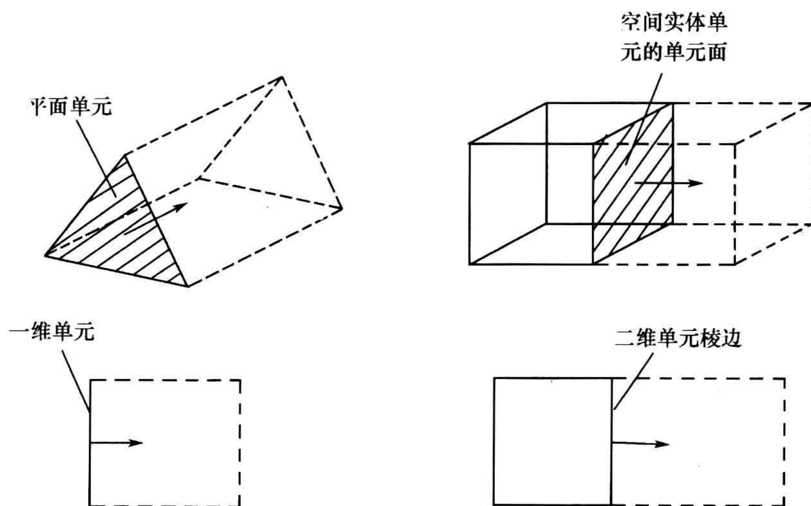


图 16－19　拉伸变换生成单元

利用拉伸变换可以生成一些沿厚度方向均匀或规则分布的网格图案，例如在图 16－20(a)中，单齿平面网格沿平面法线和与法线成β角的方向连续拉伸五次，就能得到直齿和斜齿的实体单元，如图 16－20(b)和(c)所示。

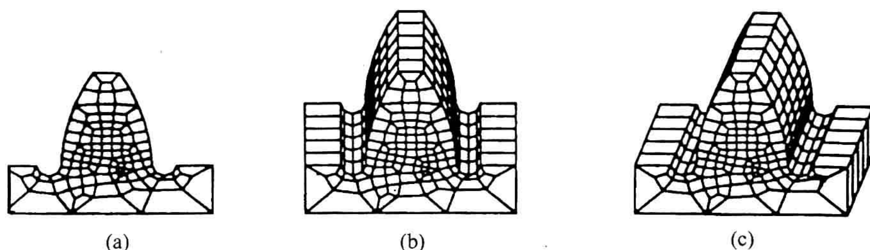


图 16－20　利用拉伸变换生成的网格图

(a) 平面网格；(b) 直齿空间单元；(c) 斜齿空间单元。

(4) 旋转变换　将已有单元的棱边或单元面绕给定轴旋转一定角度，利用扫描形成的面积或体积生成二维单元或实体单元。这种方法可生成一些轴对称分布的网格，图 16－21是连续几次旋转形成的网格图。

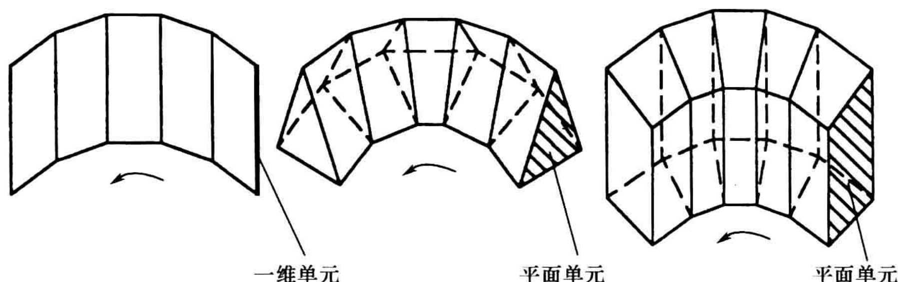


图 16－21　旋转变换生成单元

(5) 单元分割　将一维单元等分为若干相同类型的单元。该方法主要用于一些较长杆件的离散。

16.2.2　自动分网方法

对于平面问题或形状规则的空间问题，利用上述半自动方法可以随意控制网格大小、形状和疏密。但对于形状复杂的空间曲面或实体，完全由人确定节点位置非常困难。因此人们在自动分网的算法研究和程序开发方面作了大量工作，并取得了很大进展。目前商用有限元软件都具备了自动分网功能，对一些非常复杂的结构都能进行自动分网。自动分网降低了网格划分难度，大大提高了建模效率。

1. 自动分网的一般过程

自动分网是一种基于图形的网格划分方法，它是根据人为设置的网格类型、大小、疏密等要求，由软件在几何模型所定义的平面或空间内生成所有节点和单元，并自动进行节点和单元编号。

自动分网必须以几何模型为基础，因此分网前首先应在计算机内建立分析对象的几何模型。几何模型的表示方法不一样，自动分网的算法也不相同。用 B－rep 表示的几何模型，主要采用映射方法，而用分割表示(如八叉树表示)的几何模型则采用递归分割法。

由于目前几何模型主要采用 B - rep 表示,所以这里仅介绍映射方法的一般过程。

映射方法的基本过程是:首先将定义于三维欧氏空间内的曲面映射为参数空间中的平面,在参数空间内对平面划分网格,生成节点和单元后,再将每个节点的坐标(ξ,η)逆映射到欧氏空间中三维曲面上的节点坐标(x,y,z),该过程如图 16 - 22 所示。

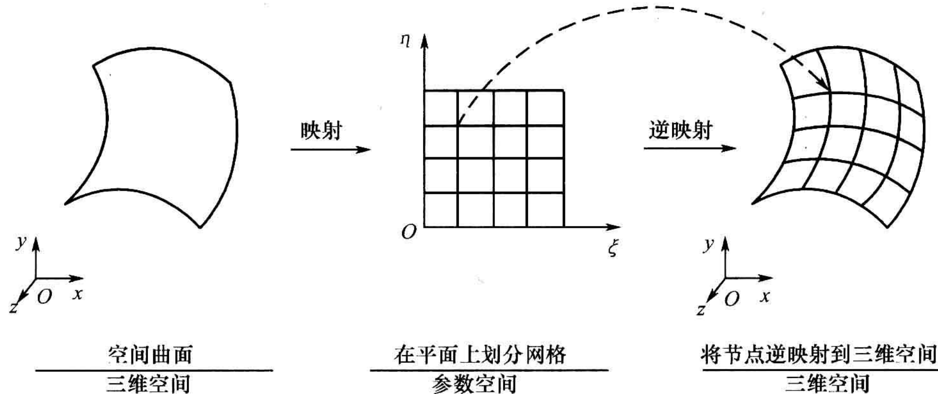


图 16 - 22　自动网格划分一般过程

在参数空间内对一个平面划分网格的一般步骤为:首先将边界曲线的端点确定为节点,再根据曲线的两个端节点、按网格尺寸要求对曲线进行插值,在边界曲线上形成节点。然后根据各边界曲线上的节点、按网格最优原则和平滑过渡原则插值或迭代形成平面内部的节点。即按几何元素的点、线、面顺序形成节点,如图 16 - 23 所示。

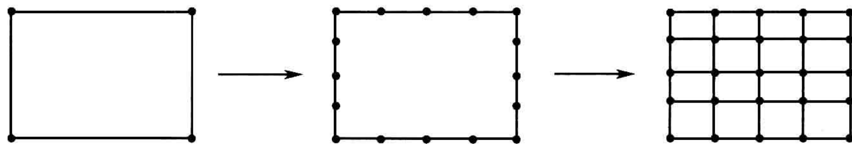


图 16 - 23　平面网格划分步骤

为保证从模型空间到参数空间的映射,三维曲面应满足下述条件。

(1) 具有一个由封闭曲线组成的外环。

(2) 外环所包括的区域内可以存在一定数量的、同样由封闭曲线组成的内环,但内环与外环、内环和内环之间不能相交。

(3) 曲面内不能存在悬挂的曲线和孤立的点。

对于在实体模型上的网格划分,其步骤只是在面的基础上多一个体的层次。即形成边界面上的节点后,再由边界面上的节点按网格最优和平滑过渡原则插值或迭代形成实体内部的节点,也就是按点、线、面、体的顺序自下而上地形成节点。上述过程中,形成实体内部节点所需要的计算量最大。

为保证上述网格划分过程的顺利完成,对结构实体模型的要求是:

(1) 实体模型可以由若干个体组成,体与体之间具有共同的交界面。

(2) 每个体必须是由若干表面形成的封闭体积,不能存在悬挂的边、面。

(3) 体内可以存在中空,但中空表面与边界表面、中空表面与中空表面之间不能相交。

2. 几何模型的建立与处理

各类几何模型可通过 CAD 方法建立,这里将结合自动分网的特点,介绍需要对几何模型进行的一些处理方法,以便能对分网过程和网格形式进行控制。

根据上述自动分网过程,不难发现以下一些特点。

(1) 曲线的端点必定划分为单元的角节点

根据该特点,若要求模型上的某点必须为节点,则可通过编辑命令将曲线在节点位置剪断,使其成为端点。如在图 16-24(a)中,若要保证集中载荷的作用点 a、分布载荷的分界点 b 和 c、支撑约束点 d 和 e 划分为节点,则可将边界曲线在这些点剪断,自动分网的结果如图 16-24(b)所示。

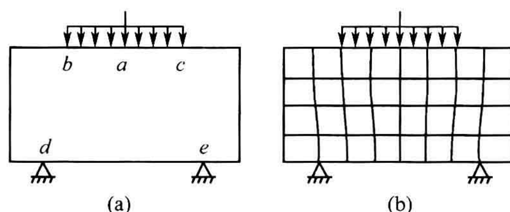


图 16-24 模型边界曲线的处理

(2) 表面的边界曲线必定划分为单元棱边,且一条曲线至少应有一条棱边

根据该特点,若要求某些部位划分为单元棱边,则可在几何模型上将这些部位设置为边界曲线。如对于图 16-25(a)所示的旋转结构,由于底部和上部的厚度不同,要求在厚度变化的圆周上划分为壳单元的棱边(即单元不穿过该圆)。这时可将容器模型的旋转母线在点 c 处剪断,旋转后则在该点处形成一边界圆。又如图 16-25(b)所示的结构,由于区域 A、B 的厚度不一样,需要将平面沿厚度分界线 1234 分裂为两张平面。经上述处理后,就能保证自动分出的网格不会穿过变厚度的边界。当两个曲面共享一条边界曲线时,它们在该曲线上的节点划分是相同的。

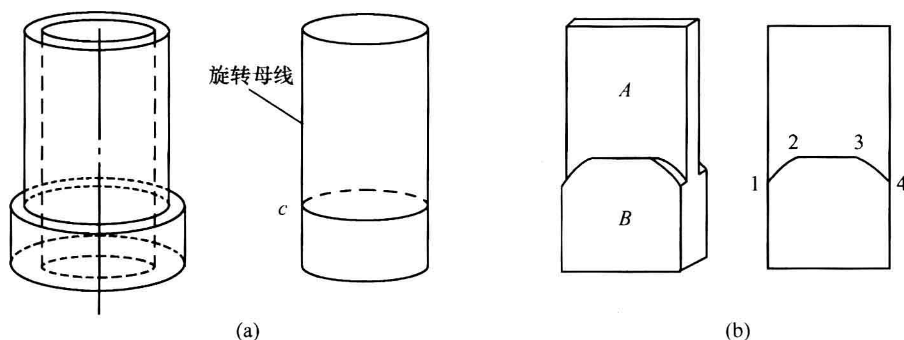


图 16-25 模型表面的处理

同样,如果几何模型存在微小线段,则会限制该处网格必然分得很小,从而导致附近的网格很密。产生微小线段通常有两种情况,一种情况是结构本身的细节,几何建模时人为建立了描述这些细节的微小曲线;另一种情况是几何建模时由于运算产生的,因为复杂的模型要经多次交、差、并等运算才生成,运算过程中有可能产生微小线段。当设置的网格尺寸远远大于微小线段时,自动分网过程就会中断。

（3）体的边界表面必定分为单元面，且一个表面上至少应有一个单元面

基于这一特点，若要求结构内部的某一个面划分为实体单元的单元面，可将实体模型从该面处分裂为两个封闭的体，两个体共享公共的边界面，它们在该面上具有相同的网格划分。例如图 16－26(a)中的结构，其中 A、B 两部分采用不同材料，利用两种材料的分界面将结构模型分为两个封闭的体，它们以分界面作为公共边界。这样，自动分出的实体单元的单元面就会位于分界面上。

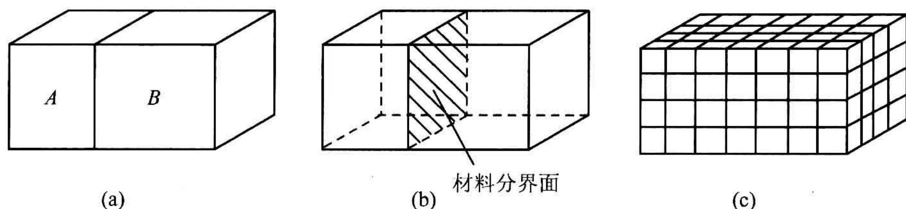


图 16－26　模型体的分裂

与微小线段相似，若几何模型存在相对很小的表面，该处也会划分为很小的单元面，从而导致附近网格密度太大，因此在几何模型中也应尽量避免出现微小的曲面块。

3. 网格大小和疏密控制

自动分网前首先应设置单元类型、形状、阶次、大小和疏密，根据这些设置分析软件才能划分出分析人员所期望的网格。通过设置以下尺寸，可以控制网格大小和疏密，或单元总的数量。

（1）总体尺寸（global size）　指在整个分网区域内对网格大小的要求。

自动分网时，若无局部尺寸要求，分析软件尽可能按总体尺寸确定网格棱边的长度。由于几何模型边界曲线并不一定是总体尺寸的整数倍，所以总体尺寸并不是要求网格边长绝对等于尺寸值，而是尽量使网格棱边接近总体尺寸。例如图 16－27(a)中 95×115 的矩形，若总体尺寸设为 10，则软件会以接近 10 的长度(9.5 或 11.5)均匀分割矩形各边和插内部节点，而不会首先按 10 分割矩形的长和宽，而在最后剩下一列边长为 5 的小网格。

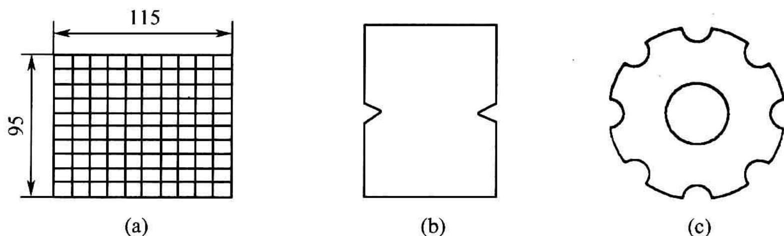


图 16－27　总体尺寸控制网格大小

总体尺寸对网格大小的控制受几何元素大小的影响。例如图 16－27(b)所示的图形，当总体尺寸大于 V 形缺口尺寸时，根据前面介绍的分网特点，缺口的二条边应分别划分为一条网格边，即该处的网格大小受缺口边长限制，而不受总体尺寸控制。根据平滑过渡原则，其他各边的网格分割也将受到缺口边长的影响，这就是前面介绍的细节对网格划分的影响。

当总体尺寸与几何模型中的最小几何元素相差太大时，自动分网过程就可能中断。图 16－27(c)所示为一花键轴截面，轴表面有几条圆弧槽，其半径与轴的长度之比为 1:150。为减少网格，设置的总体尺寸应远大于圆弧槽半径，否则网格沿轴向分布太密，但自动分网不能完成。这时可采用前面介绍的半自动方法，即先在端面上划分网格，因圆弧槽半径与轴截面半径相差不太大，总体尺寸可以设置得较小，然后将端面网格沿轴向拉伸数次，便可得到空间网格图。

（2）局部尺寸　为控制网格疏密，需要在结构的某些部位设置局部网格尺寸。自动分网时，软件将优先满足局部尺寸要求，然后逐步向总体尺寸过渡。

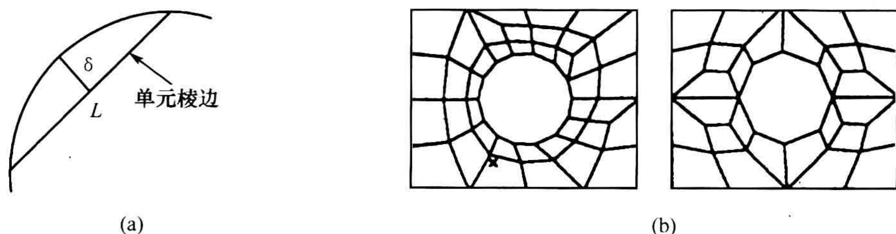
设置局部尺寸通常有以下几种方式。

① 设置离散偏差　几何模型的曲线边界是由若干网格棱边逼近的，因此可用逼近精度间接控制网格大小。逼近精度常用相对离散偏差表示，其定义为

$$\delta\% = \frac{\delta}{L}$$

式中：δ 为绝对偏差；L 为网格棱边长度。

δ、L 的几何意义如图 16－28(a)所示。对于同一曲线，相对偏差设置越小，逼近的网格棱边越多，划分的网格也就越密。例如一个圆，取相对离散偏差为 11% 时，圆周上共产生 14 个网格边，取 22% 时则只产生 8 个网格边，图 16－28(b)是一带圆孔矩形取不同偏差值时自动划分出的网格。



(a)　(b)

图 16－28　离散偏差及其对网格的控制

② 设置曲线网格数　直接给定曲线上的网格棱边数量，分网时则按设置的数目形成网格边数。如对于图 16－28(b)所示的网格，也可以直接给定圆周曲线上的网格数分别为 14 和 8 来控制网格大小。

③ 设置点附近的网格尺寸　在某些特殊点上设置尺寸大小，分网时在这些点附近按设定值确定网格大小。例如图 16－29 中的图形，没有设置局部尺寸时网格划分情况如图(a)所示，为了在方形槽处加密网格，分别在槽的 4 个顶点上设置较小的局部尺寸，自动分出的网格如图(b)所示。

在自动分网过程中，总体尺寸控制是必需的，而局部尺寸可根据网格分布的需要设置。总体尺寸、局部尺寸和几何元素实际大小共同决定网格数量和分布。分网时只有根据几何模型的特点，设置合理的尺寸，才能自动划分出预期的网格形式。

4. 网格自动划分实例

图 16－30 给出了两个自动分网的实例，其中图(a)是基于实体模型的空间网格划分结果，图(b)是基于曲面模型划分出的薄壳单元网格。

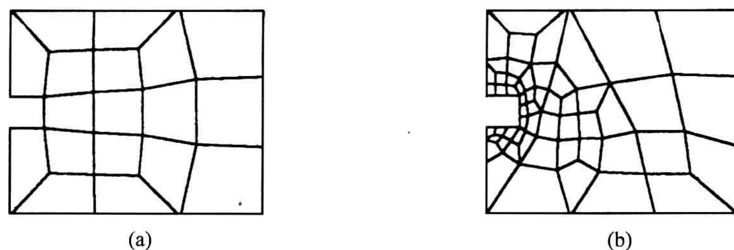


图 16－29　设置点附近的网格尺寸

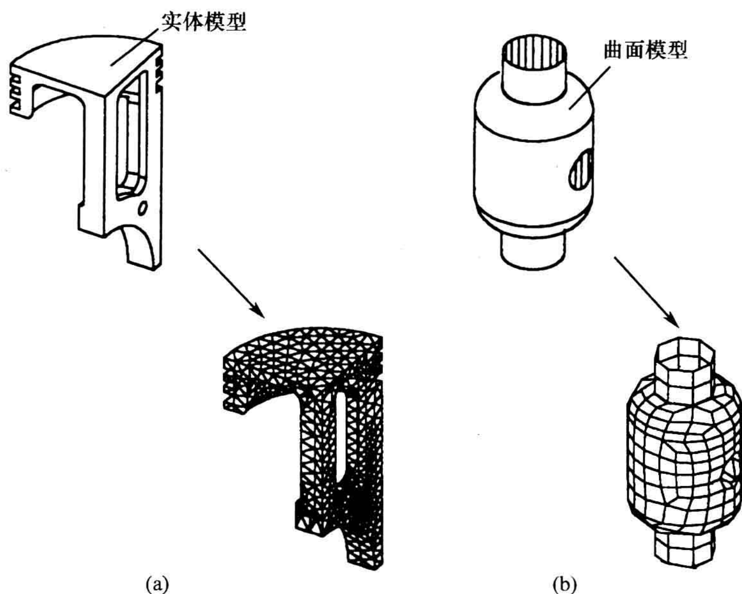


图 16－30　网格自动划分实例

16.2.3　自适应分网

由于几何模型和边界条件的复杂性，有时在网格划分之前还难以对网格提出完全合理的要求。例如，在不同的应力梯度区域要求采用不同的网格密度，但在分析以前又不一定能完全了解整个结构的应力分布，这样就可能在应力梯度大的地方采用了较大的网格，造成计算精度不够。也可能在应力梯度小的区域采用了较小的网格，造成不必要的计算浪费。

自适应分网（adaptive meshing）是指由软件根据几何形状、物理特征、力学性能等特点，自动调节网格大小和布局，以适应这样特点的需要。比如上面介绍的根据曲线离散偏差控制网格大小的方法就可以理解为一种自适应分网，即根据结构的形状特征（曲率大小）自动调节网格的大小。自适应分网本身也是一种自动分网方法。

自适应分网是自动分网的一个发展方向，它可以使网格形式更合理，分网效率更高。目前一些软件已具备自适应分网功能，但这种方法还处于研究和发展中，各种软件的自适应标准和自适应能力也不一样。目前较常用的是一种基于分析数据梯度的自适应方法，即首先对结构进行初算，然后根据计算出的结果数据梯度调整网格大小。梯度大的部位

适度减小网格，梯度小的地方适当增大网格，这种减小和增大过程可以重复进行，直到满足给定的精度要求。

利用自适应分网方法，可对应力分布复杂的结构首先用大小适度的均匀网格初算，然后根据计算结果由软件自动调整网格疏密。如在图 16 – 31 中，图(a)是初步网格划分，分布基本均匀，共有 1585 个单元；图(b)是计算的单元应变能等值线图，可知圆弧 12 附近等值线较密，应变能梯度较大；图(c)是为适应应变能梯度而重新自动划分的网格，可以看出圆弧 12 附近网格有所加密，其余部分的网格尺寸有所增加，这时模型共有 1590 个单元，单元数量略有增加，但网格形式却趋于合理。

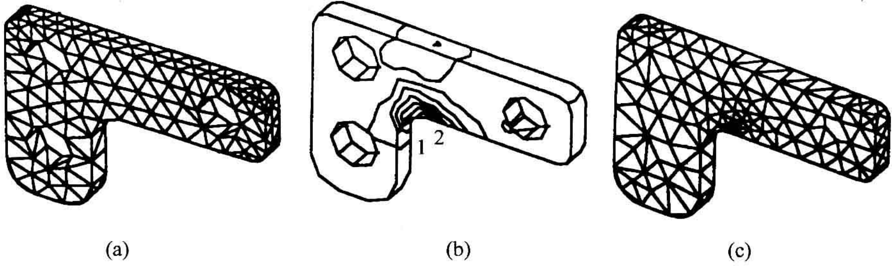


图 16 – 31　自适应分网

第 17 章　模型检查与处理

网格划分以后，还需对模型进行必要的检查和处理，以提高网格质量和清除畸形单元。本章介绍模型检查和处理的主要内容。

17.1　网格质量检查

网格质量是指网格形状的合理性。对于同一形式的网格，不同的形状有可能产生不同的计算结果。理论和实践都已证明，当各类网格具有理想的形状时，计算出的结果最好。三角形网格的理想形状是等边三角形，四边形网格的理想形状为正方形，多面体网格的理想形状是相应形式的正多面体。对于二次和三次单元，边节点的理想位置在边界的等分点上。

然而，实际网格不可能都具有理想的形状，它们或多或少与理想形状存在一定差异，这种形状差异称为网格变形。网格变形将带来一定误差，但适度的变形对精度不会有明显影响，只有当变形量超出某一限度时，计算精度才随变形增加而显著下降。因此在划分网格时，应将网格变形控制在一定范围之内。

结果误差与网格变形的关系非常复杂，它与单元类型、载荷性质以及约束条件等多种因素有关。或者说，对于具体不同的分析问题，网格变形对结果精度的影响是不一样的。因此很难从理论上定量确定多大的变形量是允许的，这一点主要依靠计算经验。目前不同分析软件设置的上限值也不完全相同，当检查发现网格变形超出设定值时，软件将给出警告或中止计算。

自动分网时容易产生网格变形。其原因主要有两个，一是几何模型复杂，在一些扭曲的表面、过渡面等不规则或尺寸相差较大的区域容易引起网格变形；二是网格的疏密相差较大，过渡距离又较小，这时在过渡区域内容易产生较大的网格变形。因此设置合理的网格尺寸非常重要。

网格变形的大小通常用下列指标进行度量。

17.1.1　细长比

细长比用于度量矩形网格的变形，其定义为

$$细长比 = b/a \qquad (17-1)$$

式中：b 为矩形长边尺寸；a 为矩形短边尺寸，如图 17－1 所示。

细长比为不小于 1 的正数。细长比等于 1 时，表明网格为理想的正方形网格，这时网格无变形。细长比越大，网格变形越大。通常要求结构关键部位的细长比不要超过 2，次要部位的细长比不要超过 10。

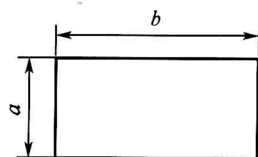


图 17－1　细长比的定义

图 17－2 说明了细长比对结果精度的影响。在网格数量均为 12 的前提下，同一矩形悬臂梁采用了 4 种不同细长比的矩形网格，图 17－2(a)所示细长比从Ⅰ到Ⅳ逐渐增加。图 17－2(b)是计算出的自由端 A 点的位移。可以看出：细长比越大，计算精度越差。即Ⅰ所示的网格最好，Ⅳ所示的网格最差。

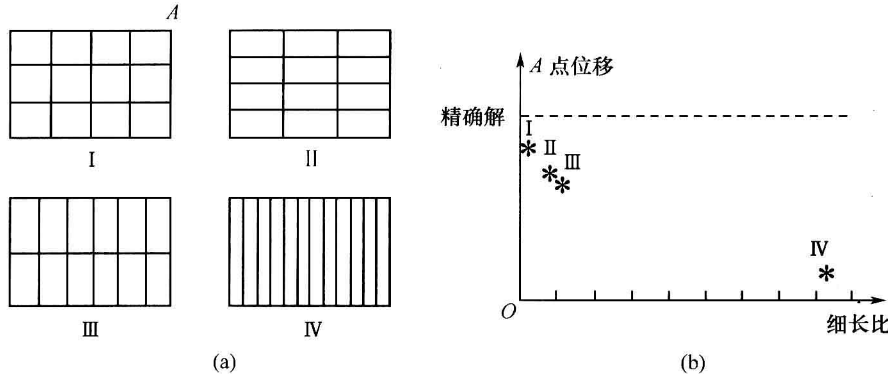


图 17－2　细长比对计算精度的影响

(a) 网格划分形式；(b) 计算结果。

17.1.2　锥度比

锥度比用于度量梯形网格的变形，其定义为

$$锥度比 = c/d \tag{17-2}$$

式中：c 为梯形上底；d 为梯形下底，如图 17－3 所示。

锥度比为不大于 1 的正数，理想网格的锥度比为 1。锥度比越小，网格变形越大。通常结构关键部位的网格锥度比应大于 0.45，而次要部位的网格锥度比不应小于 0.1。

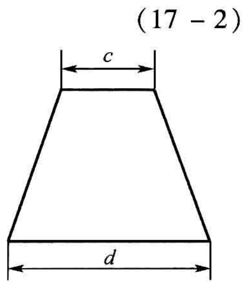


图 17－3　锥度比定义

17.1.3　网格内角

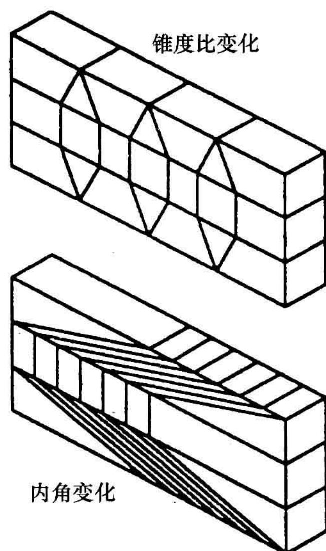
三角形和四边形网格的理想内角分别为 60°和 90°，所以这两类网格的每个内角都应在 60°和 90°附近。内角偏离越大，网格变形越大。三角形网格的内角一般不应小于 15°，四边形网格的内角一般不应小于 45°。

图 17－4 用一个悬臂梁说明了锥度比和内角对精度的影响。梁尺寸为 1×3×7，顶端受纯弯曲载荷作用，用线性六面体单元离散，高度方向划分为三层网格。分别变化网格的锥度比和内角，计算出梁的顶端位移和根部应力列于图的右侧(图中数据为计算值与理论值之比)。可以看出，网格锥度比和内角减小，即网格变形增大，结果精度降低。

17.1.4　翘曲量

对于壳单元的四边形网格，如果四个节点不在同一平面，则称该网格面发生了翘曲。由于三角形网格的三个节点始终是共面的，所以翘曲量仅用于度量四边形网格。

图 17－5 所示的网格由节点 a、b、c、d 组成，它们将四边形分为 abc 和 acd 两个三角形，设对角线 ac 和 bd 的最短距离为 D，三角形 abc 和 acd 的法线夹角为 α，则网格翘曲量可用 D 或 α 度量。D 值或 α 值越大，网格翘曲越严重。因此应要求 D 值或 α 值越小越



锥度比	顶端位移	根部应力
1.000	0.950	0.995
0.200	0.926	1.133
0.020	0.790	1.189
0.002	0.631	1.219

内角	顶端位移	根部应力
60°	1.000	0.995
45°	0.729	0.840
30°	0.521	0.683
15°	0.282	0.270

图 17－4　锥度比和内角对计算结果的影响

好，理想的 D 值和 α 值应为零，这时表示网格面没发生翘曲。

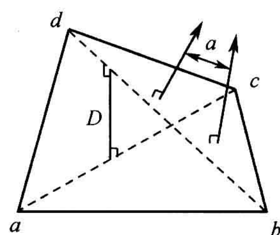


图 17－5　网格面的翘曲

17.1.5　拉伸值

不同类型网格的拉伸值定义不完全相同。对于三角形网格，拉伸值 S 的定义为

$$S = \frac{(R/L_{max})_{实际单元}}{(R'/L'_{max})_{母单元}} \qquad (17-3)$$

式中：R、L_{max} 为实际单元网格的内切圆半径和最大边长；R'、L'_{max} 为母单元网格（即理想形状）的内切圆半径和最大边长，如图 17－6(a) 所示。

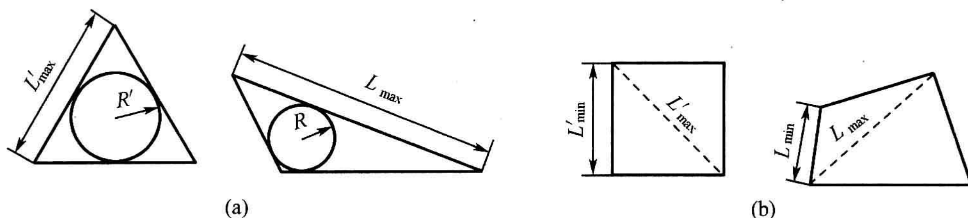


图 17－6　拉伸值定义

由于三角单元的母单元为等边三角形，其内切圆半径和边长之比为定值 $1/\sqrt{12}$，因此式(17－3)变为

$$S = \frac{\sqrt{12}R}{L_{max}} \qquad (17-4)$$

同理，四面体空间网格的拉伸值定义为

$$S = \frac{\sqrt{24}R}{L_{max}} \qquad (17-5)$$

式中：R 为四面体内切球的半径；$L_{\max}$为四面体的最大边长。

对于四边形网格，拉伸值 S 的定义为

$$S = \frac{(L_{\min}/L_{\max})_{实际单元}}{(L'_{\min}/L'_{\max})_{母单元}} \tag{17-6}$$

式中：$L_{\min}$、$L_{\max}$分别为实际单元网格节点之间的最短距离和最长距离；$L'_{\min}$、$L'_{\max}$分别为母单元网格节点之间的最短距离和最长距离，如图 17－6(b)所示。

由于四边形单元的母单元为正方形，$L'_{\min}$与 $L'_{\max}$之比为定值 $1/\sqrt{2}$，因此式(17－6)变为

$$S = \frac{\sqrt{2}L_{\min}}{L_{\max}} \tag{17-7}$$

同理，六面体空间网格的 S 值为

$$S = \frac{\sqrt{3}L_{\min}}{L_{\max}} \tag{17-8}$$

拉伸值为区间[0,1]上的数。$S=1$ 表示网格未发生变形，即理想网格；$S=0$ 表明网格面积或体积为零，为畸形网格；$0<S<1$ 表示网格有变形，S 越小，变形越严重。例如图 17－7 中的两个网格，$S_1=0.59$，$S_2=0.43$，说明网格 2 的变形大于网格 1。

17.1.6 边节点位置

边节点位置对网格质量的影响可用偏差 δ 度量，δ 的定义为

$$\delta = a/b \tag{17-9}$$

式中：a、b 的定义如图 17－8 所示。

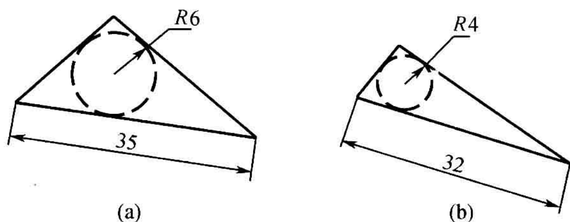


图 17－7　两个三角形网格的变形
(a) 网格 1；(b) 网格 2。

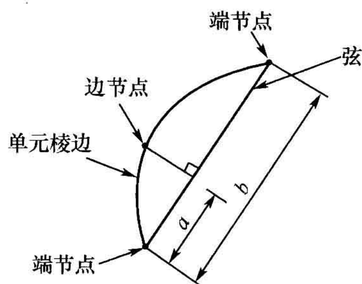


图 17－8　高阶单元的边节点位置

二次单元的理想偏差值为 0.5，三次单元为 0.33。偏差太小或太大的网格都不好。

上面介绍了网格变形的各种度量方法。一般来讲，有限元模型中各个网格的变形程度是不相同的，有的变形小，有的变形大，适度的变形是允许的。若模型中存在极少数变形较大的网格，它们对结构整体的位移不会产生明显影响，但对这些网格处的局部应力影响较大。所以计算应力时，应严格检查和控制结构关键部位处的网格变形。

检查发现网格变形太大时应进行修正。常见修正方法有两种：一种是手工方法，即将变形的网格及其相邻网格显示在屏幕上，利用节点移动命令移动变形网格的节点，以使网

格形状趋于合理。但移动节点又会影响邻近网格的形状,所以操作时要注意其他网格的变化。该方法适合于修正个别网格。另一种为自动方法,即由软件自动对网格形状进行修正。自动修正的手段有:

(1)移动节点,这一点与手工方法相同。

(2)将高次单元的曲线边界变直。

(3)将变形网格进一步细分。

(4)整个模型重新分网。

上述手段因软件不同而异。有的软件修正能力较强,有的较弱,使用时应根据具体软件的修正功能有选择地采用。

17.2 重合节点检查

分网时有可能产生重合节点,即在一个位置上存在两个以上的节点,特别是半自动分网时很容易产生重合节点。不需要的重合节点将产生错误的计算结果,因此计算前应进行检查并予以消除。

例如图 17-9 中,一个矩形板的网格划分如图(a)所示,模型自由边界应为矩形,如果为图(b)所示的图形,说明在点 E 处存在重合节点。这时模型在 EF 线上实际存在一条裂纹(相当于沿 EF 线将板锯开),变形后可能出现图(c)所示的裂缝,或出现图(d)所示的重叠。由于板的抗弯能力减弱,因此计算出的位移要比实际值大。

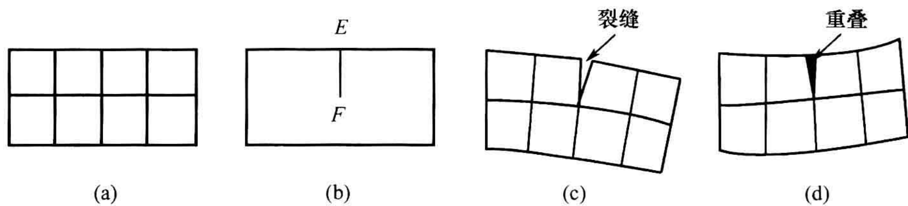


图 17-9 自由边界显示检查重合节点

在图 17-10(a)所示的容器模型中,若球冠与圆筒两部分的交界线上存在重合节点,且两部分的单元分别具有不同的节点,则整个模型实际上是两个分离的模型。当容器内壁加压时,计算后发现,由于顶部球冠没有位移约束,球冠向上发生了刚体移动,如图 17-10(b)所示。这时应消除重合节点,以使交界线上下的单元在交界处享用共同的节点,使两部分的单元能够真正连接。

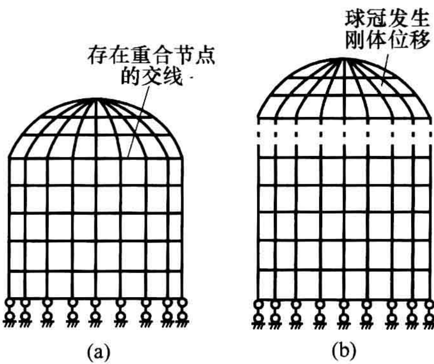


图 17-10 容器交界线上存在重合点

重合节点可以通过模型的自由边界显示来发现。仅属于一个单元的棱边或单元面称为自由棱边或自由面,若干自由棱边(面)连接形成模型的自由边界。自由边界应位于结构的边界曲线或边界曲面上,而不应在结构内部。

上述方法可以检查存在于模型内部的重合节点。当重合节点位于结构棱边上时，可以通过“节点距离检查”来发现。如果节点距离小于给定的“节点重合公差”，则软件系统认为这些节点是重合的，并给予提示。

17.3 重合与遗漏单元检查

半自动分网时，有时可能用相同的几个节点重复建立了多个单元，这些重合单元虽在网格显示上相同，但对计算结果会产生影响。因为它们将为同一节点提供多次刚度贡献，从而使结构在重合单元部位显得过刚，造成模型中存在局部硬块，因此计算出的变形会减小。

除重合单元外，有时也可能遗漏单元。例如在划分图 17－11(a)所示的网格时，当矩形四周的网格划分之后，网格显示便与图(a)完全相同，这时就可能遗漏单元⑤。遗漏单元将使模型内部出现中空，从而降低结构刚度，或改变结构内部的热传导，后处理时可以发现结构应力、变形或热流在中空区域不连续。

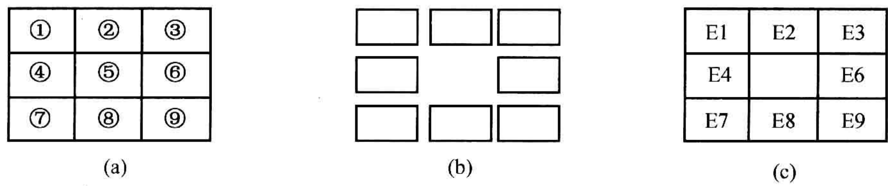


图 17－11　遗漏单元检查

(a) 网格形式；(b) 网格收缩显示；(c) 显示单元编号。

重合单元在屏幕上显示好像只是一个单元，人工检查时可以显示单元编号，若发现编号重叠，则检查组成这些单元的节点号，便可认定该处是否存在重合单元。这种方法适合于平面模型，对于复杂空间模型可利用软件提供的自动检查功能。利用网格收缩显示或显示单元编号可以发现遗漏单元，如图 17－11(b)和(c)所示。

17.4 带宽优化

求解总刚方程常见有两类方法：带宽法和波前法。它们的主要区别是，带宽法是将所有单元刚阵组集完毕后再进行求解，而波前法则是边组集边求解。利用带宽法时，求解时间和存储容量均与矩阵带宽成正的关系，而带宽又与节点编号顺序有关。因此带宽优化的目的就是进行合理的节点编号，以减小总刚矩阵的带宽。

如第 2 章所述，由于一个节点仅与周围少数节点有联系，造成总刚矩阵呈带状分布，总刚矩阵中每一行从主对角元素起到最后一个非零元素止所具有的元素个数称为该行半带宽，所有行半带宽中的最大值称为矩阵半带宽。对于同样的网格划分，总刚矩阵中非零元素的数量是相同的，但不同的节点编号将影响非零元素的分布，即带宽大小。例如图 17－12 所示的网格，按图(a)的节点编号，半带宽为 8。而按图 17－12(c)的节点编号，半带宽增加到 14。两者的矩阵形式分别如图 17－12(b)和图 17－12(d)所示。

用带宽法求解总刚方程时，总刚矩阵通常采用二维等带宽或一维变带宽方式进行存

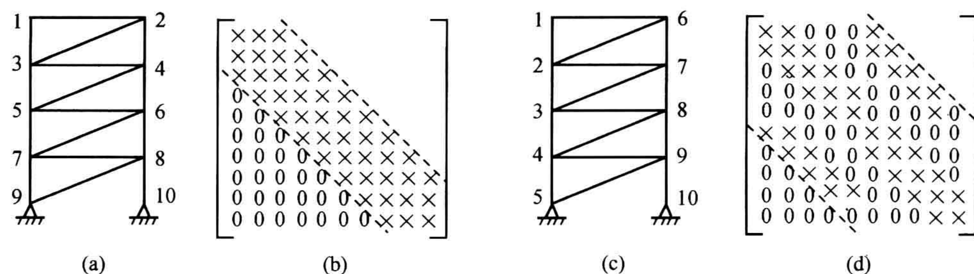


图 17－12　节点编号与半带宽的关系

储，即仅存储半带宽以内的元素，以避免带宽外的大量非零元素参与存储和运算。采用等带宽解法时，所需要的存储量为 $n \times B$（n 为矩阵阶次，B 为半带宽），求解时间大约正比于 $nB^2/2$。可见，进行合理的节点编号，减小半带宽，可以显著提高求解速度，降低计算对存储容量的要求。

利用半自动分网时，分析软件根据节点生成的先后依次进行编号。分析人员在划分网格时是按网格划分的方便来建立节点的，而不可能按节点编号的合理性来确定节点生成顺序。对于复杂模型，也不可能由人来判断哪种编号合理。采用自动分网时，网格划分按几何元素的编号进行，最后得到的节点编号也不一定有最小的带宽。所以目前很多软件都提供了带宽优化功能，分析人员应在分网之后进行带宽优化，对节点重新进行合理编号，特别是对大型有限元模型或需要进行多种工况重复计算的模型更应如此。

目前许多软件已具有自动带宽优化功能，即模型提交计算时，首先进行带宽优化，然后再做求解计算。

第18章　边界条件的建立

实际产品中的结构都不会单独存在，它们必然和其他结构或外界发生相互作用。进行有限元分析时，往往是将所关心的结构单独抽象出来进行分析，而分析结构与其他结构或外界的关系则用载荷、位移约束和热交换条件来考虑。

有时为了建模或计算需要，也可能对模型进行某些人为规定或限制，如为消除刚体位移补充的位移约束，异类单元连接的多点约束等式，子结构的连接自由度，静力缩聚的主从自由度等。一般地，施加在模型上的各类外部条件统称为边界条件。

将实际工况量化为模型边界条件也是有限元建模的关键环节之一。边界条件是否符合实际，很大程度上决定了计算结果的精度。边界条件的提取与工况复杂程度、测试方法和手段、人对结构的了解程度以及人的工程知识和经验等多种因素有关。本章介绍常见边界条件的类型、应用及建立方法。

18.1　位移约束条件

位移约束（displacement restraint）是对节点位移的大小和相互关系的限制。在静力和动力分析中，几乎所有模型都需要施加数量不等的位移约束。

18.1.1　位移约束的必要性

如第2章所述，总刚矩阵是奇异阵，其物理意义是整个结构可在无约束或约束不足的情况下发生刚体运动。为了求出结构的变形位移，就必须对模型施加足够的位移约束，以排除各种可能的刚体运动。但应指出，由于总温度矩阵不是奇异阵，所以热分析时没必要作类似处理。

平面结构的刚体运动表现为平面内的2个平动和1个转动，共3个刚体运动，因此位移约束必须足以消除这3个运动。图18－1给出了几种约束方法，图中箭头表示被约束的节点位移分量。在图(a)中，对点A施加固定约束$u_A = v_A = 0$，可以消除两个平动，再在A点以外的任意一点B增加一个水平或垂直约束，即$u_B = 0$或$v_B = 0$，便可消除转动；在图(b)中，对点A和点B分别施加垂直或水平约束后，结构仍可转动（图中虚线所示），这时若在其他任意一点增加一个约束，则可消除转动；在图(c)所示的刚架结构中，只要约束一个节点的3个自由度，即$u_A = v_A = \theta_A = 0$，便可消除所有刚体运动；在图(d)和图(e)中，虽然也在3个节点加了3个约束，但这些约束的方向相同，不能消除所有刚体运动。结构在某个方向约束不足，而在另一个方向存在多余约束；在图(f)和图(g)中，除了消除刚体运动的约束外，还存在3个多余约束，即所谓静不定结构或超静定结构。

由此可见，为了消除平面结构的刚体位移，至少应在模型上施加3个约束，且被约束的3个位移不能沿同一方向。如果节点只有2个移动自由度，则必须至少约束2个节点。

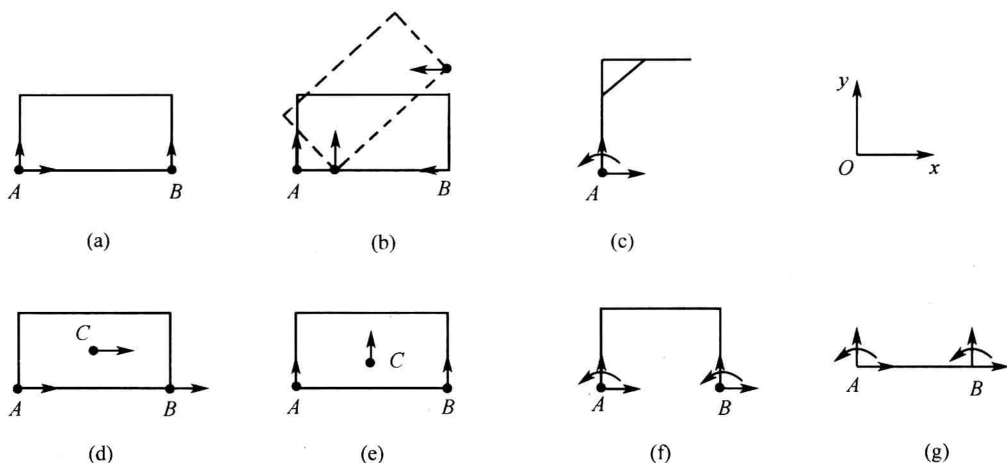


图 18－1　平面结构的约束方法

如果节点还具有转动自由度，则可以只在一个节点上施加所有 3 个约束。

空间结构的刚体运动表现为沿坐标系 3 个轴坐标方向的移动和绕 3 个坐标轴的转动，共 6 个运动。同样，为了消除空间结构的所有刚体运动，应在模型上施加至少 6 个位移约束。如果节点只有 3 个移动自由度，则约束必须加在至少 3 个不共线的节点上，且约束的位移应具有沿 3 个坐标轴方向的位移。

例如图 18－2 所示的结构，只有图(a)所示的位移约束是合理的，而其余各图都还存在刚体位移。其中图(b)只约束了 2 个节点，图(c)约束的 3 个节点是共线的，这两个结构都可以绕 A、B 两点的连线旋转；图(d)虽然约束了 3 个不共线的节点，但约束的 6 个位移只有沿 x、y 两个方向的位移，结构仍可沿 z 向移动；图(e)只有 5 个约束，约束数量不够，结构可绕 y 轴旋转。如果节点具有 6 个自由度，则所有 6 个约束就可以加在一个节点上。

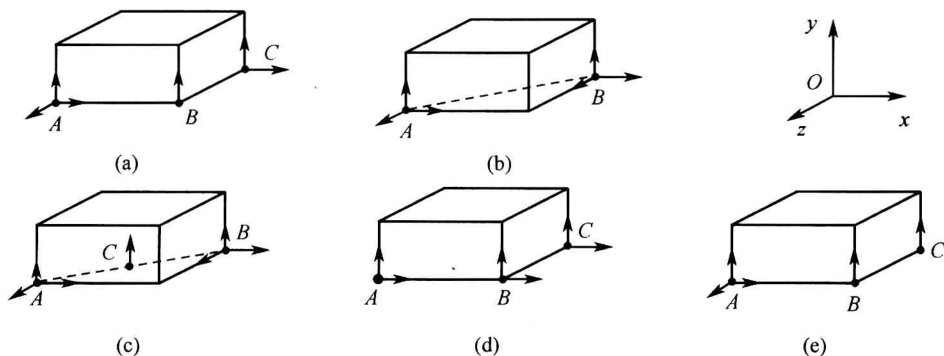
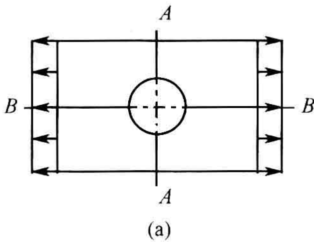


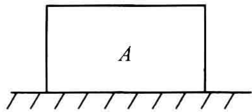
图 18－2　空间结构的约束方法

上面介绍的都是通过节点位移为零的刚性约束来消除刚体运动的。实际上，强迫约束和弹性约束都可以消除刚体运动，这两种约束的考虑方法与刚性约束相同，只是将零位移换成相同方向的非零值或弹簧单元。

在施加位移约束以消除结构刚体运动时,应注意以下几个问题。

(1) 有些结构尽管本身处于力平衡状态,即外力合力为零,外力不会使结构发生刚体位移。但由于计算机的舍入和截断误差,也可能在模型上产生由于计算引起的不平衡力,从而引起刚体位移,所以这类结构的模型也应该施加必要的位移约束。例如图 18 -3(a)所示的两端受拉平板,虽然两端拉力相等,结构在水平和垂直方向均处于平衡,但在作分析时两个方向都应施加约束。





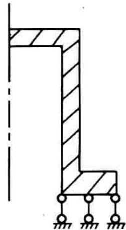


图 18 -3　施加位移约束应注意的问题

(2) 有些结构虽然在实际环境中不会发生刚体运动,但作有限元分析时却有可能。例如图 18 -3(b)中的结构 A,即使在水平方向给结构作用一个适当的干扰力,由于它与基础接触面的摩擦,结构 A 仍不会发生水平移动。但建立有限元模型后,有限元程序并不会考虑摩擦力的存在,若存在计算误差,计算结果仍可能有水平刚体位移。因此结构的刚体运动应从其模型来判断。

(3) 由于位移约束将影响结构的应力和位移分布,所以在选择约束数量和位置时应慎重考虑。位移约束必须符合实际位移状态,约束太多,结构过约束,则有可能造成局部高应力区。约束太少,结构欠约束,同样会计算出不真实的结构变形。被约束的节点应尽量远离应力集中区和大变形区,以减小约束对计算结果的影响。

(4) 轴对称结构的模型只需要施加轴向位移约束,而不必进行径向位移约束。例如图 18 -3(c)中的轴对称容器,只需在法兰盘的接触面上施加了轴向约束,而不必限制径向刚体运动,这是由单元性质所决定的。

18.1.2　约束不足的处理方法

建立位移约束时,首先应考虑结构接触边界上的自然约束条件,如果这些约束不足以消除刚体运动,则需要补充一些约束。补充约束的一般原则是,约束补充后整个结构或结构重要部位的应力和变形不受影响,或影响甚微。补充约束的方法常见有以下几种。

1. 利用对称性

当结构形状和边界条件对称时,可以取结构的若干分之一进行分析,这样就可以利用对称面上的位移条件补充一些约束。例如图 18 -3(a)中的受拉薄板,利用对称性取 1/4 板作分析,如图 18 -4 所示,根据第 14 章介绍的位移条件,在对称面 $A-A$ 上施加水平位移约束,对称面 $B-B$ 上施加垂直位移约束,这些约束便可消除板的 3 个刚体运动。

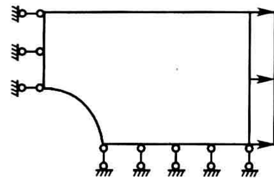


图 18 -4　利用对称性补充约束

2. 人为增加约束

有些结构利用对称性还不能完全消除其刚体运动。如图 18－5(a)所示的连杆，它只有一个对称面，利用对称性只能消除沿 y 向的移动和绕 z 轴的转动。对于图 18－5(b)所示的薄板，尽管它具有两个对称面，但两个面上的约束方向相同，也只能消除 y 向移动和绕 z 轴的转动。两种结构都还存在 x 方向的移动，因此需要人为增加一个 x 方向的约束。况且多数结构都不具备对称性，所以人为补充约束会经常用到。

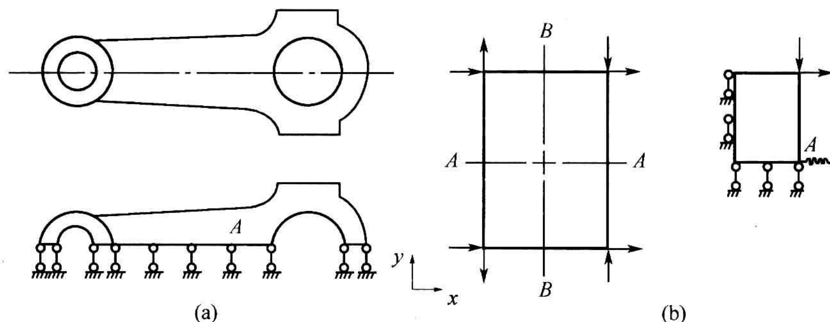


图 18－5　约束不足的结构

增加约束时可以参考以下两条原则。

(1) 根据经验、实验或初算结果可以判断结构某些点的位移非常小，则可在这些点上增加约束。一般要求约束点的变形要比结构关键部位的变形小 2 个～3 个数量级。

(2) 约束点应尽量远离结构的重要部位，如存在应力集中容易发生破坏的部位，有严格配合间隙要求的部位等。根据圣为南原理，所增加的约束只是对约束点附近的局部有影响，而对远离约束点的重要部位影响不大。

3. 将载荷转换为约束

有些结构在不同约束条件下的应力分布相同，只是由于约束位置不同，计算变形的基点不一样，不同约束下计算出的变形相差一很小的刚体位移。例如图 18－3(a)中的两端受拉板，其实际变形形式是对称面 $A-A$ 上的水平位移为零，而板左右两侧变形相等，如图 18－6(a)所示，其中虚线表示结构原形。若将左端受拉面约束住，则右端的变形量比原有变形量增加一端点变形值 Δ，即结构向右平移 Δ，如图 18－6(b)所示，这时结构的应力分布不变。因此当结构受到平衡载荷作用时，就可以将一部分载荷用位移约束代替，从而增加某个方向的约束。

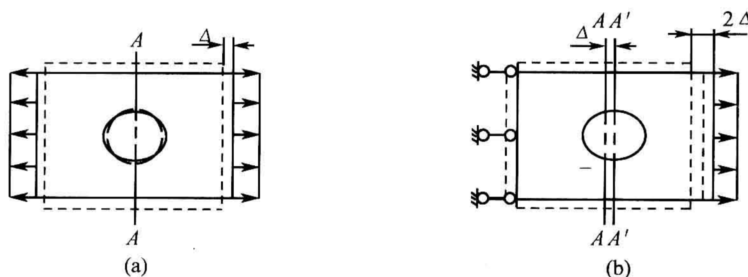


图 18－6　载荷转换为约束

18.1.3 位移坐标系

位移坐标系是节点自由度的参考坐标系,它可以是直角坐标系、柱坐标系或球坐标系。节点所参考的位移坐标系类型不同,其自由度所代表的运动方向也不一样。在直角坐标系中,节点的 3 个移动自由度 u、v、w 分别表示沿坐标系 3 个相互垂直坐标轴方向上的位移;在柱坐标系中,u、v、w 表示沿坐标系径向、切向和轴向的位移;在球坐标系中,u、v、w 表示沿球的径向和两个切向的位移,如图 18-7 所示。而节点的转动自由度则分别表示绕相应坐标轴的转动。

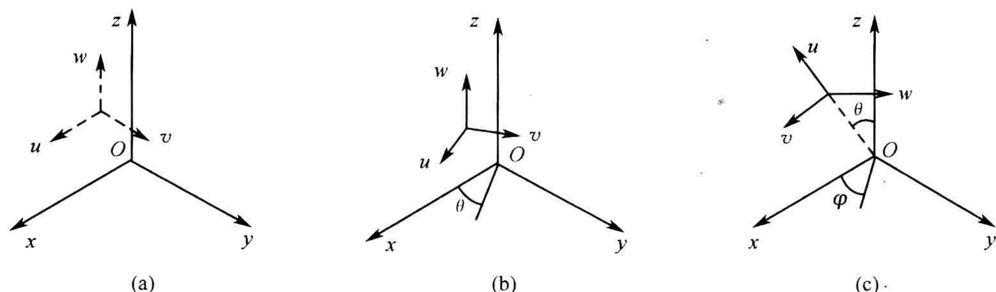


图 18-7 节点位移坐标系

(a) 直角坐标系; (b) 柱坐标系; (c) 球坐标系。

利用半自动或自动分网时,很多软件都提供了在模型任意位置建立三种位移坐标系的功能。通过建立和参考不同的位移坐标系,可以给施加位移约束带来很大方便和灵活性,避免人为进行繁琐的坐标变换,从而提高建模速度。

例如图 18-8(a)所示的模型,结构通过左边的两个销孔和外部铰接,由于销钉的径向刚度很大,可取孔壁上所有节点径向位移为零作为边界条件(孔壁节点仍可沿圆孔的切向发生位移)。这时若在两个孔的中心建立两个柱坐标系,并分别作为孔壁节点的位移坐标系。令孔壁节点的自由度 $u=0$,则可建立要求的位移约束。在图 18-8(b)所示的斜面约束中,建立一个 x 轴与斜面平行的直角坐标系并作为节点位移坐标系,再令接触节点的自由度 $v=0$。图 18-8(c)是从一周期对称结构中取出的一部分,在中心 O 处建立一柱坐标系,则令 $u_i=u_{i+5}$ 和 $v_i=v_{i+5}$($i=1,2,3,4,5$),就可建立周期对称的边界约束条件。这时若采用直角坐标系,则需要利用坐标系的旋转变换来建立边界节点的位移关系,显然要复杂得多。

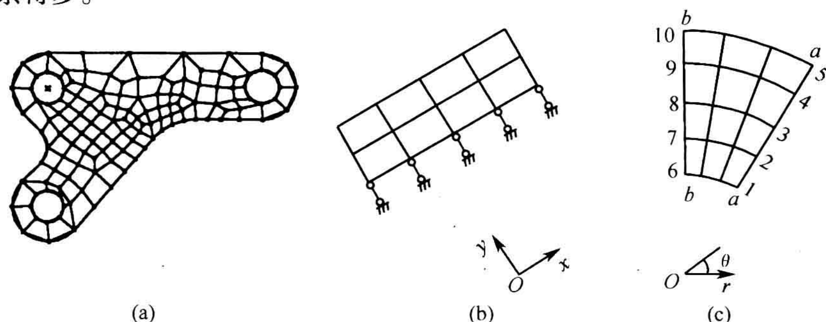


图 18-8 位移坐标系的应用

18.1.4 绝对位移约束

绝对位移约束是指对节点位移大小的限制,它直接或间接规定了节点某些位移分量的绝对大小。这种约束通常包括以下几种类型:

1. 刚性约束

规定节点位移分量值为零的约束条件称为刚性约束。它是建模时最常见的一类约束条件,主要用于模拟结构之间的刚性接触,即认为与结构接触的其他结构有足够的刚性,接触面上的节点不发生变形,这实际上是一种近似但又非常简便的办法。例如在图 18－9(a)中,若认为支撑结构有足够的刚性,则可建立图(b)所示的刚性约束。

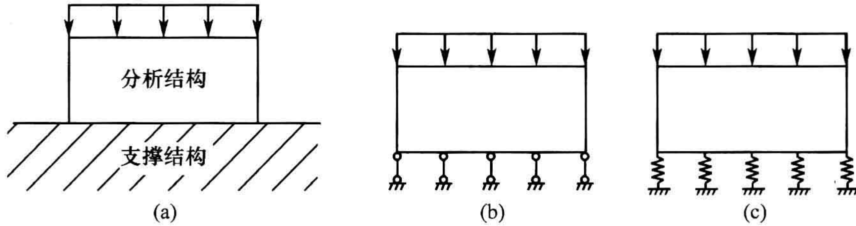


图 18－9　绝对位移约束

(a) 支撑约束;(b) 刚性约束;(c) 弹性约束。

进行刚性约束时,可以约束节点的所有自由度,也可以只约束其中部分,因此刚性约束可以分为以下几种形式。

(1) 固定约束　对节点所有自由度进行限制,被约束的节点在任何方向上均不能发生移动和转动位移。

(2) 球铰接约束　约束节点所有移动自由度,而 3 个转动自由度自由,这时节点可绕 3 个方向发生转动位移。

(3) 销约束　除一个转动自由度外,约束节点所有其他自由度,这时节点可绕一个方向转动。

(4) 滑动约束　除一个移动自由度外,约束节点所有其他自由度,这时节点可沿一个方向移动。

(5) 滚动约束　除一个移动自由度和一个转动自由度外,约束节点所有其他自由度,这时节点可沿一个方向滚动。

上述约束的常用表示符号如图 18－10 所示,这些符号在前面的图中已经出现过。

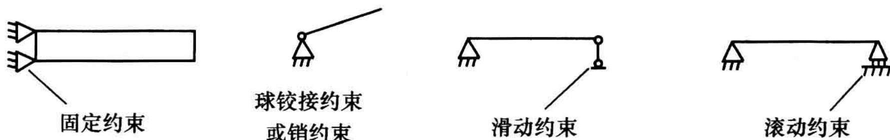


图 18－10　刚性约束类型及其表示符号

2. 弹性约束

在结构与外界的接触边界上,由于支撑材料的弹性,接触节点的位移并非绝对为零,而是随接触压力的大小而变化。为了准确模拟这种变形状态,就应用弹性约束来建立边界条件。

弹性约束可通过边界弹簧单元来实现，如图 18－9(c)所示。由于两个结构的接触刚度与材料、接触面积、接触面几何形状和微观不平度、加工方法以及接触面润滑性质等多种因素有关，所以确定能够准确模拟实际接触状态的等效弹性系数非常困难。为了考虑支撑结构的刚度影响，也可以取出支撑结构的一部分一起作有限元分析。

3. 强迫约束

规定节点位移分量的值为一非零已知值的约束条件称为强迫约束。例如图 18－11 所示的 i 点，若规定其水平位移分量为 q_r，则 $u_i = q_r$ 就是一种强迫约束，前面讲的刚性约束实际上是位移值为零的一种特殊强迫约束。

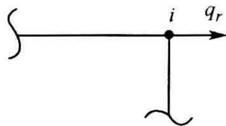


图 18－11　强迫约束

强迫约束相当于外界在节点上作用了一定外力，该外力大小通过节点的位移来间接体现，所以强迫约束在结构内部也将产生应力和应变。

计算装配应力时通常要用到强迫约束。例如在图 18－12(a)中，轮毂与轴紧配合连接，两者公称直径相差 2Δ，轮毂预热套于轴上，冷却后两者达到紧配合。考虑到轴的径向压缩刚度很大，可以认为紧配合是基于轮毂的弹性变形，即轮毂配合后孔径增加了 2Δ，因此在轮毂孔壁节点的径向给定强制位移 Δ，便可求出由于紧配合产生的压应力。又如图 18－12(b)所示的螺纹连接，由于螺栓发生轴向弹性变形而在螺母与螺栓的螺纹牙之间产生压应力，计算这种压应力时也可以在螺栓的端部节点上规定装配需要的强制位移 δ。

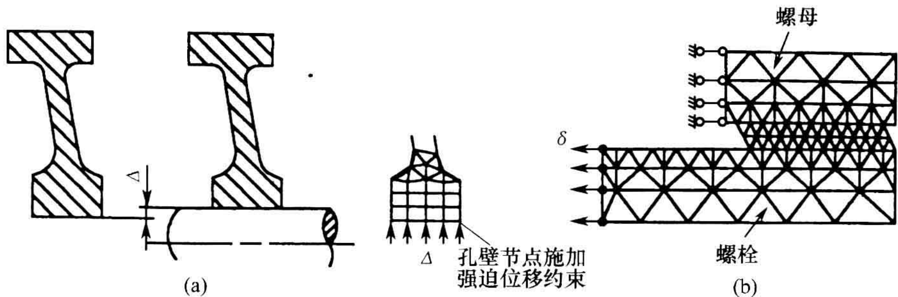


图 18－12　强迫约束的应用

18.1.5　相关位移约束

相关位移约束是对节点相对位移关系的限制，它规定了节点位移之间的相对大小，而并未给出位移的绝对值。在有限元模型中，相关约束主要有以下两种形式。

1. 多点约束等式(multi－point constraint equation)

这类约束要求某些节点的位移分量之间满足给定的等式条件，等式的形式一般为线性代数方程。例如

$$u_1 - 2u_2 + u_3 = 0$$

$$v_4 - 2v_5 + v_6 = 0$$

就是一种多点约束等式，它要求节点 1、2、3 的水平位移分量满足第 1 个等式，节点 4、5、6 的垂直位移分量满足第 2 个等式。

建立有限元模型时，多点约束等式常用于不同类型单元之间的连接，以保持单元之间的位移协调，这种应用在第 16 章已作过介绍。此外，在进行有限元形状优化时，多点约束等式也可用于保持结构的一些形状特征。

2. 耦合约束(coupled constraint)

耦合约束是将一组节点与一个所谓独立节点在规定的自由度方向上耦合在一起，当独立节点沿该方向发生一定位移时，其余被耦合的节点也将沿同一方向发生同样大小的位移，即被约束的节点在耦合的自由度方向将具有相同的位移大小。耦合约束实际上是一组各变量系数绝对值均为 1 的多点约束等式，例如，若将节点 2、3 与节点 1 在 x、y 两个方向上均耦合在一起，则相当于下列一组约束等式，即

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 0 \\ v_2 - v_1 &= 0 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} u_3 - u_1 &= 0 \\ v_3 - v_1 &= 0 \end{aligned}$$

耦合约束可用于下列一些情况。

(1) 连接重合节点　如果两个节点重合且位移状态相同，则可用耦合约束将它们刚性地"捆"在一起。例如图 18－13(a)中，模型 A 的节点 1、2、3、4 与模型 B 的节点 5、6、7、8 的位置重合，则可用耦合约束分别将 5、6、7、8 与节点 1、2、3、4 在所有自由度方向进行耦合，从而将两部分模型连接在一起。

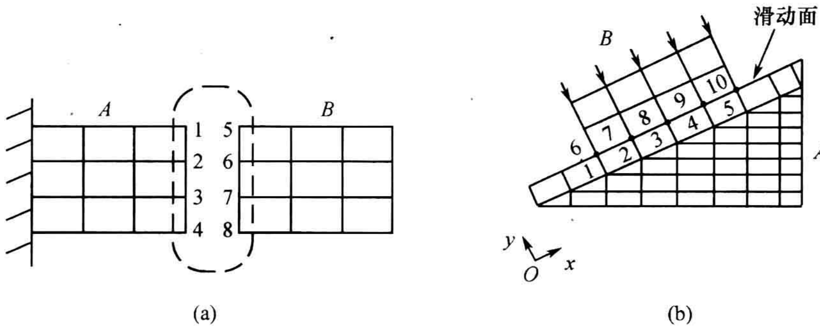


图 18－13　相关位移约束的应用

(2) 模拟滑动边界连接　在图 18－13(b)中，模型 A 与模型 B 在接触面上可以相对滑动，但不能脱离，这时可用耦合约束将模型 A 的节点 1、2、3、4、5 与模型 B 的节点 6、7、8、9、10 在 y 方向耦合在一起。

(3) 施加周期对称边界条件 图 18－8(c)是从一周期对称结构取出的若干分之一。在第 14 章已经作过介绍，当这类结构旋转一个周期后，其对称边界 $a-a$ 将与对称边界 $b-b$完全重合，因此两个边界上对应点的位移状态应完全相同。为此，将两个边界进行相同的节点分割，并在对称中心建立柱坐标系作为节点位移坐标系，再将边界 $a-a$ 上的节点 1、2、3、4、5 分别与边界 $b-b$ 上的节点 6、7、8、9、10 在切向和径向两个自由度方向耦合在一起，这样便能保证对称边界上对应点的位移状态相同。

在有限元计算过程中，相关位移约束可以采用以下方法进行处理。

设结构节点位移间存在 m 个相关约束，这些约束可以写成线性方程组

$$[F]\{q\} = \{C\} \tag{18-1}$$

的形式。多数情况下相关约束为齐次式，即

$$[F]\{q\}=0 \tag{18-2}$$

式中：$[F]$为 m 个约束方程的系数组成的 $m\times n$ 阶矩阵，n 为结构总自由度数；$\{q\}$ 为结构的全部节点位移列阵。

由于受 m 个约束条件的限制，$\{q\}$ 中应有 m 个节点位移分量是不独立的，若将不独立的节点位移记为 $\{q_D\}$，其余独立的节点位移列阵记为 $\{q_I\}$，则式(18-2)可以写成

$$[F_D \quad F_I]\begin{Bmatrix}q_D\\q_I\end{Bmatrix}=0$$

或

$$[F_D]\{q_D\}+[F_I]\{q_I\}=0$$

式中：$[F_D]$应为 m 阶方阵。由上式解出

$$\{q_D\}=-[F_D]^{-1}[F_I]\{q_I\}$$

则全部节点位移列阵$\{q\}$与独立的位移列阵$\{q_I\}$的关系为

$$\{q\}=\begin{Bmatrix}q_I\\q_D\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\-F_D^{-1}F_I\end{bmatrix}\{q_I\}=[T]\{q_I\} \tag{18-3}$$

式中：$[T]=\begin{bmatrix}I\\-F_D^{-1}F_I\end{bmatrix}$称为变换矩阵；$[I]$为$(n-m)$阶单位阵。

将式(17-3)代入$[K]\{q\}=\{R\}$中并左乘$[T]^{\mathrm{T}}$，有

$$[T]^{\mathrm{T}}[K][T]\{q_I\}=[T]^{\mathrm{T}}\{R\}$$

因而得到降阶的节点位移方程组

$$[K_I]\{q_I\}=\{R_I\} \tag{18-4}$$

式中：$[K_I]=[T]^{\mathrm{T}}[K][T]$，为对应于独立节点位移的$(n-m)$阶结构刚度矩阵；$\{R_I\}=[T]^{\mathrm{T}}\{R\}$，为对应于独立节点位移的$(n-m)$阶节点载荷列阵。

上述变换虽然使总的方程降阶了，但降阶后往往要改变节点的编号，而且由于节点位移间出现了约束，变换后系数矩阵的带宽也改变了。当互相有位移约束的节点编号相差很大时，会使半带宽有显著的增加。为此，把这些有关的节点编号连在一起是有利的，都排在最后更好。

在一般线性约束条件式(18-1)下，求解线性方程组$[K]\{q\}=\{R\}$时可采用拉格朗日乘子法(Lagrange multipler)。如引入 m 个拉格朗日乘子，以列阵$\{\lambda\}$表示，则满足一般线性方程式(18-1)的条件下，节点位移方程的解$\{q\}$以及相应的拉格朗日乘子$\{\lambda\}$应由下式决定：

$$\begin{bmatrix}K & F^{\mathrm{T}}\\F & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q\\\lambda\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}R\\C\end{Bmatrix} \tag{18-5}$$

上式为 $n+m$ 阶代数方程，可以求解 n 个节点位移$\{q\}$及 m 个拉格朗日乘子$\{\lambda\}$。

对于一般的结构，相关约束数 m 比总自由度数 n 要小得多。如原结构的刚度矩阵$[K]$为带状的，则式(18-5)的系数矩阵将在$[K]$上加上一对窄边，且不改变$[K]$的带状性质和编号。对这种加边的带状稀疏矩阵，可采用适当的方法求解。

18.2 热边界条件

热边界条件用于描述结构边界表面与外部的相互热作用规律。在传热学中，它包括温度边界条件、热流边界条件和换热边界条件三类。

本节介绍稳定热传导分析中模型热边界条件的常见形式及其定义方法，这些条件是不随时间变化的常数。在非稳定热分析时，模型边界条件都需要用时间函数来描述。

18.2.1 节点温度

节点温度用于规定节点的绝对温度值。当已知结构表面的温度大小时，可用这种条件定义。例如图 18－14(a)所示的输油管，若已知与热流体接触的内壁温度为 100℃，外壁温度为 40℃，则用轴对称实体单元将输油管离散为图 18－14(b)所示的模型后，可定义内壁节点的温度值为 100℃，外壁节点的温度值为 40℃。

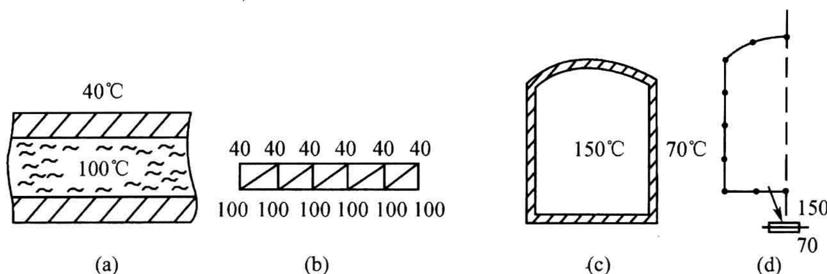


图 18－14 节点温度条件的定义

对于实体单元和轴对称实体单元，节点温度是一个单值。但对于壳单元和轴对称壳单元，为了反映温度沿单元厚度方向的变化，定义节点温度时应给出顶面和底面两个温度值，或给出中面温度和沿中线法线的温度梯度。如对于图 18－14(c)所示的容器，若与高温气体接触的内壁温度恒定为 150℃，外壁温度为 70℃，则用轴对称壳单元离散容器后(图 18－14(d))，壳单元顶面和底面的温度值就不一样，顶面温度值应设置为 150℃，底面温度应为 70℃。

同样，在定义梁单元的节点温度时，为了反映单元截面上的温度变化，除给出位于质心轴上的节点温度外，有些软件还允许给出梁截面两个方向的温度梯度，正是这两个梯度值才可能引起杆件发生两个方向的热弯曲。

18.2.2 单元热流

当结构表面具有热流边界条件时，可用单元热流来定义。它表示在单位时间通过单位面积的单元面或单元棱边上的热量，即热流密度，简称热流。热量流动的方向一般可用定义值的正负来表示，正值表示热量从外界流入单元内部，负值表示热量从单元内部流向外界。

单元类型不同，热流的定义方法和热流面也有所不同。对于实体单元，只能定义单元面上的热流，而不能定义棱边热流。因为棱边是一条无厚度的线，热量不能通过这条线传

递;对于轴对称实体单元,只能定义棱边热流,它表示沿轴对称结构的周向单位角度所对应表面上的热流大小。这种单元不能定义单元面上的热流,否则破坏了热分布的轴对称性;壳单元可以定义棱边和单元面上的热流,棱边热流表示热量流过薄壳结构的侧面。单元面热流同样要定义两个值,分别表示顶面和底面的热流;梁单元上只能定义棱边热流,它表示杆件结构所有外表面上的热流大小。各种单元的热流定义如图 18-15 所示。

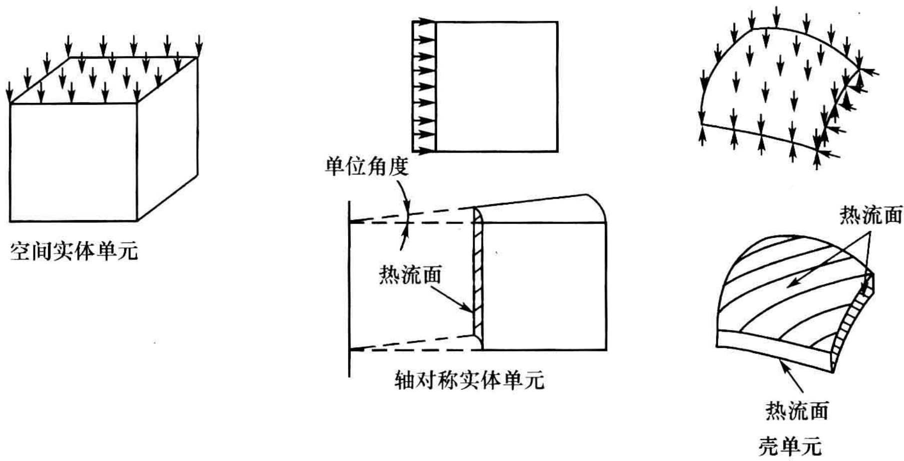


图 18-15　单元热流条件

18.2.3　单元对流换热

温度不同的各部分流体之间发生宏观相对运动而引起的热量传递称为对流。对流传热只发生在流体内部,且对流的同时也伴随着热传递,但这部分导热相对较小,一般忽略不计。而在工程应用中,特别是在对结构进行热分析时,常见的是流动流体与固体壁面之间的热量交换,这种热量传递过程称为对流换热,或简称放热。如发动机与高温燃气之间、高温结构与冷却介质之间、暖气管道与传输的高温液体之间都属于对流换热。

对流换热传递的热量可用下面的牛顿公式计算,即热量

$$Q = \alpha_v A(T - T_f) \tag{18-6}$$

或热流密度

$$q_v = \alpha_v (T - T_f) \tag{18-7}$$

式中:A 为换热面积;T 为固体壁面的温度,一般为需要计算的未知量;T_f 为与壁面接触处的稳定流体温度;α_v 为对流换热系数,或简称放热系数,它表示在单位时间内、单位面积上、温差为 1℃时表面的对流换热量。

定义对流换热条件时可以定义单元面上的换热条件,也可以定义单元棱边上的换热条件。定义时首先选择要定义的单元面或棱边,然后输入对流放热系数 α_v 和周围介质温度 T_f 的值即可。

和单元热流的定义相似,实体单元只能定义单元面而不能定义棱边上的换热条件,因为换热过程只能在一个面上发生。轴对称实体单元只能定义棱边换热条件,它表示沿周向单位角度所对应结构表面上的换热。对于壳单元,既可定义棱边又可定义单元面上的换热条件,在定义单元面时同样要给出顶面和底面两种换热条件。梁单元上只能定义棱边换热条件,它表示杆件所有外表面上的换热。单元换热条件的换热面与图 18-15 相

同,其中阴影部分表示换热面。

尽管给出 α_v、T_f 两个值就可以定义换热条件,但在具体应用时却不是件容易的事。原因就是换热系数 α_v 与导热系数和线膨胀系数等这些物体固有参数不一样,它是一个与边界换热过程有关的技术数据,而且是很多因素的复杂函数,很难用数学式表示出来,因此也就难以通过理论计算得到。复杂的换热过程用一个简单的牛顿公式表示,实际上就是将换热过程的复杂性隐藏在系数 α_v 中了。

影响换热系数大小的主要因素有以下几类。

1. 流体流动的动力特征

按流动的动力特征来分,流体的流动可分为受迫流动(亦称强迫对流)和自然流动(亦称自然对流)两大类。流体在外力作用下的流动称为受迫流动,如液压泵、水泵、通风机作用下的流体运动就属于这类运动,流动的强烈程度取决于压差、流道阻力、流体类型和温度等因素。自然流动是由流体冷热各部分的密度不同引起的,其强烈程度取决于流体的受热情况、类型、所处空间大小和壁面位置等。一般情况下,受迫流动的换热系数要远远大于自然流动的换热系数。

2. 换热面的形状

换热面的形状对流体的流动情况影响很大,有利于流体流动(或流动阻力小)的形状能使流体及时带走或带来热量,从而使流体和固体壁面发生充分的热交换,因而换热系数较大;相反,不利于流体流动的形状,其换热系数较小。

3. 流体的流动状态

流体的流动分层流和紊流两种状态,两种状态下流体的传热机理不完全相同。在层流状态下,热量主要通过导热方式进行传递。在紊流状态下,除导热外,主要是通过由于涡流扰动而引起的对流换热,这种换热可以是层流导热的许多倍。工程中常见的流动状态是紊流,紊流程度越高,换热系数越大。

此外,换热系数还与流体的物理特性如密度、黏度及导热系数等有关。由于换热系数是一个与很多因素有关的复杂函数,且工程问题本身又相当复杂,所以要通过理论计算求得换热系数值是非常困难的。在定义有限元模型的对流边界条件时,可通过试算方法确定 α_v 的大小,即首先通过测试方法测出结构表面某些点的温度值,在已知介质温度 T_f 的条件下,假设单元表面或棱边一个换热系数,然后计算结构的温度场,并将计算结果与测试值比较,若不同则调整某些单元面或棱边的 α_v 值,然后再作计算,直到计算值与测试值相同为止。

18.2.4 单元辐射换热

热辐射是一种通过电磁波进行热量传递的传热方式。这种传热方式的特点是不需要物体之间直接接触,也不需要任何中间介质,且传热过程中伴随着能量形式的转换,即发热时将热能转换成辐射能,吸热时将辐射能转换成热能。自然界中的每一个物体都在不断地向周围空间发射辐射能,同时也在不断地吸收空间其他物体的辐射能。这种辐射和吸收过程的综合结果就形成了以辐射方式进行的物体间的热量传递,即所谓的辐射换热过程。

工程中常常采用类似于对流换热的公式来表示结构的辐射换热量,即

$$q_r = \alpha_r(T - T_s) \tag{18-8}$$

式中:q_r 为辐射换热的热流密度;T 为结构壁面温度;T_s 为周围介质的温度;α_r 为辐射换热系数,与温度大小有关。

在有限元模型上定义辐射换热条件时,也可以定义单元面上和单元棱边上的换热条件。定义时首先选择要定义的单元面或棱边,然后输入辐射换热系数 α_r 和周围介质温度 T_s。各类单元可定义的辐射换热条件类型和辐射换热面与对流相同。

18.2.5 单元和节点热源

单元和节点热源用于定义结构内部存在的热源大小,它并不属于结构导热的三类边界条件,而是加在模型上的外部条件,即式(8-1)最后一项中的 q_i 值。某些结构内部本身存在发热元件(如电阻、铀棒等),如果发热元件相对尺寸较大,则结构离散时发热元件也应划分为单元,其发热效果可用单元热源表示。

定义单元热源只需要输入热流密度值 q_e,它表示单位时间内单元单位体积产生的热量,计算时再根据单元体积大小求得单元产生的总热量。如果发热元件相对结构总体尺寸很小,这时发热效果就可以用节点热源表示。定义节点热源时只需要输入节点的热流密度 q_n,它表示单位时间由节点发出的热量。若输入的热流密度为负值,这时单元和节点不是发热元件,而是吸收热量的"热穴"。单元和节点热源如图 18-16 所示。

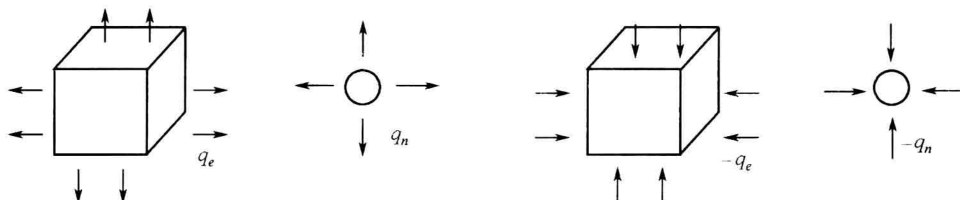


图 18-16 单元和节点热源

18.2.6 绝热条件

若结构边界与外界没有热交换,即外界热量不会传入结构内部,结构内部的热量也不会散发到外界,则称这种边界条件为绝热条件。当结构边界隔热处理很好时,可认为是绝热的。绝热条件在热分析中经常用到,如对称热分析模型的对称面就具有绝热条件。

绝热条件可定义在单元面或单元棱边上,定义方法可按单元对流换热条件定义,这时取换热系数值为零。也可按单元热流条件定义,这时应取热流密度值为零。有些软件也规定如果在模型表面没有定义其他边界条件,则自动取为绝热条件。

18.3 载荷条件

进行应力分析时,分析结构与其他结构或外界的相互作用除可用位移约束条件表示外,主要还是用载荷条件来考虑。有限元模型上的载荷形式有集中载荷、分布载荷、体积力和温度载荷。在有限元计算过程中,所有形式的载荷都将移置为等效的节点力。

18.3.1 集中载荷

当载荷作用面相对结构尺寸非常小时,可认为这种载荷是作用于某一点的集中载荷。建立边界条件时,绝大多数软件都只允许集中载荷施加在节点上,所以集中载荷也常称为节点载荷。它包括节点力和节点力矩两种形式,其中节点力矩只能加在具有转动自由度的节点,如壳单元和梁单元的节点。而对于实体单元、平面单元和杆单元的节点,由于它们只有移动自由度,因此只能施加节点力。

节点载荷通常以节点位移坐标系为参考系,即载荷的方向和分量均是指沿位移坐标系坐标轴方向和向这些坐标轴的投影。和施加位移约束条件一样,为便于施加载荷,有时也需要在不同位置建立不同类型的位移坐标系。例如要在图 18 - 17 中八个孔壁节点上施加大小相等的径向节点力,就可以在孔心位置建立一个柱坐标系,建立节点力时径向分量输入载荷实际大小,而切向分量和轴向分量输入零值。这样就不需要计算每个节点力沿直角坐标系的投影分量了。

由于集中载荷加在节点上,为避免人为进行载荷移置,分网时应尽量将载荷作用点分为节点。采用半自动分网时,这一要求易于满足。若采用自动分网,而载荷作用点又不是几何模型的曲线端点,则作用点就不能保证为节点。例如在图 18 - 18 所示的悬臂梁中,若梁的顶面距自由端 70mm 处的 A 点作用一集中载荷 Q,则采用自动网格划分时就难保证节点落在 A 点。这时可将几何模型的直线 BC 在 A 点剪断,这样就能保证 A 点为节点。否则就需要将集中载荷 Q 人为移置为 A 点附近的两个节点力。

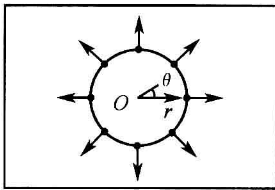


图 18 - 17　节点力的方向

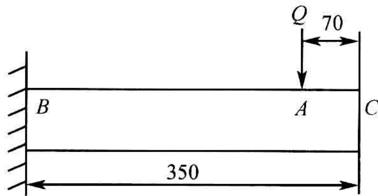


图 18 - 18　悬臂梁

目前许多软件允许在杆、梁单元中间跨度上的任一点施加集中载荷,即集中载荷的作用点可以不是节点,这种功能为保证杆梁单元质量和施加载荷带来了方便。例如图 18 - 19 所示的简支梁,其上 A、B、C 三点分别作用有 3 个集中力,若将作用点 A、B、C 三点划分为节点,则梁单元 2、3 的长度与其截面尺寸之比小于 1,造成这些单元质量较差。若允许在梁的中间跨度上施加集中载荷,就可以将整个简支梁划分为 1 个梁单元,从而保证单元有较好的质量。

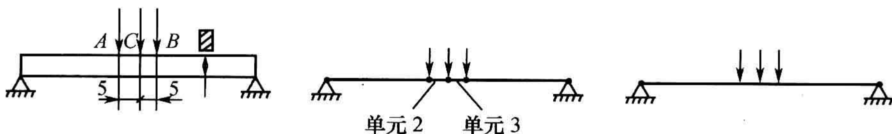


图 18 - 19　简支梁及其划分

18.3.2 分布载荷

分布于结构表面上的载荷称为分布载荷，如气体压力、液体压力、接触压力等。有限元模型中，分布载荷表现为单元面力和棱边载荷两种形式。

单元面力分布于整个单元面上，并垂直于单元面。面力大小通过单位面积上的力进行定义，力的方向可通过输入值的正负来确定。对于板、壳单元，正的分布力与单元面的外法线方向相同，负的分布力与外法线方向相反。面力形式如图 18－20 所示。

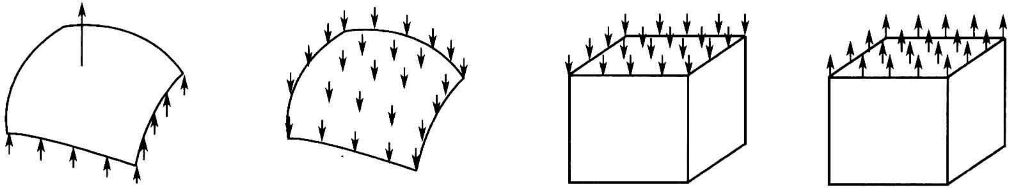


图 18－20　单元面力及其方向

棱边载荷分布于单元的整个棱边上，形式包括棱边分布力和棱边分布力矩，载荷大小通过单位长度上的力或力矩定义。尽管棱边载荷施加在模型的一条边上，但实际结构中它作用于相对狭长的表面内，如薄壁结构沿厚度方向的侧面，杆件结构的外表面，轴对称结构单位角度所对应的面。由于实体单元的棱边是一条无实际厚度的线，所以这类单元不能施加棱边载荷。

图 18－21 是作用于板壳单元上的棱边载荷形式。图(a)所示的棱边分布力与单元面位于同一面内，常称为面内分布力或膜载荷。图(b)中的分布力与单元棱边平行，称为棱边剪切力。图(c)中的分布力垂直于单元面，称为面外分布力或弯曲载荷。图(d)所示的载荷为棱边分布弯矩。以上棱边载荷的方向仍可通过输入值的正负来指定。对于轴对称单元和平面单元，则只能定义面内分布力和棱边剪切力。

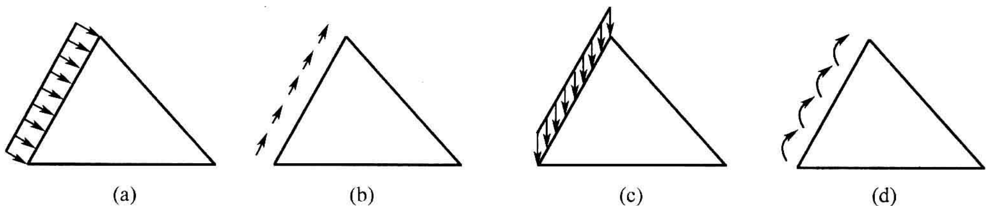


图 18－21　板壳单元的棱边载荷

杆、梁单元上只能定义棱边载荷。梁单元的棱边载荷形式如图 18－22 所示。图(a)中的分布力平行于单元棱边，称为轴向分布力。图(c)和(d)中的分布力垂直于单元棱边并沿单元截面的 y 向和 z 向，分别称为 y 向剪切力和 z 向剪切力。图(b)、(e)和(f)中的载荷为绕 x 轴、y 轴和 z 轴的分布力矩，分别称为轴向扭矩、y 向弯矩和 z 向弯矩。对于杆单元，除不能施加轴向扭矩外，其棱边载荷形式与梁单元相同。

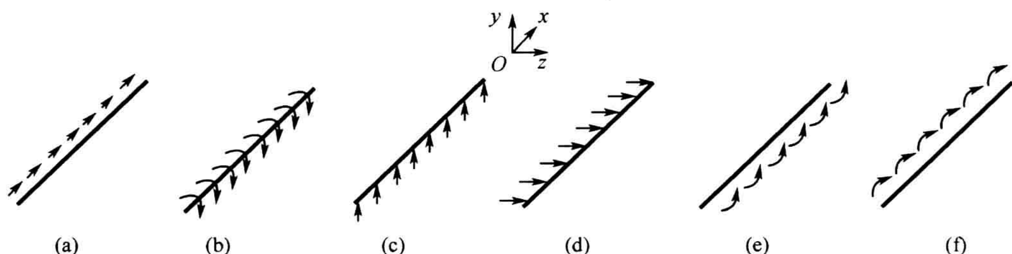


图 18－22　梁单元上的棱边分布载荷

18.3.3　体积力

作用于单元整个体积内的力称为体积力，其常见形式为重力和惯性力。体积力的大小可根据达朗伯原理计算。

对于作直线加速运动的结构，单元体积力的大小为

$$F = -ma \tag{18-9}$$

式中：m 为单元质量；a 为结构直线运动的加速度。

发动机中做往复运动的活塞、升降电梯和刨床的刨头等均属于这种情况。当结构做匀速旋转运动时，单元体积力的大小为

$$F = -ma = -m\omega^2 R \tag{18-10}$$

式中：ω 为结构匀速运动的角速度；R 为单元质心距旋转轴线的距离。

正常工作条件下的摩擦轮、齿轮、曲轴等都属于这种情况。当结构做非匀速旋转运动或做平面运动时，单元体内将受到惯性力和惯性力矩的作用。惯性力的大小为

$$F = -ma_c \tag{18-11}$$

式中：a_c 为单元质心的加速度。

惯性力矩的大小为

$$M = -\varepsilon J_z \tag{18-12}$$

式中：ε 为结构非匀速旋转运动的角加速度；J_z 为单元相对于质心轴的转动惯量。

旋转结构在起动和停止阶段便属于这种情况。由于单元体积可以通过单元节点坐标和物理特性值计算得到，单元材料特性表中又定义了结构材料的密度，所以网格划分以后单元质量是确定的。因此在定义单元体积力时，只需要输入结构运动的加速度、角速度或角加速度即可，重力可视为加速度为 g 的惯性力。对于轴对称结构的模型，加速度、角速度以及角加速度的方向应与对称轴线的方向一致。

18.3.4　温度载荷

结构因温度变化将发生热变形，如果结构各部分变形均匀且不受外界约束，则这种变形是自由的，结构内部不会产生应力。但是若结构各部位温度分布不均或变形受到外界约束，热变形就不能自由进行，因而在结构内部产生应力。这种因温度变化而引起的结构应力称为“热应力”或“温度应力”，相应地将产生热应力的温度变化可以视为一种载荷，这种载荷便称为温度载荷。

第 8 章已经作过介绍，通过温度变化引起的结构热应变可以导出温度载荷的等效节点载荷。对于平面应力单元，其等效温度节点载荷为

$$\{F\}_t^e = \iint [B]^{\mathrm{T}} [D] \alpha \Delta T \{1 \quad 0 \quad 0\}^{\mathrm{T}} t \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

与一般节点载荷相比，单元的温度节点载荷与结构的线膨胀系数 α 和温度变化有关。α 是结构的材料特性，在单元的材料特性表中定义。因此，对结构进行热分析，计算出结构的温度分布，就可以通过类似上式的表达式得到各类单元的等效温度节点载荷，进而计算结构的热变形和热应力。即温度载荷是通过对结构的热分析计算得到的，而不像其他载荷直接在模型上定义。

第3篇　有限元法应用——ANSYS软件介绍

第19章　有限元分析系统概述

19.1　有限元分析系统的发展

鉴于有限元分析过程涉及复杂的矩阵操作、海量信息和数据存储，难以采用手工计算。大量复杂结构和物理现象的有限元分析都必须借助于有限元分析系统(或称有限元分析软件)。20世纪60年代末、70年代初，随着计算机硬件的发展和计算机图形学用于有限元程序开发，逐渐出现了用途广泛的有限元分析通用程序。

20世纪60年代，美国加州大学Ed Wilson开发了第一个大型通用有限元分析程序SAP(Structural Analysis Program)；1963年，R. MacNeal博士和R. Schwendler博士创建MSC公司，研发和推广有限元分析软件MSC/NASTRAN，成为航空航天领域的标准化结构分析软件；1970年，J. Swanson博士创办了Swanson公司(后改名为ANSYS)，研发了有限元分析软件ANSYS，它集结构、热、流体、电磁和声学问题分析于一体，成为目前国际上最流行的主流软件之一；1975年，J. Bathe在MIT创办了ADINA公司，开发了大型通用非线性分析软件ADINA；1967年，美国布朗大学P. Marcal创建了Marc公司，开发了结构非线性分析软件Marc；1969年，德国斯图加特大学Argyris开发了有限元分析软件ASKA，用于航空航天飞行器的分析；1978年，著名学者Hibbit，Karlsson和Sorensen成立HKS公司，推出了有限元分析软件ABAQUS；1976年，Lawrence Livermore实验室学者J. Hallguist发布了有限元程序DYNA，数年后，法国ESI公司将DYNA商品化，命名为PAM - CRASH；1989年，J. Hallguist又开发了大变形、非线性有限元分析软件LS - DYNA。至今，已出现了300多种有限元分析软件，其中应用较普遍的有ANSYS、MSC/NASTRAN、MSC/MARC、ADINA、ABAQUS、I - DEAS等，还有一些专门的分析软件，如LS - DYNA、DEFORM、PAM - STAMP、AUTOFORM、SUPER - FORCE等。

有限元分析系统已经历了半个世纪的发展，特别是20世纪80年代中期以来，计算机硬件技术、软件技术、图形技术、CAD技术、自动分网技术等相关技术的快速发展，大大推动了有限元分析系统的发展和应用。有限元分析系统在前后处理能力、计算性能、求解范围、操作性能、图像显示等方面都有了显著改进和增强，并在机械、电子、航空航天、土木建筑、桥梁、冶金等行业得到了广泛应用。

19.2 有限元分析系统的组成及其主要功能

有限元分析过程包括前处理、求解和后处理3个阶段。因此，一个完整的有限元分析(FEA, Finite Element Analysis)系统包括3个功能模块和两个支撑环境，即前处理(Pre Processor)、计算(Solver)和后处理(Post Processor)模块，图形及数据可视化系统(Visualization of Graphics & Scientific Data)和数据库(Database)两个支撑环境，如图19-1所示。

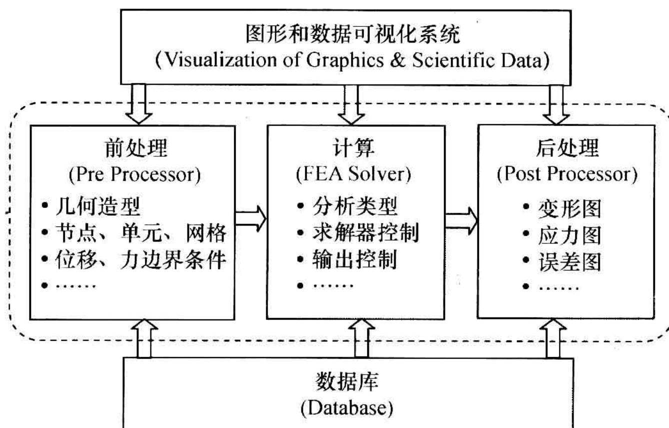


图19-1 有限元分析系统的组成

19.2.1 前处理模块

前处理模块的任务是建立有限元模型，为有限元计算提供所有的原始数据。该模块主要包括以下功能：

1. 几何建模和模型处理

几何建模功能包括几何元素的创建、删除、编辑、变换、复制、镜像和检查等。通过各种操作建立分析对象的几何模型，并对模型进行必要的处理和校验。同时包括独立的几何模型直接访问技术(Direct Geometry Access, DGA)，用于访问各种CAD软件的数据库，实现几何模型的读取、转换、修改和验证等功能。

2. 单元库

单元库提供了各种单元类型供用户选择。有些软件还提供了单元开发接口，用户可通过程序自定义单元特性存储到单元库中。分网时，用户直接从单元库中选择相应的单元即可。

3. 单元特性定义

单元特性包括截面形状、材料特性、物理特性等信息。通过单元特性定义和编辑为单元的行为特性赋值，以形成各种求解矩阵。

4. 网格划分和处理

网格划分涉及单元类型、形状及其特性的选择、网格生成器的选择、网格密度的确定等内容。它是有限元分析中至关重要的一步，分网能力的强弱直接影响有限元建模的效

率,网格效果直接影响分析结果的正确性和准确性。因此,如何有效地根据模型特点合理的选择单元类型和离散方法具有重要意义。

网格处理包括网格质量的自动检查和调整、带宽优化、波前处理等功能。网格处理效果对有限元模型的质量和求解算法的有效性具有重要影响。因此,分网方法、效率、网格质量和细化能力、有限元模型编辑和检查功能是衡量 FEA 系统功能的重要标志。

5. 边界条件定义

边界条件包括位移边界条件、载荷边界条件、温度边界条件等。边界条件定义提供各类边界条件的定义、编辑、删除和管理功能。目前,很多 FEA 系统不仅可以在有限元模型(节点、单元等)上定义边界条件,还可以在几何模型上直接定义边界条件,分网后自动等效为有限元模型边界条件。几何模型定义边界条件的优点在于定义对象易于选择,不依赖于网格存在,即网格删除后边界条件仍然存在,重新分网后可直接进行求解计算。

6. 其他辅助功能

辅助功能主要为有限元建模和离散过程提供支撑条件,如坐标系定义、单元和节点信息查询、模型显示控制、模型存取、实体模型的虚拟操作等。

19.2.2 计算模块

计算模块由一系列计算程序组成,用于接收有限元模型信息,求解有限元方程组,保存和输出所需的结果数据。计算程序又称为求解器(solver),每个求解器完成特定类型的计算。因此,求解器数目越多,系统功能越丰富。有限元模型提交计算前,计算模块还为用户提供了求解参数设置功能,用于算法选择、参数定义、精度控制、结果类型选择等。

常见 FEA 系统的计算类型如图 19 - 2 所示。

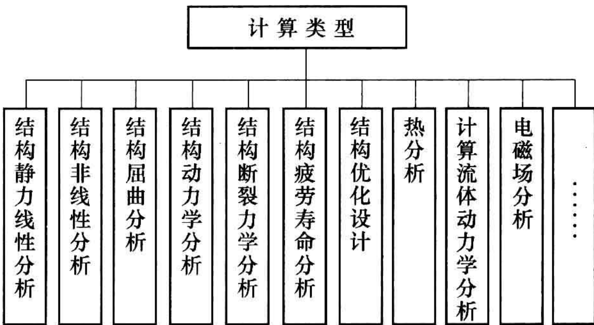


图 19 - 2　常见有限元系统的计算类型

19.2.3 后处理模块

后处理模块的任务是对计算结果进行读取、处理和显示,为分析人员提供评估依据。随着计算机图形技术和计算机硬件的飞速发展,FEA 系统的后处理能力得到了很大提高,可提供各种直观、形象的显示方式和便捷的操作、查询工具。常见结果显示方式有等值线图、等值云图、剖视图、矢量图、动画显示、数据列表等。

19.2.4 图形及数据可视化支撑系统

图形及数据可视化系统运用计算机图形学和图像处理技术,将数据转化为图形或图

像在屏幕上直观地显示出来。FEA 系统的图形和数据可视化系统主要完成三维物理模型的创建和图形数据的几何运算、图线的消隐修正、有限元模型的图形显示、计算结果的输出和色彩控制等功能,以图形、图像和动画等视觉表现形式展示计算数据的本质。

19.2.5 数据库支撑系统

FEA 系统运行时会产生大量数据(如模型数据、材料数据、结果数据等),故需要采用数据库对数据进行管理和存取。数据库支撑系统支持复杂数据类型和数据结构,具有丰富的语意关联、数据模式动态定义与修改、版本管理等能力,并具有完善的用户接口。

图 19-3 给出了 FEA 系统的主要功能结构。

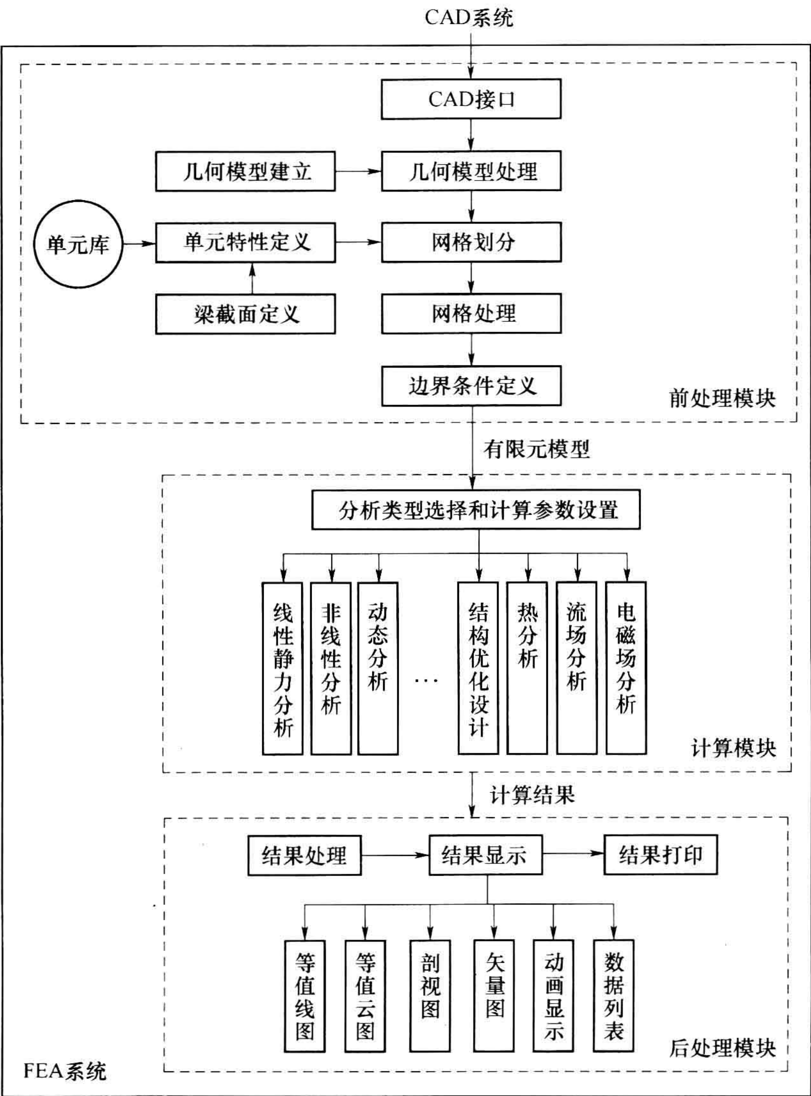


图 19-3　FEA 系统的功能结构

第20章　ANSYS概述

ANSYS是世界著名的大型通用有限元分析软件，广泛用于航空航天、船舶、机械、电子、压力容器、生物医学、核能等领域，在国内外拥有众多用户。其以多物理场（结构、流体、热和电磁）分析及其耦合分析功能而著称，并提供了各物理场间相互耦合的功能。

20.1　ANSYS技术特点

1．可实现多场及多场耦合分析

自然界存在多种物理场，如位移（应力应变）场、电磁场、温度场和流场。不同物理场间是相互联系、相互影响的。ANSYS不仅具有结构、电磁、热和流体的单场分析能力，而且通过多场耦合处理工具，在统一的模拟环境和数据库中，可实现复杂的多物理场耦合特性分析。

2．可实现前后处理和分析求解的一体化及多场分析统一数据库

分析过程中，ANSYS将所有数据保存在同一数据库中，用不同扩展名区别不同文件。例如，rst表示结果文件，err表示错误及警告信息文件等。这种统一的数据库技术不但方便了用户操作，可实现前后处理的任意时刻访问所有数据，同时又为多物理场耦合分析的数据交互奠定了基础，便于多物理场数据管理和存取。

3．基于变分原理的多物理场优化功能

ANSYS引入变分技术，运用“响应面”概念，将有限元分析结果表示为所有输入变量的显式近似函数，简化了优化计算的多次迭代。通过一次性计算即可得到优化设计结果，并可进行多目标优化和离散优化。

4．具有中文界面

ANSYS提供了中、英文两种界面，中文界面使中国用户更容易学习和掌握。

5．显式和隐式算法并存，具有更强大的非线性分析功能

互补的显式和隐式算法扩大了ANSYS的非线性求解范畴，从一般的非线性静力问题到撞击和爆炸力学等问题均可通过ANSYS求解。同时显式和隐式算法交替计算，可更好地解决动力冲击与静力并存的问题。

6．多种求解器并存，适用于不同的物理问题和不同的硬件配置

ANSYS提供了稀疏矩阵求解器、波前求解器、JCG求解器、ICCG求解器、PCG求解器、AMG求解器和DDS求解器等多种求解器。不同的求解器适用于求解不同的问题，如PCG求解器适用于求解大规模线性问题、非正定问题和大型非线性问题；不同的求解器也适用于不同的硬件配置，如稀疏矩阵求解器支持并行计算，适用于内存容量不大的计算机，支持超内存求解。

7．支持异种、异构平台的网络浮动，且用户界面统一、数据文件兼容

这一特性为计算环境的建立和模型与数据共享提供了极大方便，用户可以合理优化投入资源，充分利用现有条件；统一的界面和数据兼容性为用户带来较大的工作灵活性。

8. 强大的并行计算功能，支持分布式并行和共享内存式并行

ANSYS 的并行计算能力通过分布式并行求解器和代数多重网格求解器实现。分布式并行求解器自动将大型问题拆分为多个子域，分发给分布式并行机群的不同 CPU（节点）进行求解，同时也支持不限 CPU 数量的共享式并行机或机群。其求解效率与 CPU 个数呈线性比例增长，可节省大量计算时间。代数多重网格求解器可支持 8 个 CPU 共享式并行机，CPU 数量增加一倍，求解速度提高 80%，且对病态矩阵的处理性能较好。

9. 多种网格划分技术并存，提高分网效率和网格质量

ANSYS 提供了四种网格划分技术：自由分网、映射分网、扫掠分网和自适应分网。同时，还可实现自由网格到映射网格的自动过渡，也可根据结构变形自动调整流体网格效果等。

10. 良好的二次开发环境

ANSYS 提供了宏（Macro）、参数设计语言（APDL）、用户可编程特性三个层次的用户开发功能，不但可以方便地开发出系列产品的自动分析程序，还可通过编程加入用户自定义的单元、材料模式、失效准则等子程序，满足用户化定制要求。同时，通过 APDL 命令可实现参数化的分析流程管理。一个分析项目的 APDL 命令流编制完毕后，只需改变参数就可实现新模型或新工况的有限元分析。

11. 丰富的 CAD/CAE 接口

ANSYS 具有与大多数 CAD/CAE 软件的接口，如 UG、Solid Works、Pro/E、CATIA、I - DEAS、AutoCAD、LS - DYNA、NASTRAN、Alogor 等，易于实现数据共享和交换。

20.2 ANSYS 用户界面

ANSYS 基于 Motif 标准创建图形用户界面，用户可通过对话框、下拉菜单和子菜单等方式进行数据输入和功能选择。其主界面如图 20 - 1 所示，包括以下 8 个子窗口。

1. 实用菜单（Utility Menu）

实用菜单包括文件管理（File）、对象选择（Select）、信息列表（List）、图形显示（Plot）、显示控制（PlotCtrls）、工作平面设定（WorkPlane）、参数设置（Parameters）、宏命令（Macro）、菜单控制（MenuCtrls）和软件帮助（Help）等应用功能。该菜单为下拉式结构，单击相应按钮完成相应操作。

2. 标准工具条（Standard Toolbar）

标准工具条主要完成使用较为频繁的功能，如文件新建、保存、打开、打印等。

3. 命令输入窗口（Command Input Window）

用户可在此窗口输入命令来实现相关操作，也可浏览先前输入的命令。所有输入的命令将在此窗口显示。熟悉 ANSYS 命令的用户可通过输入命令方式更方便、快捷地实现操作。

4. 自定义工具条（ANSYS Toolbar）

自定义工具条主要包括一些快捷方式，常用的有存盘（SAVE - DB）、恢复（RESUME -

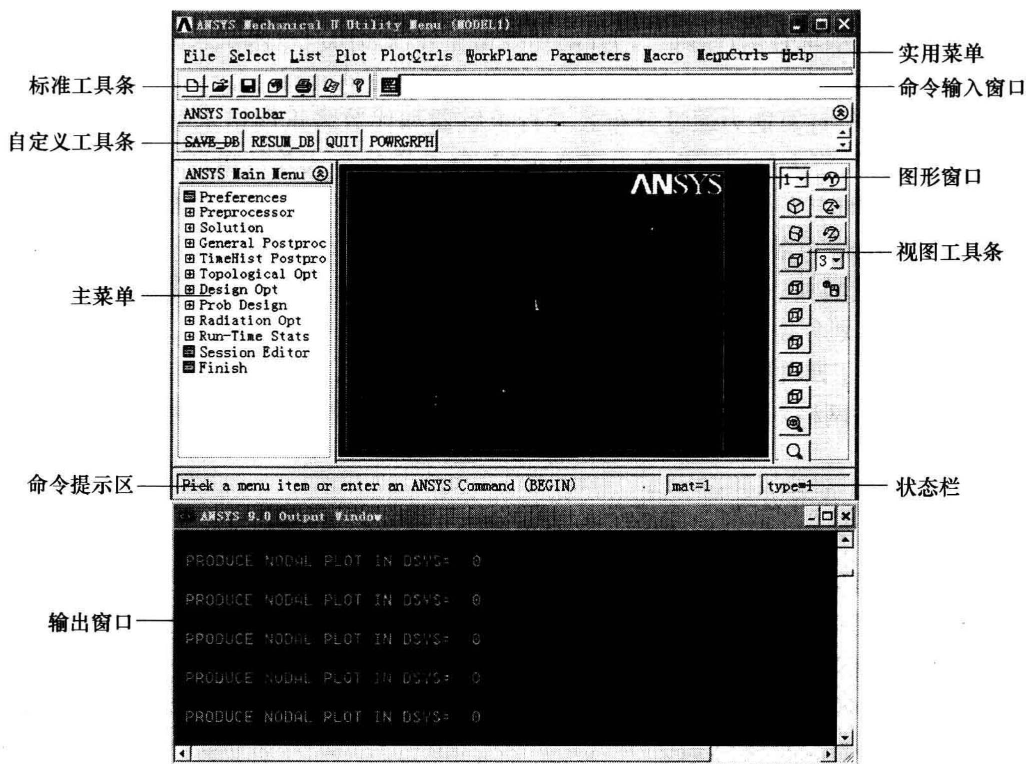


图 20-1 ANSYS 主界面

DB)、退出系统(QUIT)等。用户也可根据需要自行编辑一些快捷方式。

5. 主菜单(Main Menu)

主菜单包括 ANSYS 分析过程的主要命令,如前处理器(PREP7)、求解(SOLUTION)、后处理器(POST1 或 POST26)等。该菜单为树状结构,基于分析流程排布操作命令的顺序。

6. 图形窗口(Graphic Window)

显示 ANSYS 创建或输入的几何模型、有限元模型和分析结果等信息。

7. 命令提示区和状态栏(Prompt Area and Status)

命令提示区提示用户在当前命令下应输入的信息,便于用户进行正确的操作和参数输入。状态栏用于显示当前 ANSYS 分析所处的状态,如单元类型、材料属性、实常数以及当前坐标系等。

8. 输出窗口(Output Window)

输出窗口显示用户执行的命令和功能及相关信息、模型信息等,如错误、警告、模型质量和体积等。一般情况下输出窗口隐藏在图形窗口后面。

9. 视图工具

完成模型的缩放、旋转、视觉变换等操作。

20.3 ANSYS 文件格式

ANSYS 的最大特点是使用统一数据库。在统一数据库中,不同信息的文件以扩展名区分。分析完成后,数据库中所有文件以 jobname 为主文件名,并根据文件性质自行设定扩展名以保存所有资料。

20.3.1 文件格式

分析过程中,ANSYS 会生成多种不同类型的文件,便于后续的敏度分析、优化设计和寿命预测。现将几个重要的文件介绍如下:

1. Log file (Jobname. log)

该文件为 ASCⅡ格式,记录用户从启动 ANSYS 至离开时执行的全部命令。用户可以利用文本编辑软件编辑该文件,删除不必要的命令和信息,修改错误命令,保留该文件以便日后参考或重新分析。通常,计算数据库文件(Jobname. db)太大,不利于保存。同时,再进入 ANSYS 时会继续向数据库文件追加信息,增大文件容量。因此,进入 ANSYS 之前最好先删除数据库文件,而仅保存 Log 文件或修正后的其他扩展名文件,以节约存储空间。

2. Error file (Jobname. err)

该文件为 ASCII 格式,记录有限元分析过程中产生的提示信息,包含有限元建模、求解和结果处理等过程中的错误和警告信息。交互模式下,错误信息在输出窗口可以看到;非交互模式下,程序的非正常中止要靠 Error 文件的存储信息来检查。

3. Output file (Jobname. out)

该文件为 ASCII 格式,记录和输出用户执行的每条命令情况。交互模式下,输出窗口显示内容即为 Output 文件;非交互模式下,ANSYS 执行完毕后,自动生成该文件。

4. Database file (Jobname. db)

该文件为 Binary 格式,存储有限元系统的所有输入数据和结果信息,包括模型几何尺寸、材料属性、载荷数据、节点和单元信息、位移、应力、温度等有关数据。通过 SAVE 命令可将最新数据保存到 Database 文件中,或退出 ANSYS 时,模型数据也将自动保存;如果该文件已经存在,则原有文件将以 Jobname. dbb 保存。

5. Result file (Jobname. rxx)

该文件为 Binary 格式,用于存储有限元分析的结果。分析过程正确无误地完成后,系统会自动生成该文件并保存结果信息。不同分析领域的结果文件扩展名不同,如结构分析结果文件扩展名为 rst、热分析为 rth、电磁分析为 rmg 等。

20.3.2 文件管理

1. 工作文件名设置方法

修改工作文件名和分析标题是为了区分不同的分析任务,便于结果查询和避免以往计算数据库被覆盖。ANSYS 的文件名可以通过如下方式指定:

(1) 通过交方式启动 ANSYS 时,在用户管理对话框中设置工作文件名,如图 20-2 所示。



图 20－2　ANSYS 工作环境选项对话框

Working Directory:用于设定工作路径,保存 ANSYS 计算过程的临时和永久性文件。

Job Name:用于设定工作文件名。

(2) 进入 ANSYS 后,执行 Utility Menu→File→Change Jobname 命令,弹出文件名设定对话框,如图 20－3 所示,修改工作文件名即可。

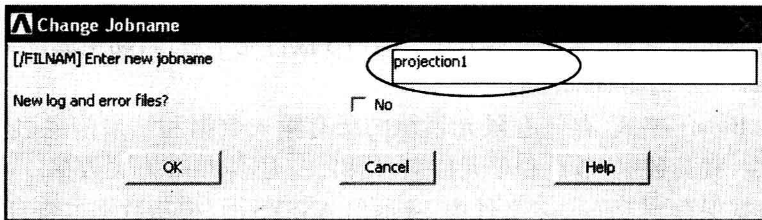


图 20－3　Change Jobname 对话框

2. 保存数据库文件

数据库文件(jobname. db)记录了有限元计算的全部信息,包括前处理建立的模型、边界条件、载荷信息和求解结果等。鉴于 ANSYS 没有其他有限元软件的即时 UNDO(取消)功能,因此,在不确定下一步操作是否稳妥时,建议先保存一下当前数据库,以便及时恢复。ANSYS 提供的存储方法有以下四种:

(1) 使用工具条按钮快速保存:Toolbar→Save _ db。

(2) 通过工作文件名保存:Utility Menu→File→Save as jobname. db。

(3) 通过指定新的工作文件名保存:Utility Menu→File→Save as…。此时,模型信息被保存到指定的文件中,当前文件的内容并无改变,后续操作仍将记录在当前数据库中。

(4) 使用命令流进行文件保存:Save, filename, ext, dir, slab。

3. 读取数据库文件

ANSYS 数据库的读取操作有以下四种方式:

(1) 使用工具条按钮快速恢复模型:Toolbar→Resume _ db。

(2) 通过工作文件名恢复模型:Utility Menu→File→Resume jobname. db。

(3) 通过指定文件名恢复模型:Utility Menu→File→Resume from…。

(4) 使用命令流进行文件恢复:Resume, filename, ext, dir, slab。

4. 文件数据的读入/导出

ANSYS 程序需要频繁地读入/导出文本文件中的数据,包括材料参数、表格、命令流、节点数据、单元信息等。常见的文件读写命令归纳如表 20-1 所列。

表 20-1 ANSYS 读入/写出文本文件操作指令表

操作描述	操作路径
读取 ANSYS 命令流文件	GUI: Utility Menu→File→Read Input From 命令:/input, filename, ext, --, line, log
读取 ANSYS 宏文件 Mac	GUI: Utility Menu→Macro→Execute Data Block 命令: * use, name, arg1, arg2, …, arg18
读取材料特性文件 jobname. mp	GUI: Main Menu→Preprocessor→Material Props→Read From File 命令:mpread, filename, ext, --, lib
读取参数文件 jobname. parm	GUI: Utility Menu→Parameters→Restore Parameters 命令:parres, lab, filename, ext, --
读取单元文件 jobname. elem	GUI: Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Elements→Read Elem 命令:eread, filename, ext, --
读取节点文件 jobname. node	GUI: Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Nodes→Read Node File 命令:nread, filename, ext, --
创建宏文件 Mac	GUI: Utility Menu→Macro→Create Macro 命令: * create, filename, ext, --
导出材料特性文件 jobname. mp	GUI: Main Menu→Preprocessor→Material Props→Write to File 命令:mpwrite, filename, ext, --, lib, mat
导出参数文件 jobname. parm	GUI: Utility Menu→Parameters→Save Parameters 命令:parsav, lab, filename, ext, --
导出单元文件 jobname. elem	GUI: Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Elements→Write Elem File 命令:ewrite, filename, ext, --, kappnd, format
导出节点文件 jobname. node	GUI: Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Nodes→Write Node File 命令:nwrite, filename, ext, --, kappnd

20.4 ANSYS 的组成及其主要功能模块

ANSYS 的功能模块如图 20-4 所示。

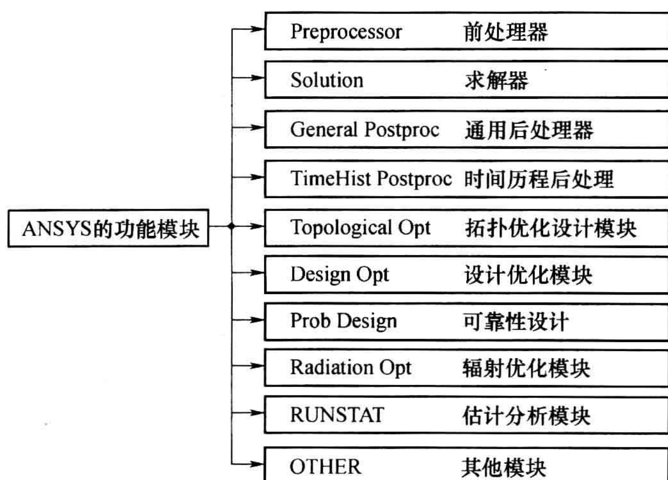


图 20－4　ANSYS 的功能模块

有限元分析过程中，通常使用前处理模块（Preprocessor，简称 PREP7）、求解模块（Solution）和后处理模块（General Postproc，简称 POST1；TimeHist Postproc，简称 POST26）3 个模块。下面简要介绍这 3 个模块的主要功能。

20.4.1　前处理模块（PREP7）

前处理模块主要用于建立（或导入）和编辑几何模型，且分网生成有限元模型，主要包括以下 3 个内容：

1. 参数定义

实体建模之前，首先应定义所要创建模型和材料的特性参数，包括单元类型、单元实常数和材料参数等。鉴于 ANSYS 没有为分析指定固定的系统单位，除电磁场和热分析外，可使用任意一种单位制。因此，所有参数必须使用统一单位制，以保证分析结果的正确性。常用的单位制有国际单位制（SI）、厘米克秒制（CGS）、BFT（以英尺为长度单位）、BIN（以英寸为长度单位）等。

2. 几何建模

ANSYS 具有与大多数 CAD/CAE 软件的接口，如 UG、Solid Works、Pro/E、CATIA、I－DEAS、AutoCAD、LS－DYNA、NASTRAN、Alogor 等，可直接导入各种实体和有限元模型。同时，ANSYS 还提供了两种实体建模方法：自底向上（bottom－up）法和自顶向下（top－down）法。

无论使用何种方法建模，均需对模型进行编辑和修改。ANSYS 提供了完整的布尔运算功能，如相加（Add）、相减（Subtract）、相交（Intersect）、分割（Divide 或 Partition）、黏结（Glue）和重叠（Overlap）等。创建复杂实体模型时，通过线、面和体等基元的布尔操作可大大减少工作量，生成各种复杂曲面和实体。同时，ANSYS 还提供了拖拉、延伸、旋转、移动、镜像和复制实体模型图元的功能。

3. 网格划分

ANSYS 提供了四种网格划分方法：自由分网、映射分网、扫掠分网和自适应分网。分

网过程中可根据模型特点和单元特性配合使用上述四种方法，以生成合理的网格，进而获得精确的计算结果。

20.4.2 求解模块(SOLUTION)

求解模块的功能包括分析类型选择、求解算法选择、精度控制、结果输出控制和模型求解计算等。首先，用户设置分析类型、分析选项、求解算法、载荷数据和载荷步等内容，然后启动计算功能。计算完毕后，ANSYS 将求解结果自动保存到结果文件中。

ANSYS 提供了以下分析功能：

1. 结构静力分析

结构静力分析用于求解(准)静力载荷引起的位移、应力、应变和支反力等，适用于求解惯性和阻尼效应对结构影响不显著的问题。ANSYS 不仅可进行线性分析，还可进行非线性分析，如塑性、蠕变、膨胀、大变形、应力刚化、超弹性、大应变及接触分析。

2. 结构动力学分析

结构动力学分析主要求解承受随时间变化载荷的结构响应问题。与静力分析不同，动力分析要考虑随时间变化的载荷、惯性和阻尼特性的影响。ANSYS 可进行的动力学分析类型有模态分析、瞬态动力学分析、谐响应分析、谱分析及随机振动响应分析。

3. 结构非线性分析

结构非线性分析主要研究结构响应随外载荷不成比例变化的现象。ANSYS 可求解静态非线性和瞬态非线性问题，诸如材料非线性、几何非线性(如屈曲分析)和状态非线性(如接触分析)等问题。

4. 多体动力学分析

ANSYS 可以分析大型三维柔体运动，并确定结构运动中产生的变形、应力和应变。

5. 热分析

热分析主要用于计算给定区域的温度分布及其他热物理参数。ANSYS 的热分析功能包括一般的稳态传热和瞬态传热分析，分析过程中可以同时考虑传导、对流和辐射三种换热方式。同时该模块还包括一些高级的热分析功能，如相变求解技术(考虑材料的潜热)、热辐射问题的不同处理方法、单元死活技术等。

6. 电磁场分析

电磁场分析可用于低频电磁(LF)场和高频电磁(HF)场问题的分析，实现电磁场中磁通量密度、涡流、电场、磁力线分布、运动效应、电路和能量损失等物理量的计算，可有效地分析多种设备的电磁兼容问题，如发电机、电动机、螺线管传动器、开关等。

7. 流体动力学分析

流体动力学分析能够处理 2D 和 3D 黏性流体的瞬态或稳态流动和换热问题，可解决翼型的升力和阻力、电子产品的流动散热、管路中复杂 3D 流体的流动、发动机排气管的流动换热及结构、电磁和热场的耦合分析等问题。

8. 声场分析

声场分析主要研究含有流体的介质中声波的传播问题和分析浸入流体中的固体结构的动态特性。它可用于计算音响话筒的频率响应、研究音乐大厅的声场强度分布等。

9．压电分析

压电分析用于分析二维或三维结构对交流、直流、任意随时间变化的电流或机械载荷的响应，可用于换热器、振荡器、谐振器、麦克风等部件及其他电子设备的结构动态响应特性分析。ANSYS 提供的压电分析功能包括静态分析、模态分析、谐响应分析和瞬态响应分析。

20.4.3　后处理模块（POST1 和 POST26）

后处理模块包括通用后处理模块（POST1）和时间历程后处理模块（POST26）两部分。通用后处理模块主要用于查看单步静力结果、给定时间点或指定载荷步的整体模型的响应结果，如静力分析、模态分析、屈曲分析、瞬态动力学响应分析、谱分析等结果的显示。通用后处理模块的显示方式包括图形显示、动画显示、数据列表显示、路径曲线显示等。时间历程后处理模块用于查看模型中指定点的分析结果随时间、频率或载荷步等的变化关系，可实现从简单的图形显示和列表显示到数值微积分计算和响应频谱生成的复杂操作。

20.5　ANSYS 常用菜单及其功能

20.5.1　实用菜单及其功能

实用菜单为下拉式结构，主要包含文件、图形和参数的控制和选择等实用功能。各下拉菜单常用的按钮如下：

1．File 菜单

选择 Utility Menu→File 命令，弹出如图 20－5 所示的下拉菜单，主要用于文件管理、数据导入/导出等。常用按钮功能如下：

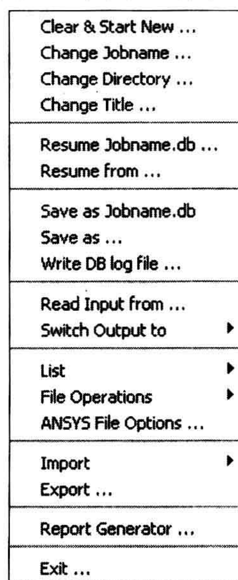


图 20－5　File 菜单

（1）Clear & Start New：清空原有数据库，开启新的分析过程。

（2）Change Jobname：更改工作文件名。

（3）Change Title：更改分析标题。

（4）Resume Jobname. db：将数据库恢复至前次保存时的状态。

（5）Resume from …：将数据库恢复至指定工作文件名保存时的状态。

（6）Save as Jobname. db：保存当前数据至当前工作文件名数据文件。

（7）Save as …：保存当前数据至新定义的工作文件名数据文件。

（8）Read Input from：读入并顺序执行文本文件的操作命令。

（9）Import：导入其他软件（Pro/E，UG，Inventor 等）建立的实体模型。

（10）Export：将 ANSYS 中的模型以 IGES 格式导出，供其他有限元软件使用。

（11）Report Generator：用于分析结束后，生成 ANSYS 分析报告。

（12）Exit：退出 ANSYS。

2. Select 菜单

选择 Utility Menu→Select 命令，弹出如图 20-6 所示的下拉菜单。通过各命令可选择全部或部分实体模型或有限元模型，检验模型的有效性和约束及载荷的正确性、查看和输出关键部件的结果等。常用按钮功能如下：

（1）Entities：选择各种特征元素（如体、面、线、节点和单元等），以提高显示效率、检查模型有效性、查看局部结果等。单击 Entities 按钮后，弹出 Select Entities 对话框，如图 20-7 所示。

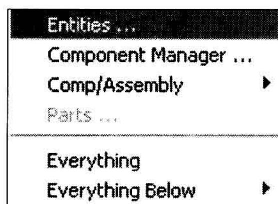


图 20-6　Select 菜单



图 20-7　Select Entities 对话框

可选择的特征元素名称包括节点、单元、体、面、线和关键点，选择方式包括单击选取、按属性选区、按位置选取等，选取范围单选按钮具体的含义如下：

① From Full：从数据的全集中选择；

② Reselect：从选中的子集中再选择；

③ Also Select：从整个模型中选择并添加到当前集中；

④ Unselect：从当前集中除去选中的特征；

⑤ Select All：恢复全集；

⑥ Invert：在激活与非激活的集合间转换。

实际选择操作中可利用上述选项功能的组合来选取需要的特征元素。

（2）Component Manager：管理组件的创建、删除和显示等，便于各特征元素的选取和显示。在接触分析中，组件的生成和使用是问题定义和求解的关键。

（3）Com/Assembly：用于组件/组装体的创建、修改、选取和删除等。

（4）Everything：选取所有的特征元素集（体、面、线、关键点、单元和节点）。

3. List 菜单

选择 Utility Menu→List 命令,弹出如图 20－8 所示的下拉菜单。通过各命令可将有限元分析过程中建模、求解和特征元素的信息列表显示出来。常用按钮功能如下:

(1) Keypoint、Lines、Areas、Volumes、Nodes、Elements、Components、Picked Entities:列表显示模型各种特征元素的相关信息(如关键点的坐标、节点坐标、单元组成和材料特性等)。

(2) Properties:列表显示单元类型、实常数、材料特性、界面参数等。

(3) Loads:列表显示载荷信息(如位移约束、集中载荷、均布载荷等)。

(4) Results:列表显示求解结果(节点结果、单元结果、能量结果等)。

4. Plot 菜单

选择 Utility Menu→Plot 命令,弹出如图 20－9 所示的下拉菜单。通过各命令可显示全部或部分特征元素,便于模型检查、边界条件施加和结果查看。常用按钮功能如下:

Files ▸
Status ▸
Keypoint ▸
Lines ...
Areas
Volumes
Nodes ...
Elements ▸
Components
Parts ...
Picked Entities +
Properties ▸
Loads ▸
Results ▸
Other ▸

图 20－8　List 菜单

Replot
Keypoints ▸
Lines
Areas
Volumes
Specified Entities ▸
Nodes
Elements
Layered Elements ...
Materials ...
Data Tables ...
Array Parameters ...
Results ▸
Multi-Plots
Components ▸
Parts

图 20－9　Plot 菜单

(1) Replot:刷新窗口,重新生成当前显示。

(2) Keypoints、Lines、Areas、Volumes、Specified Entities、Nodes、Elements、Layered Elements、Components:分别单独显示指定的特征元素(关键点、线、面、体、指定元素、节点、单元,组件等)。

(3) Materials、Data Tables:显示材料特性曲线、数据表格等。

5. PlotCtrls 菜单

选择 Utility Menu→PlotCtrls 命令,弹出如图 20－10 所示的下拉菜单。通过各命令可实现 ANSYS 图形窗口的显示控制,包括改变图形窗口个数、观测角度、字体设置、颜色控制、动画显示控制、单元特性显示控制等功能。常用按钮功能如下:

(1) Pan Zoom Rotate:显示图形显示窗口调整面板,如图 20－11 所示,可以实现视图的缩放、平移、旋转动态转换视角等操作。各按钮的功能概述如下:

① Top：显示模型的俯视图；
② Bot：显示模型的仰视图；
③ Left：显示模型的左视图；
④ Right：显示模型的右视图；
⑤ Front：显示模型的前视图；
⑥ Back：显示模型的后视图；
⑦ Iso：显示模型的等轴视图；
⑧ WP：将工作平面坐标系定义成显示坐标系。

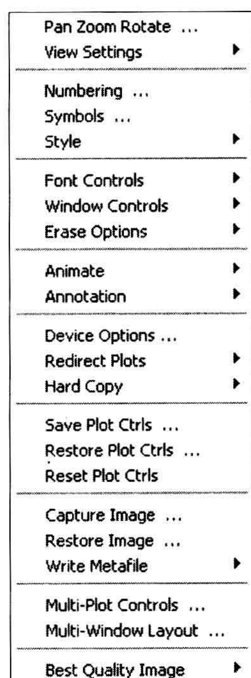


图 20－10　PlotCtrls 菜单

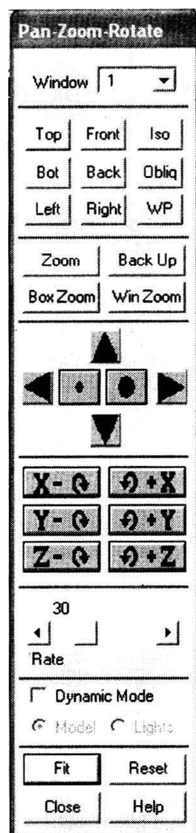


图 20－11　Pan－Zoom－Rotate 面板

（2）View Settings：通过各选项可以调整视图窗口，以不同角度、比例和焦点位置来查看目标。其中，Viewing Direction 选项用于改变观测方向；Angle of Rotation 选项用于绕指定轴旋转视图；Magnification 选项用于缩放视图；Focus Point 选项用于重新指定焦点位置；Automatic Fit Mode 选项用于自动调整视图窗口。

（3）Numbering：用于控制模型中各特征（体、面、线、关键点、节点、单元，材料参数等）的编号信息和显示颜色，便于模型检查、边界条件施加、结果查看等。Plot Numbering Controls 对话框如图 20－12 所示，通过选择各特征项对应的复选框，实现模型的单项或多项特征编号的显示。

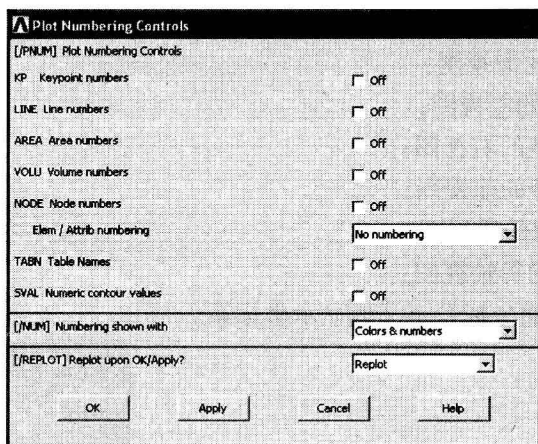


图 20 – 12　Plot Numbering Controls 对话框

（4）Symbols：模型中边界条件、载荷、坐标系等符号的显示控制。Symbols 对话框如图 20 – 13 所示。

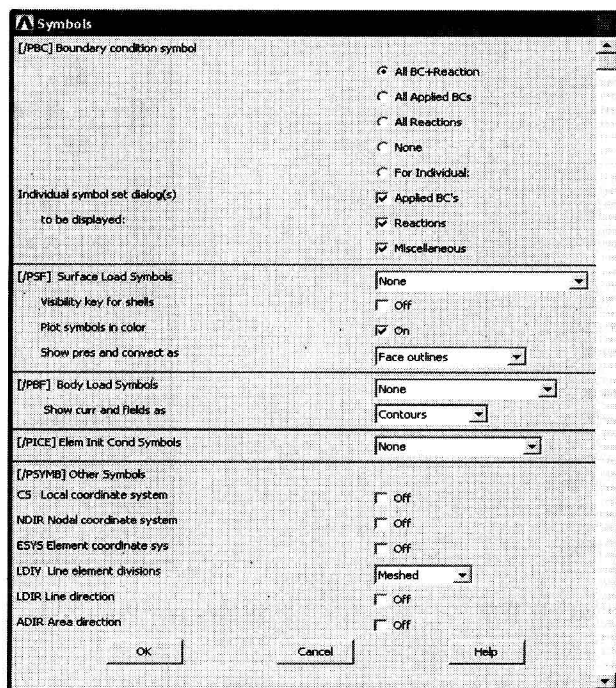


图 20 – 13　Symbols 对话框

（5）Animate：生成动画，便于直观的观测结果。生成动画的方式如图 20 – 14 所示，常用按钮功能介绍如下：

① Mode Shape：生成结构模态振形动画；

② Deformed Shape：生成分析结果的变形过程动画；

③ Deformed Results：生成分析结果（应力、应变和能量等）动画；

④ Over Time：生成指定时间段内的动画；

⑤ Over Results:生成某一范围内,结果数据(应力、应变等)的梯度线动画;

⑥ Isosurfaces:生成等势面云图动画;

⑦ Particle Flow:生成粒子流运动动画。

(6) Hard Copy:将图形窗口内容输出到打印机(To Printer)或图形文件(To File)。

6. WorkPlane 菜单

选择 Utility Menu→WorkPlane 命令,弹出如图 20-15 所示的下拉菜单。通过各命令可实现工作平面的显示控制和各种操作。常用按钮功能如下:

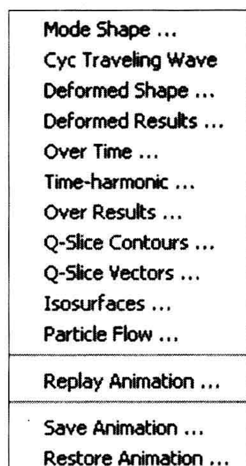


图 20-14　生成动画菜单

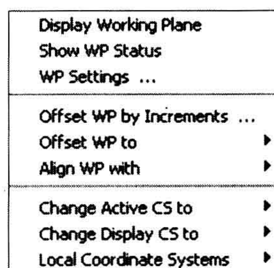


图 20-15　WorkPlane 菜单

(1) Display Working Plane:显示工作平面。

(2) Show WP Status:显示工作平面的信息(工作平面坐标系类型、原点坐标等)。

(3) WP Settings:工作平面信息设置(坐标系类型,包括极坐标和直角坐标;显示方式;辅助网格开关和参数控制信息;等等),如图 20-16 所示。

(4) Offset WP by Increments:通过设置(旋转或平移)参数重新定义工作平面,Offset WP 对话框如图 20-17 所示。

(5) Offset WP to:将工作平面的原点移至某个关键点(Keypoints)、节点(Nodes)、位置(XYZ Locations)或整体坐标原点(Global Origin)。

(6) Align WP with:将工作平面定义于已知坐标系上(活动坐标系(Active Coord Sys)、指定的局部坐标系(Specified Coord Sys)、整体坐标系(Global Cartesian)。

(7) Change Active CS to:更改工作平面至已知坐标系上(笛卡儿坐标系(Global Cartesian)、柱面坐标系(Global Cylindrical)、球面坐标系(Global Spherical)。

7. Parameters 菜单

选择 Utility Menu→Parameters 命令,弹出如图 20-18 所示的下拉菜单。通过各命令可实现常用参数和数组的定义、读取、导入和导出等。常用按钮功能介绍如下:

(1) Scalar Parameters:输入和显示定义的参数名称和数值,Scalar Parameters 对话框如图 20-19 所示。

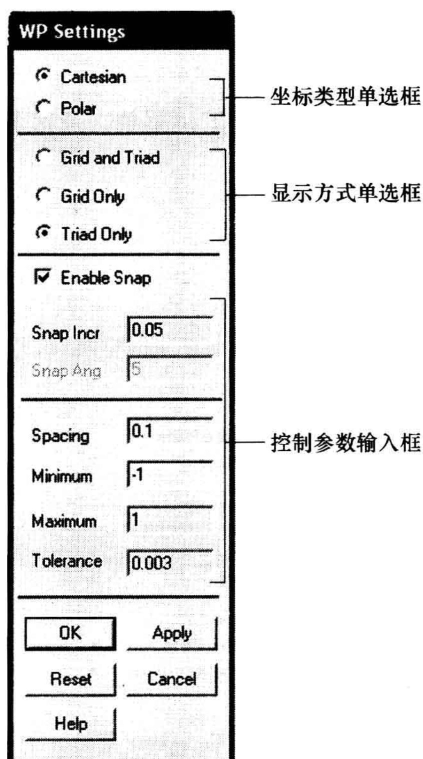


图 20－16　WP Settings 对话框

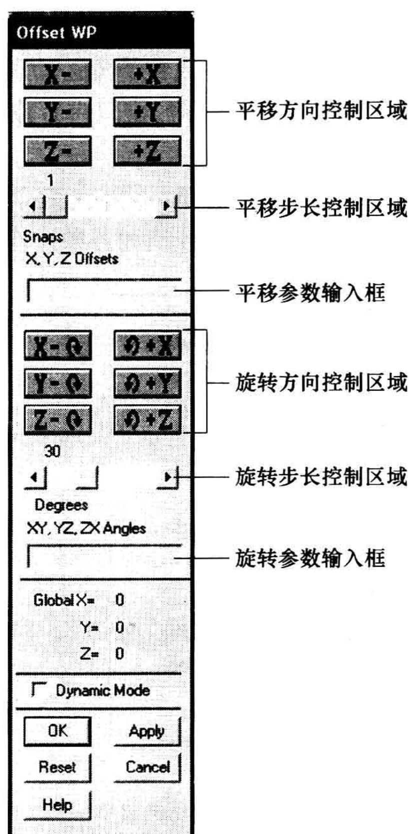


图 20－17　Offset WP 对话框

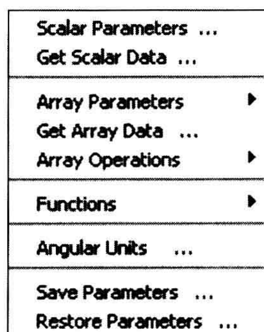


图 20－18　Parameters 菜单

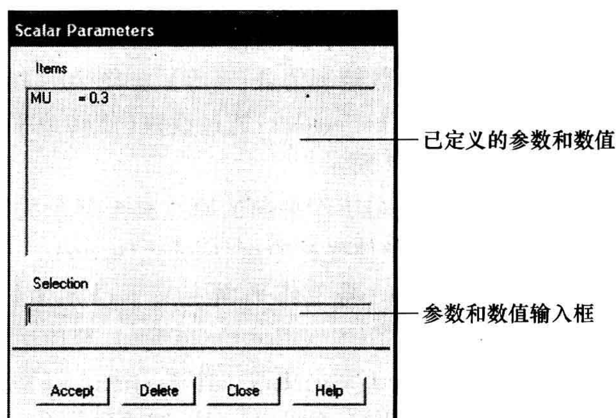


图 20－19　Scalar Parameters 菜单

（2）Get Scalar Data：提取 ANSYS 分析的各种结果数据。

8. Macro 菜单

选择 Utility Menu→Macro 命令，弹出如图 20－20 所示的下拉菜单。通过各命令可完

成宏的定义、执行及其他功能。

9. MenuCtrls 菜单

选择 Utility Menu→MenuCtrls 命令，弹出如图 20－21 所示的下拉菜单，主要用于 ANSYS 菜单的显示控制和工具条编辑等。

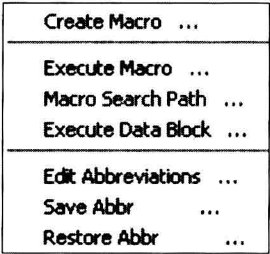


图 20－20　Macro 菜单

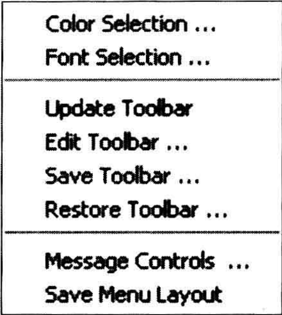


图 20－21　MenuCtrls 菜单

20.5.2　标准工具条及其功能

标准工具条及其功能如图 20－22 所示。



图 20－22　标准工具条

20.5.3　自定义工具条及其功能

自定义工具条及其功能如图 20－23 所示。

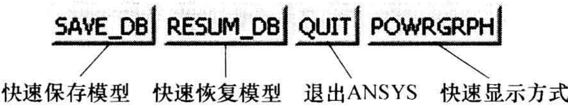


图 20－23　自定义工具条

20.5.4　主菜单及其功能

主菜单的核心部分包括前处理器、求解器和后处理器。

1. 前处理器（Preprocessor）

选择 Main Menu→Preprocessor 命令，弹出如图 20－24 所示的前处理器菜单，各常用

选项的功能简述如下：

(1) Element Type：选择单元类型和定义单元特性（平面应力/应变、积分方式等）。

(2) Real Constants：设置单元的实常数，如壳的厚度、梁的截面积和惯性矩等。

(3) Material Props：设置材料属性（导热系数、杨氏模量、泊松比等）。

(4) Sections：定义或读入梁、壳或杆等单元的截面形状等信息。

(5) Modeling：通过创建、删除、布尔操作、镜像等操作创建需要的几何模型。

(6) Meshing：网格划分，将几何模型转化为有限元模型（节点和单元）。同时，对关键部分进行网格细化。

(7) Numbering Ctrls：单元和节点编号信息控制，压缩特征元素（节点、单元、关键点、线）的冗余编号，缩减计算带宽，提高求解效率。

2. 求解器（Solution）

选择 Main Menu→Solution 命令，弹出如图 20－25 所示的求解器菜单，各常用选项的功能简述如下：

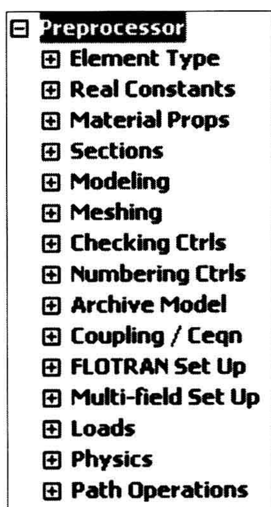


图 20－24 前处理器菜单

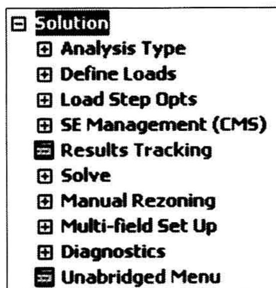


图 20－25 求解器菜单

(1) Analysis Type：定义分析类型（静力分析、模态分析、谐响应分析、屈曲分析等）和分析参数设置（如大变形选项、求解器设置、结果输出设置等）。

(2) Define Loads：定义边界条件（温度约束、位移约束等）、施加或删除载荷（力、热流密度等）。

(3) Load Step Opts：求解器参数设置（设置求解时间、载荷步、初始应力施加等）。

(4) Solve：执行求解操作。

(5) Unabridged Menu/Abridged Menu：展开所有功能按钮/显示主要功能按钮。

3. 后处理器（Postproc）

后处理器包括通用后处理器和时间历程后处理器两种。

(1) 通用后处理器菜单如图 20－26 所示，各常用选项的功能简述如下：

① Data & File Opts：读取结果文件或数据，用于查看历史结果数据或多组计算结果文件；

② Results Summary：显示 ANSYS 分析结果的整体信息；

③ Read Results：读取指定的载荷步、时间点或频率点的结果；

④ Plot Results：以图形方式显示结果数据（变形、应力、应变和能量等）；

⑤ List Results：以列表方式显示结果数据（变形、应力、应变和能量等）；

⑥ Query Results：查询指定点的结果数据（变形、应力、应变和能量等）。

(2) 时间历程后处理器菜单如图 20－27 所示，各常用选项的功能简述如下：

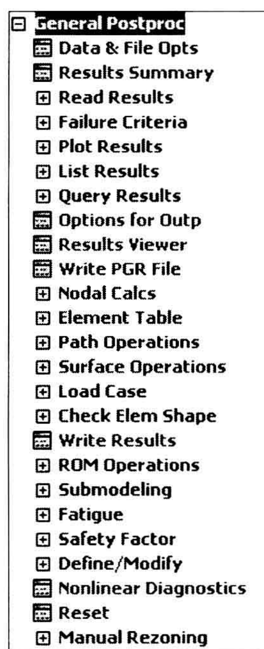


图 20－26　通用后处理器菜单

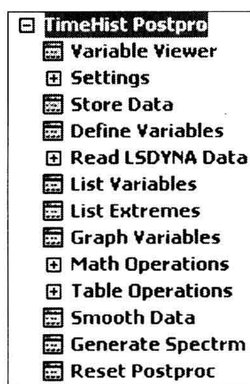


图 20－27　时间历程后处理器菜单

① Variable Viewer：查看、添加或删除变量；

② Define Variables：定义分析数据的新变量；

③ List Variables：列表方式显示指定变量随时间或频率的变化过程；

④ Graph Variables：图形方式显示指定变量随时间或频率的变化过程。

20.5.5　视图工具条及其功能

视图工具条及其功能如图 20－28 所示。

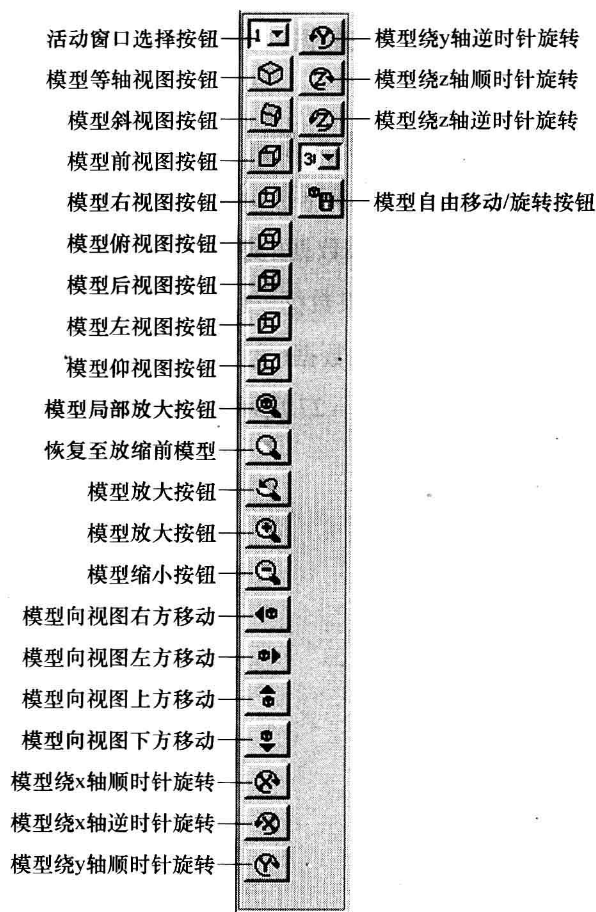


图 20－28　视图工具条

20.6　ANSYS 分析流程

本节通过一个简单结构的线性静力分析问题，说明 ANSYS 的分析流程，所有参数采用 BIN 单位制。

1. 问题描述

分析零件为一角支架，尺寸如图 20－29 所示，厚度为 0.5。角支架左上角孔（ϕ = 0.8）通过焊接被完全固定，右下角孔（ϕ = 0.8）施加从两边缘（50psi）到中间（500psi）逐渐变大的力，目的是分析角支架的应力和变形。角支架的材料为 A36 号铁，其杨氏模量为 3E7，泊松比为 0.27。

由于角支架厚度方向上的尺寸远远小于其他两个方向的尺寸，且外力只作用在垂直于厚度的平面内，因此该问题可视为平面应力问题。

ANSYS 的分析流程如图 20－30 所示。

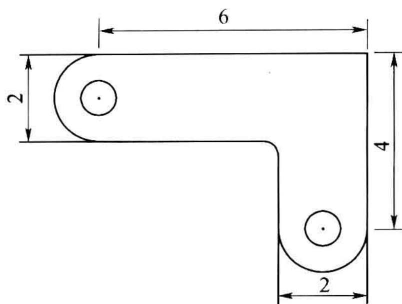


图 20-29　角支架尺寸图

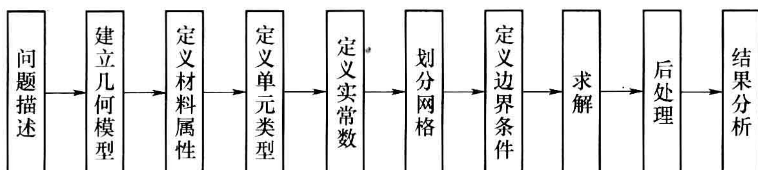
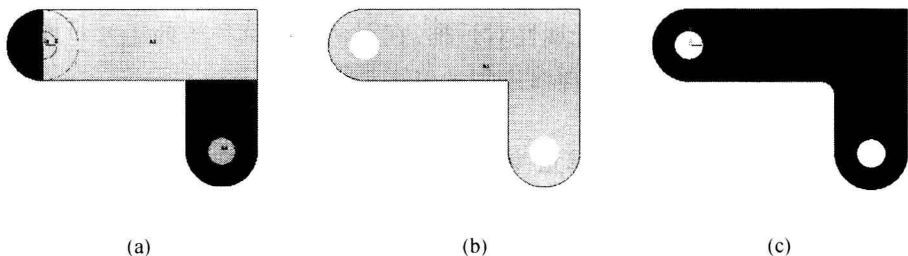


图 20-30　ANSYS 分析流程图

2. 建立几何模型

在本例中,采用自上而下的方法建立几何模型。首先,建立矩形面和圆面,如图 20-31(a)所示。而后,通过布尔运算生成基本图形,如图 20-31(b)所示。生成基本图形后,建立模型的倒角特征。用 Fillet lines 对线倒圆,倒圆后通过三条线建立倒圆面。最后,通过布尔加运算形成最终的几何模型,如图 20-31(c)所示。



(a)　　(b)　　(c)

图 20-31　创建几何模型
(a) 生成圆面;(b) 基本图形;(c) 几何模型。

3. 定义材料属性

图 20-32 为线性各向同性材料属性定义对话框,在 EX 文本框中填入 3E7,在 PRXY 文本框中填入 0.27,完成材料属性的定义。

4. 定义单元类型

该问题属于平面应力问题,故选用 Plane 82 单元。该单元是二次单元,可在网格划分较粗糙的情况下达到理想精度。

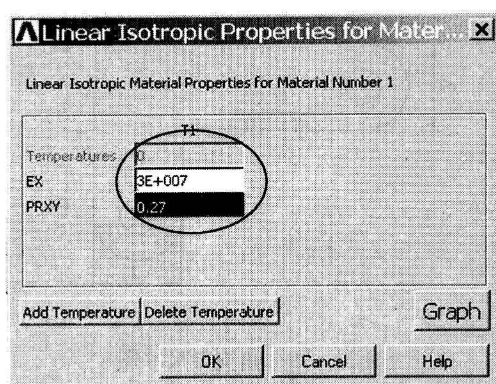
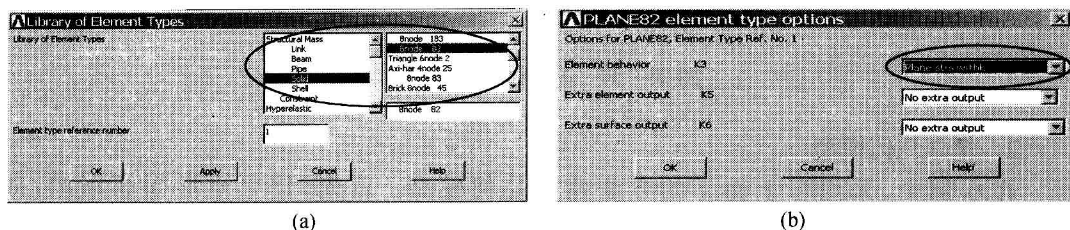


图 20－32　Linear Isotropic Properties for Material 对话框

图 20－33(a)为定义单元类型的对话框，在该对话框的左边一栏中选择 Solid，在右边一栏中选择 8node 82，即 Plane 82 单元。



(a)　　(b)

图 20－33　定义单元类型

(a) Library of Element Types 对话框；(b) Plane 82 element type options 对话框。

图 20－33(b)为 Plane 82 单元属性对话框，在对话框中选择平面单元带厚度参数的 Plane Strs w/thk 选项，为后续模型厚度的定义奠定基础。

5. 定义实常数

由于所选的单元是带厚度的单元，该单元须定义的实常数就是单元厚度。

图 20－34 为定义实常数的对话框，在该对话框中的 THK 文本框中输入 0.5，即定义单元的厚度为 0.5inch。

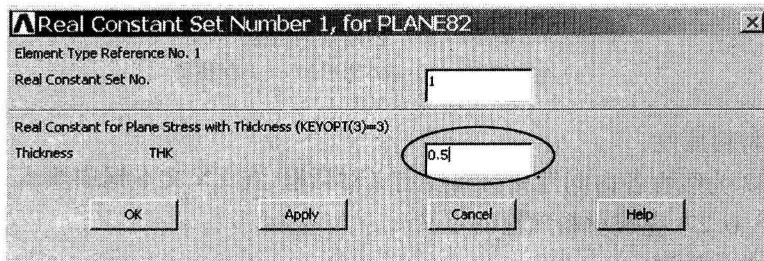
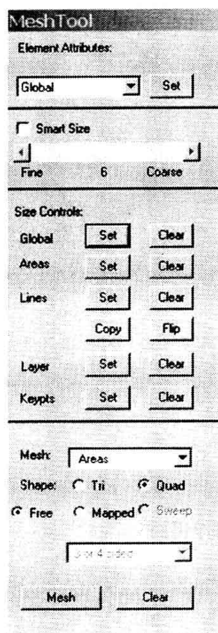


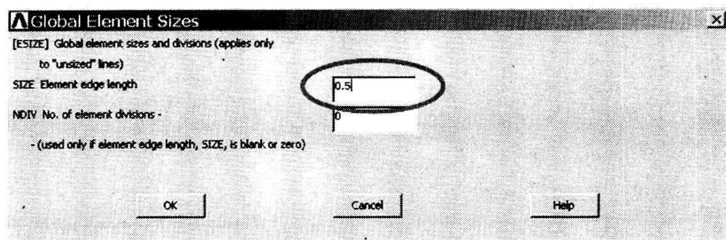
图 20－34　Real Constant Set 对话框

6. 划分网格

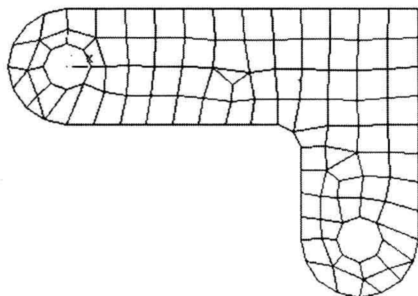
采用自由网格划分功能对几何模型进行划分，图 20 - 35(a)为网格定义对话框。



(a)



(b)



(c)

图 20 - 35　划分网格

(a) MeshTool 对话框；(b) Global Element Sizes 对话框；(c) 有限元模型。

单击划分网格对话框 Size Control 选项组中的 Global 一栏的 Set 按钮，弹出设置网格尺寸的 Global Element Sizes 对话框，如图 20 - 35(b)所示。在 Element edge length 文本框中设置网格的边长为 0.5。单击图 20 - 35(a)中的 Mesh 按钮，并选择所要划分的面，ANSYS 会自动完成网格的划分，结果如图 20 - 35(c)所示。

7. 设置边界条件

在本例中，边界条件包括位移边界条件和载荷。在角支架的左上角孔边缘施加位移约束，如图 20 - 36(a)所示设置所有自由度的位移值都为 0。在孔的下边缘施加从 50psi ~ 500psi 的渐变力，如图 20 - 36(b)所示。设置边界条件后的模型如图 20 - 36(c)所示。

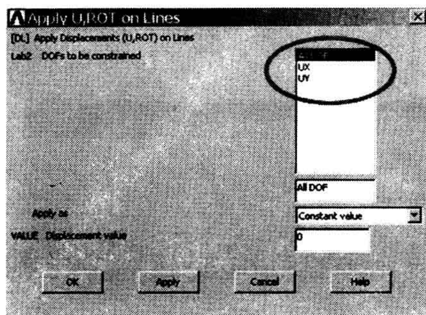
8. 求解

在求解之前应先确定分析类型，图 20 - 37(a)为定义分析类型对话框，在该对话框中选中 Static 选项，即对该模型进行结构静态分析。

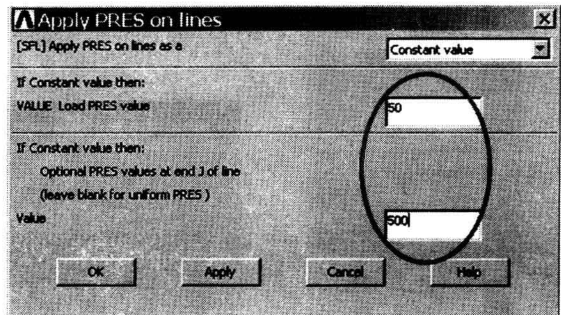
确定了分析类型后即可对模型进行求解。在弹出如图 20 - 37(b)所示的求解提示窗口中，确认边界条件、分析类型以及载荷正确后，就可以进行求解了。当出现图 20 - 37(c)所示对话框时，求解完毕。

9. 后处理

求解完后，进入后处理器，查看求解结果。图 20 - 38(a)、(b)、(c)分别是角支架的变形图、应力图和沿节点 10 ~ 节点 115 的应力变化图。从图 20 - 38 中可看出在角支架的



(a)



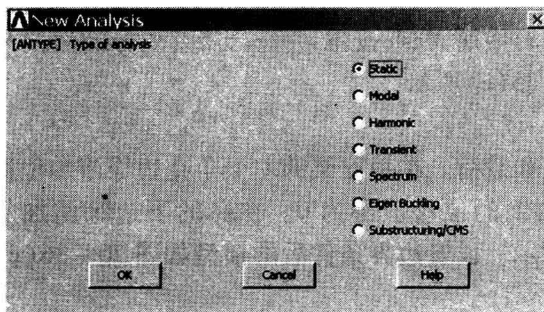
(b)



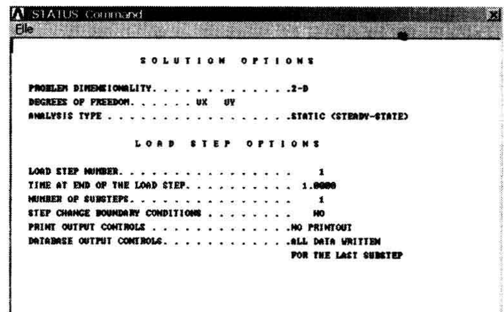
(c)

图 20－36　设置边界条件

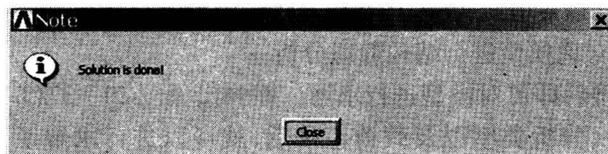
（a）定义位移约束对话框；（b）定义载荷对话框；（c）施加边界条件后的模型。



(a)



(b)



(c)

图 20－37　求解设置

（a）New Analysis 对话框；（b）求解提示窗口；（c）求解结束对话框。

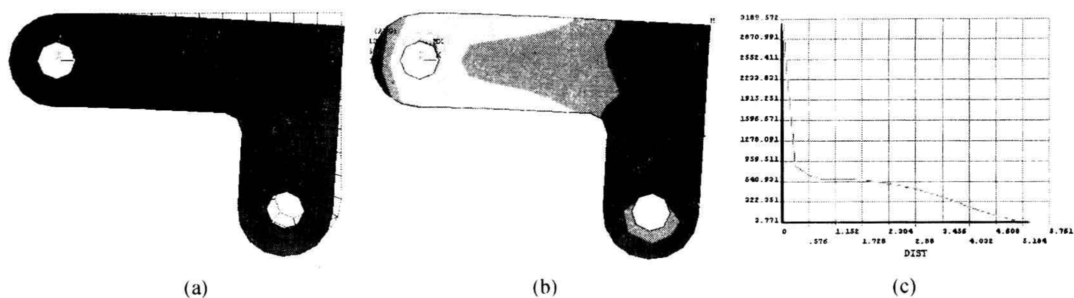


图 20－38　结果显示

（a）变形图；（b）应力云图；（c）沿节点 10～节点 115 路径的应力变化图。

左上角孔和右下角孔处出现了应力集中，所以在以后的分网中可在这些部位加密网格，使计算结果更加精确。

10. 结果分析

由图 20－38 所示的变形和应力分布云图可知，角支架在外力作用下，产生向下的变形。鉴于左侧孔处完全约束，无法产生变形，故产生较大的应力。可见 ANSYS 分析结果与实际物理现象相符。

第21章　ANSYS几何建模方法

ANSYS的几何建模方法包括:(1)标准格式数据模型文件导入方法;(2)专业CAD软件模型导入方法;(3)ANSYS自顶向下或自底向上方式建立方法。

21.1　几何模型导入方法及实现过程

ANSYS不仅可以导入标准格式数据文件中的模型,还提供了与众多主流CAD软件(如Pro/E、UG、SolidEdge、Catia和SolidWorks等)的直接接口,便于用户采用熟悉的软件建立几何模型。

21.1.1　标准格式数据模型文件导入方法

ANSYS可导入的标准格式数据模型包括SAT、IGES、Parasolid等模型。本节以IGES格式数据模型为例介绍标准数据模型文件的导入方法。

1. 建立IGES格式模型文件

通过CAD或CAE软件(如UG、Autodesk Inventor、Solidworks、Solidedge、Pro/E、NASTRAN等)建立模型文件。执行"文件"→"另存为"命令,弹出保存副本对话框,选择模型数据格式为IGES,单击OK按钮即可。图21-1为UG的模型保存对话框。

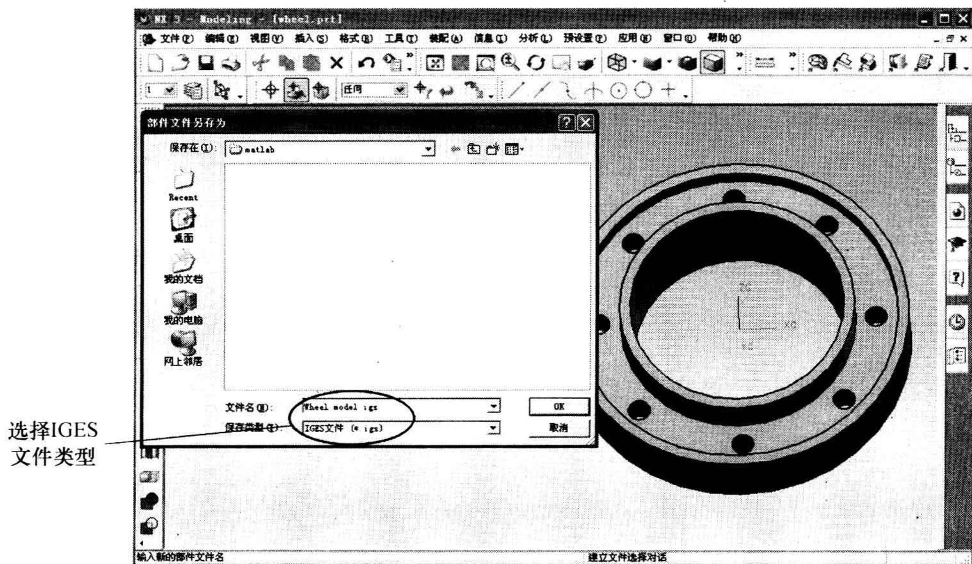


图21-1　UG模型保存对话框

2. 清除 ANSYS 数据库

启动 ANSYS,执行 Utility Menu→File→Clear & Start New…命令,弹出 Clear Database and Start New 对话框,选择 Read file 单选框,如图 21 - 2 所示。单击 OK 按钮,弹出信息确认对话框,单击 Yes 按钮即可。

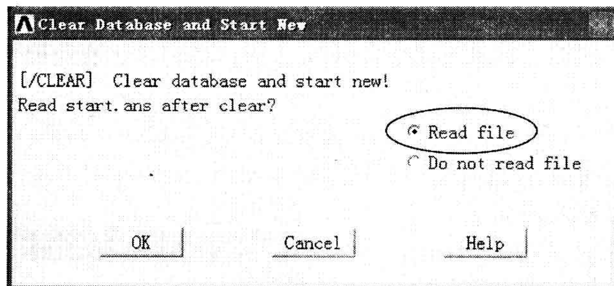


图 21 - 2 Clear Database and Start New 对话框

3. 读取 IGES 格式模型文件

执行 Utility Menu→File→Import→IGES…命令,弹出 Import IGES File 对话框,选择 No defeaturing,如图 21 - 3 所示。单击 OK 按钮,弹出如图 21 - 4 所示的文件选择对话框,单击 Browse…按钮,弹出如图 21 - 5 所示的对话框,选择需导入的 IGES 文件,单击"打开"按钮,完成模型的输入操作。CAD 模型导入 ANSYS 后的效果如图 21 - 6 所示。

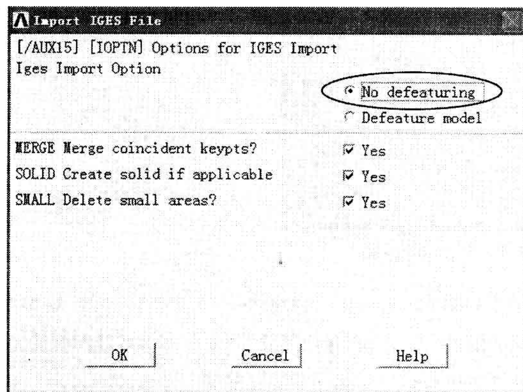


图 21 - 3 Import IGES File 对话框

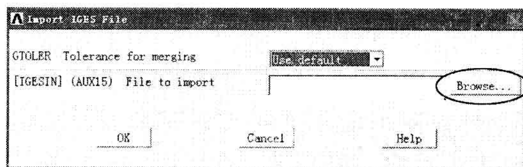


图 21 - 4 Import IGES File 模型输入对话框

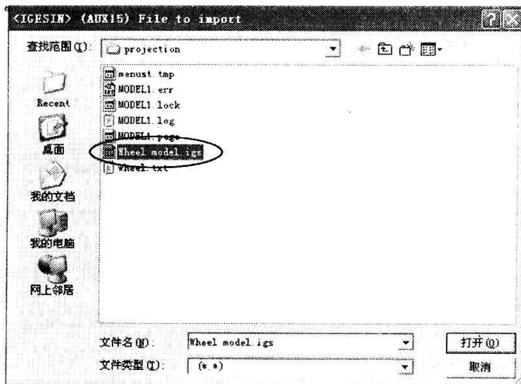


图 21 - 5 文件选择对话框

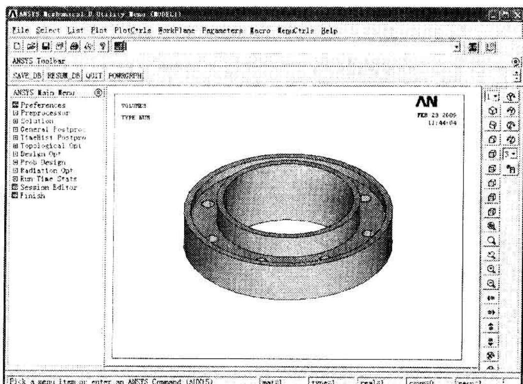


图 21 - 6 导入 ANSYS 后的模型

4. 模型检查和修补

具体操作参见 21.1.3 节。

21.1.2 CAD 软件模型直接导入方法

ANSYS 为 Pro/E、UG 等 CAD 软件提供了专门的接口，可通过相关设置实现软件的连接，进而直接导入实体模型。该处以 Pro/E 模型为例，介绍 CAD 软件模型的直接导入方法。

1. 设置接口

（1）执行“开始”→“所有程序”→ANSYS9.0→Utilities→ANS _ ADMIN 命令，如图 21-7所示，之后系统弹出如图 21-8 所示的 ANS _ ADMIN 9.0 对话框。

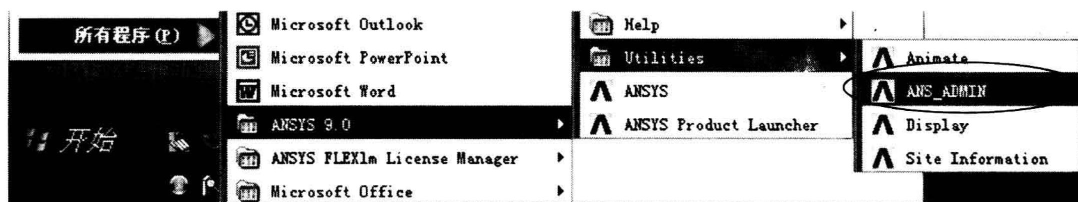


图 21-7　接口设置命令

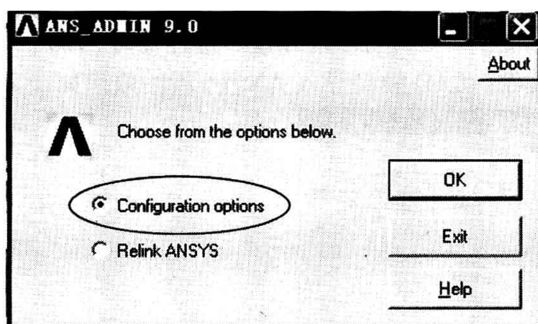


图 21-8　ANS _ ADMIN 9.0 对话框

（2）单击 OK 按钮，弹出如图 21-9 所示的 Configuration options 对话框，选择 Configure Connection for Pro/E 单选框，单击 OK 按钮；弹出 Configure ANSYS Connection for Pro/E 对话框，如图 21-10 所示，单击 OK 按钮，弹出图 21-11 所示的配置成功提示信息，单击“确定”按钮即可。

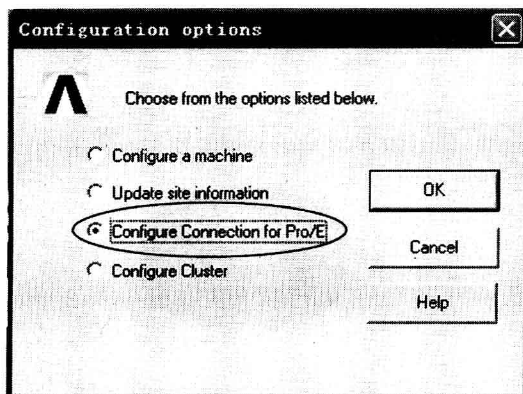


图 21-9　Configuration options 对话框

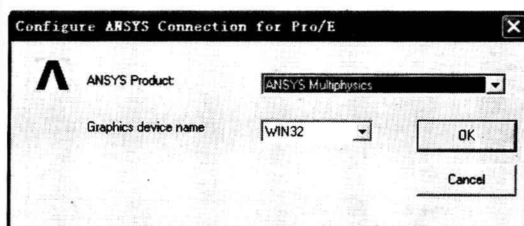


图 21-10　Configure ANSYS Connection for Pro/E 对话框

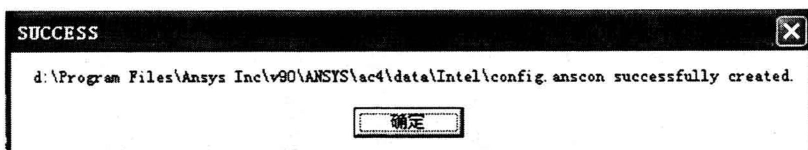


图 21－11　配置成功信息框

（3）配置完成后，系统弹出图 21－12 所示的 Pro/Engineer installation information 对话框，在 ProEngineer installation path 文本框中输入 Pro/Engineer 的安装路径，如 D:\Program Files\proeWildfire 2.0。之后系统弹出接口设置正确提示框，如图 21－13所示，单击“确定”按钮，完成接口设置。

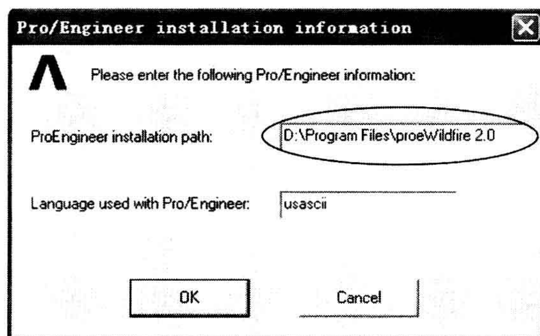


图 21－12　Pro/Engineer installation information 对话框



图 21－13　接口设置成功提示框

（4）接口设置成功后，在 Pro/E 软件的 Utility Menu 中增加了一个 ANSYS 启动的下拉菜单，包括 ANSConConfig 和 ANSYSGeom 两个按钮，如图 21－14 所示。

2. 模型导入

（1）启动 Pro/E 软件，建立 CAD 模型后，执行 Utility Menu→ANSYS 9.0→ANSYS-Geom 命令，如图 21－14 所示。ANSYS 自动后台启动并弹出图 21－15 的 ANSYS9.0 Notice 信息提示框，单击 OK 按钮后，CAD 模型自动导入到 ANSYS 中。

（2）显示实体：执行 Utility Menu→Plot→Volumes 命令，显示导入的模型如图 21－16 所示。

3. 模型检查和修补

具体操作见 21.1.3 节。



图 21－14　Pro/E 模型转化界面

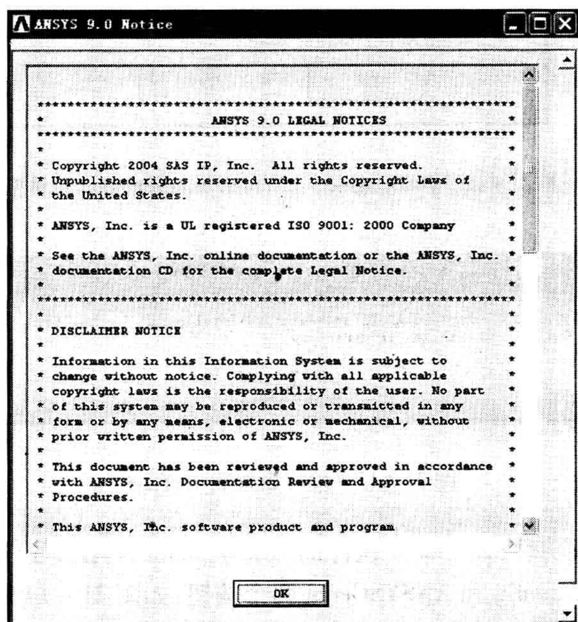


图 21－15　模型转化信息提示框

21.1.3　模型信息检查和修补

1. 列表和显示模型退化信息：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Check Geom→Show Degeneracy→List Degen Areas（Volus）/ Plot Degen Areas（Volus）命令。

2. 模型布尔操作：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Operate→Booleans→…命令，可对导入的模型进行切割、加/减等操作，便于后续的网格划分、约束施加等操作。

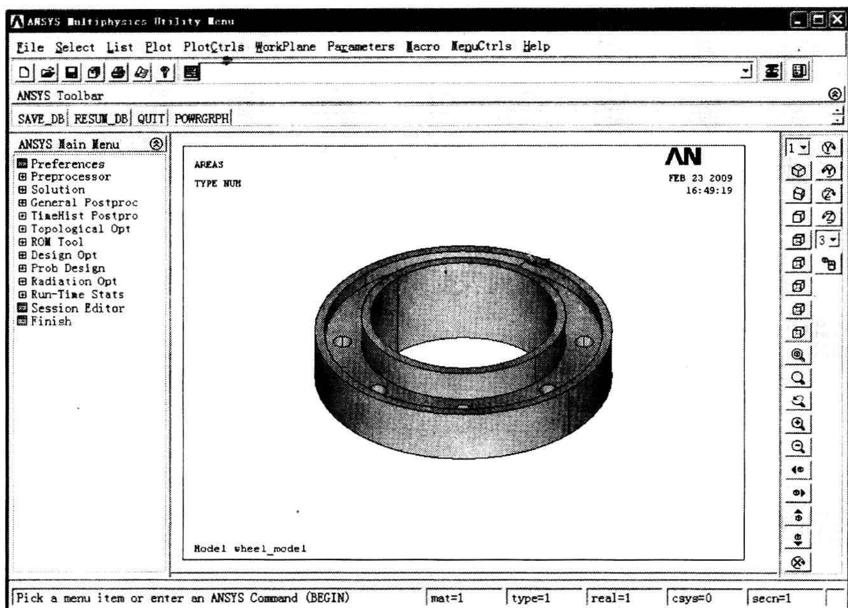


图 21 - 16　从 Pro/E 导入的 CAD 模型

3. 模型移动和修改：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Move / Modify→…命令可实现模型的移动和修改功能。

至此，完成了 3D 几何模型的导入。

21.2　ANSYS 几何建模方法

ANSYS 提供了自底向上和自顶向下两种几何建模方法。本节以图 3 - 1 的模型为实例详述两种方法的实现过程。

21.2.1　自底向上建模方法

自底向上建模是指由最低级的图元（关键点）生成高级图元（线、面、体等），完成实体建模的过程。用户不必总是按从低级图元到高级图元的办法，依次生成各图元，可以直接利用它们的顶点，生成模型的体或面，中间图元由软件自动生成。图 21 - 1 的模型采用自底向上建模方法的实现过程如下：

1. 定义工作文件名和分析标题

（1）定义工作文件名：执行 Utility Menu→File→Change Jobname 命令，在弹出的对话框中输入 Wheel，选中 New log and error files 复选框，单击 OK 按钮。对话框如图 21 - 17 所示。

（2）定义分析标题：执行 Utility Menu→File→Change Title 命令，在弹出的对话框中输入 Stress Calculation of Wheel，单击 OK 按钮。对话框如图 21 - 18 所示。

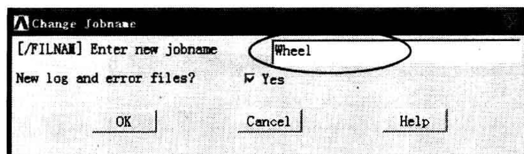


图 21 - 17　Change Jobname 对话框

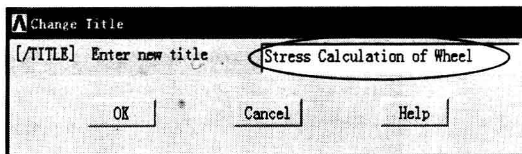


图 21 - 18　Change Title 对话框

(3) 关闭三角坐标符号:执行 Utility Menu→PlotCtrls→Window Options 命令,在弹出对话框中,选择 Location of triad 下拉列表框中的 Not Show 选项,单击 OK 按钮。对话框如图 21 - 19 所示。

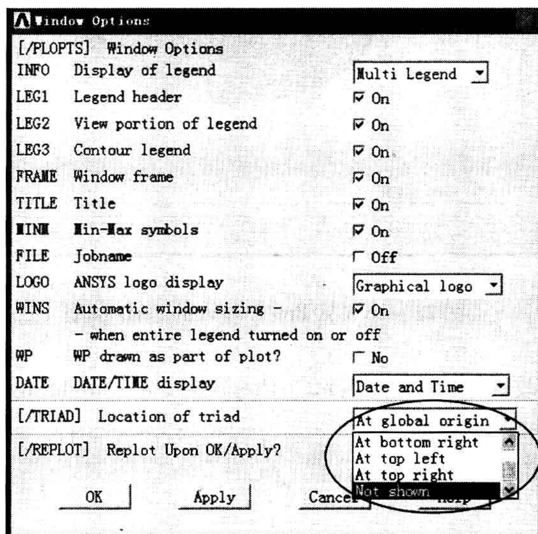


图 21 - 19　Window Options 对话框

2. 建立 2D 模型

(1) 建立 12 个关键点:执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Keypoints→In Active CS 命令,弹出 Create Keypoints in Active Coordinate System 对话框,如图 21 - 20 所示。在 NPT 输入框中输入关键点编号,X、Y 和 Z 输入框中输入关键点坐标。关键点坐标信息如下:Keypoint 1(5,2.5,0)、Keypoint 2(5, -2.5,0)、Keypoint 3(5.5, -2.5,0)、Keypoint 4(5.5,2.5,0)、Keypoint 5(5.5,0.75,0)、Keypoint 6(5.5, -0.75,0)、Keypoint 7(7.5, -0.75,0)、Keypoint 8(7.5,0.75,0)、Keypoint 9(7.5,1.5,0)、Keypoint 10(7.5, -1.5,0)、Keypoint 11(8, -1.5,0)、Keypoint 12(8,1.5,0)。依次输入每个关键点信息后,单击 Apply 按钮确认,最后单击 OK 按钮确认。执行 Utility Menu→PlotCtrls→Numbering,选中 KP 对应的复选框(图 21 - 21),显示关键点编号,生成的模型如图 21 - 22 所示。

(2) 建立 3 个矩形面:执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Arbitrary→Through KPs 命令,弹出 Create Area thru KPs 选取框,如图 21 - 23 所示。依次选取关键点 1、2、3、4,单击 Apply 按钮;依次选取关键点 5、6、7、8,单击 Apply 按钮;依次选取关键点 9、10、11、12,单击 OK 按钮。生成的模型如图 21 - 24 所示。

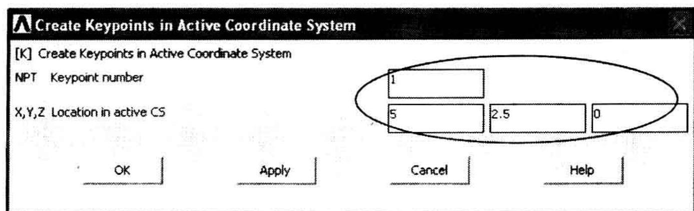


图 21 - 20 Create Keypoints in Active Coordinate System 对话框

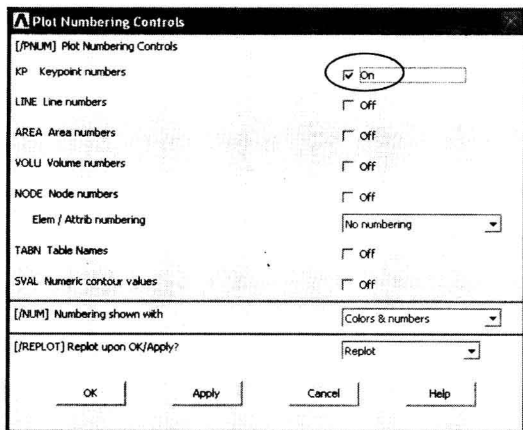


图 21 - 21 Plot Numbering Controls 对话框

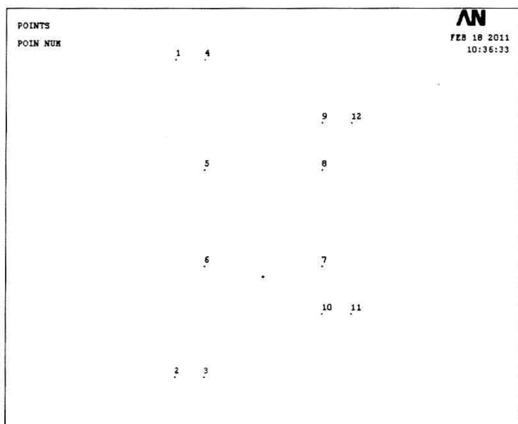


图 21 - 22 生成关键点模型

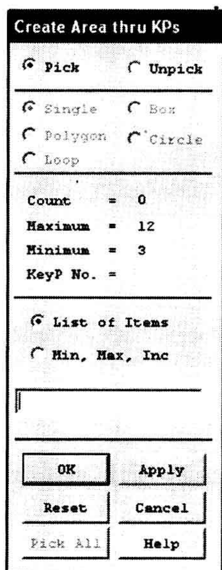


图 21 - 23 Create Area thru KPs 对话框

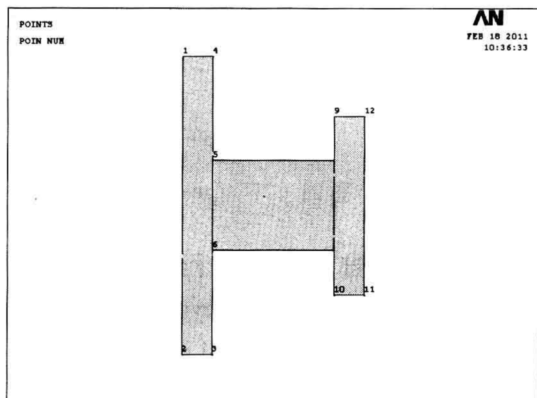


图 21 - 24 生成面模型图

（3）执行 Utility Menu→PlotCtrls→Numbering，单击 KP 对应的复选框（图 21 - 21），取消关键点编号显示。

（4）面相加操作：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Operate→Booleans→

Add→Areas 命令，弹出拾取框，如图 21－25 所示，单击 Pick All 按钮。三个面加为一个面，便于后续的拉伸操作。相加后的模型如图 21－26 所示，至此 2D 模型建立完毕。

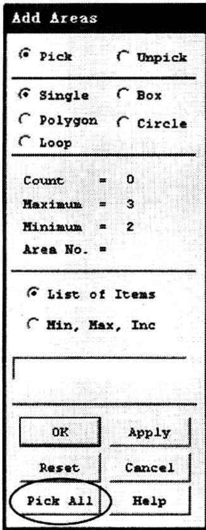


图 21－25　Add Areas 对话框

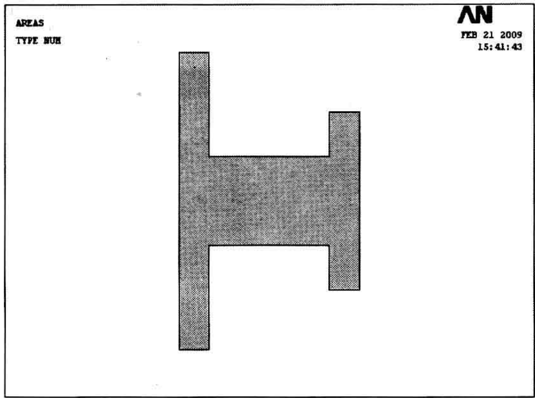


图 21－26　相加后面模型图

3. 建立 3D 模型

（1）建立两个关键点来定义旋转轴：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Keypoints→In Active CS 命令，弹出 Create Keypoints in Active Coordinate System 对话框，如图 21－27 所示。在输入框中分别输入以下信息：NPT（关键点编号）＝100，X＝0，Y＝0，Z＝0，单击 Apply 按钮；NPT＝101，X＝0，Y＝3，Z＝0，单击 OK 按钮。

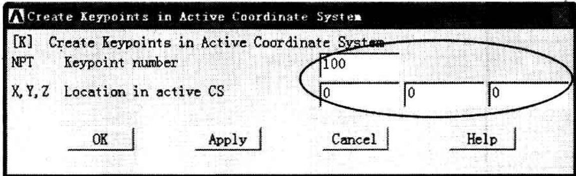


图 21－27　Create Keypoints in Active Coordinate System 对话框

（2）显示关键点编号：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Numbering 命令，弹出 Plot Numbering Control 对话框，选中 Keypoint Numbers 复选框，如图 21－21 所示，单击 OK 按钮。

（3）显示面和关键点：执行 Utility Menu→Plot→Multi－Plots 命令，同时显示创建的面和关键点，显示效果如图 21－28 所示。

（4）2D 旋转生成 3D 模型：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Operate→Extrude→Areas→About Axis 命令，弹出拾取框，单击 Pick All 按钮，如图 21－29 所示。然后，依次拾取编号为 100 和 101 的关键点，单击 OK 按钮，弹出如图 21－30 所示的 Sweep Areas about Axis 对话框。在 Arc length in degree 文本框中输入圆弧角为 360，在 No. of volume segments 文本框中输入 4，即生成的实体由四块实体组成，单击 OK 按钮。

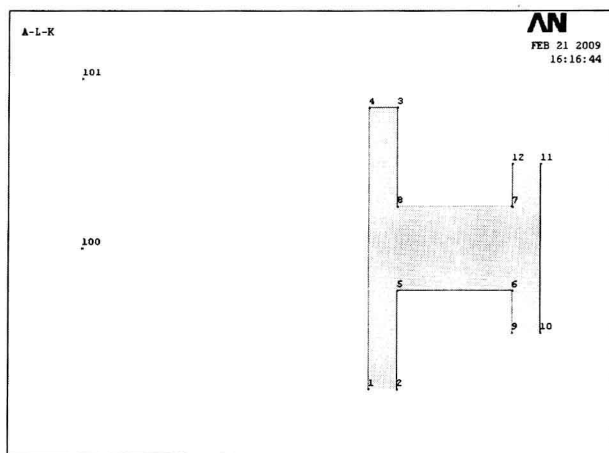


图 21－28　创建模型效果图

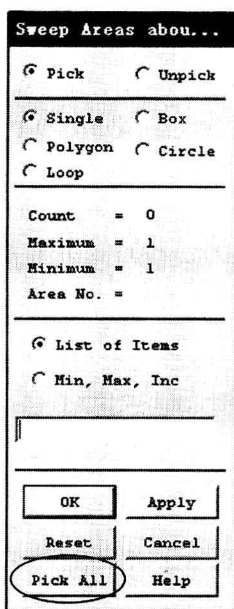


图 21－29　Sweep Areas about Axis 拾取对话框图

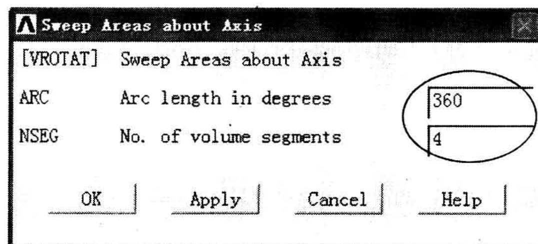


图 21－30　Sweep Areas about Axis 对话框图

（5）关闭关键点编号显示：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Numbering 命令，弹出 Plot Numbering Control 对话框，清除 Keypoint Numbers 复选框，单击 OK 按钮。

（6）改变视角显示：执行视图工具条的 Isometric View 命令，如图 21－31 所示，生成的模型结果如图 21－32 所示。

4. 生成圆柱孔

（1）显示工作平面：执行 Utility Menu→WorkPlane→Display Working Plane 命令。

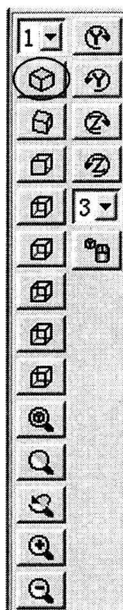


图 21－31　视图工具条

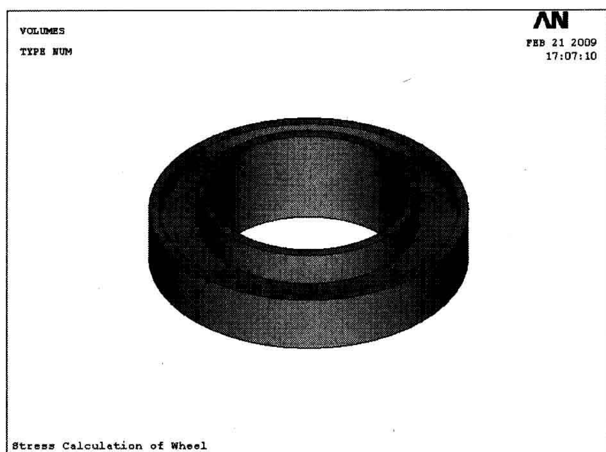


图 21－32　3D 实体模型图

（2）移动工作平面至圆柱孔中心：执行 Utility Menu→WorkPlane→Offset WP to→XYZ Locations 命令，在弹出的拾取框中输入 6.5，1，0，如图 21－33 所示。

（3）旋转工作平面：执行 Utility Menu→WorkPlane→Offset WP by Increments 命令，弹出 Offset WP 工具栏，分别在 XY、YZ、ZX Angle 文本框中输入 0，－90，0，单击 OK 按钮。如图 21－34 所示。

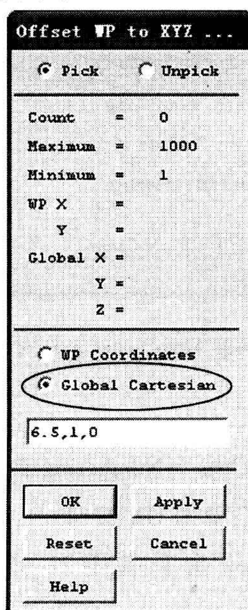


图 21－33　Offset WP to XYZ 拾取框

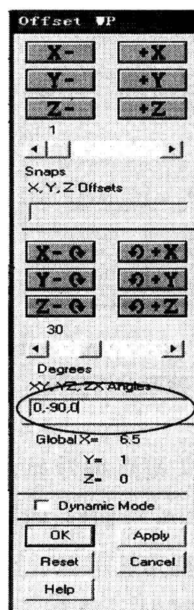


图 21－34　Offset WP 工具栏

(4) 生成一个实心圆柱体：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Volume→Cylinder→By Dimensions 命令，弹出如图 21－35 所示的 Create Cylinder by Dimensions 对话框。在 RAD1 文本框中输入 0.5，在 Z1 和 Z2 文本框中分别输入 0 和 －3，单击 OK 按钮，生成的模型如图 21－36 所示。

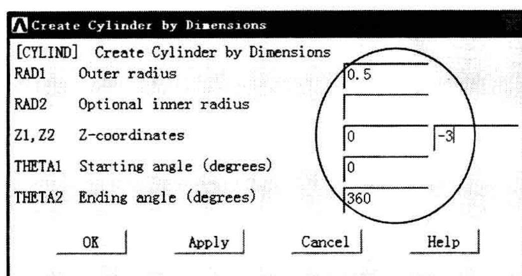


图 21－35　Create Cylinder by Dimensions 对话框

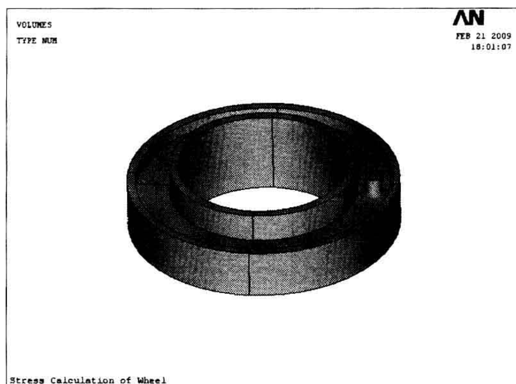


图 21－36　含圆柱体 3D 实体模型图

(5) 坐标系还原到整体笛卡尔坐标系：执行 Utility Menu→WorkPlane→Align Wp with→Global Cartesian 命令。

(6) 坐标系转化为柱状坐标系：执行 Utility Menu→WorkPlane→Change Active CS to→Global Cylindrical Y 命令。

(7) 阵列生成其余实心圆柱体：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Copy→Volumes 命令，弹出 Copy Volumes 拾取框。选择实心圆柱体，单击 OK 按钮，弹出 Copy Volumes 对话框，如图 21－37 所示。在输入框中输入以下信息：ITIME 输入 8；DY 输入 45。单击 OK 按钮，得到如图 21－38 所示的模型。

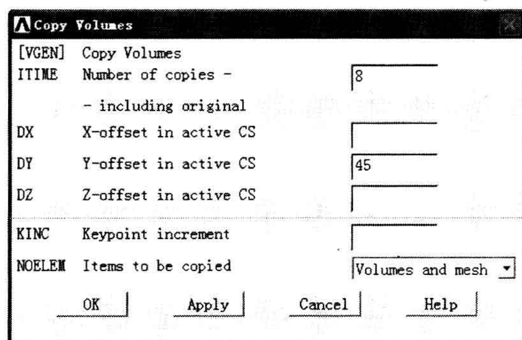


图 21－37　Copy Volumes 对话框

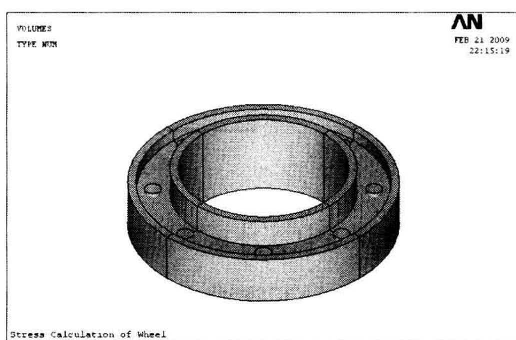


图 21－38　阵列后 3D 模型图

(8) 显示体编号：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Numbering 命令，弹出 Plot Numbering Control 对话框，选中 Volume Numbers 复选框。

(9) 体相减操作：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Operate→Booleans→Subtract→Volumes 命令，弹出 Subtract Volumes 对话框。拾取编号为 V1～V4 的体，单击 OK 按钮；然后，拾取编号为 V5～V12 的体，单击 OK 按钮，生成结果如图 21－39 所示。

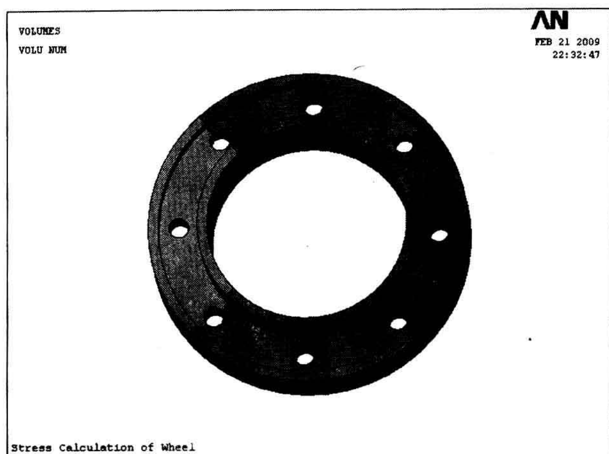


图 21－39　3D 实体模型图

（10）关闭体编号显示：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Numbering 命令，弹出 Plot Numbering Control 对话框，清除 Volume Numbers 复选框。

（11）坐标系还原到整体笛卡尔坐标系：执行 Utility Menu→WorkPlane→Change Active CS to→ Global Cartesian 命令。

（12）保存结果文件：执行 Utility Menu→File→Save as 命令，弹出 Save as 对话框。输入 Wheel model，如图 21－40 所示，单击 OK 按钮。

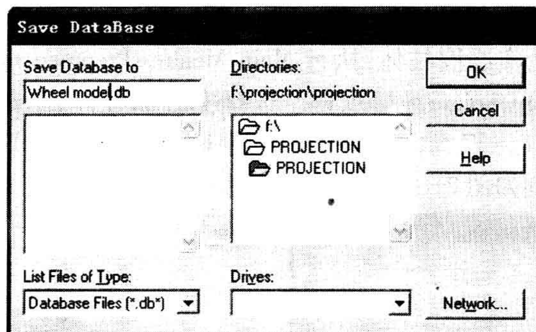


图 21－40　3D 实体模型保存对话框

（13）至此，3D 实体模型建立完毕。

21.2.2　自顶向下建模方法

自顶向下建模是指由 ANSYS 提供的常见的几何形状（如球体、圆柱体、长方体、四边形等），采用搭积木的方式，通过布尔运算完成建模的过程。建模过程中，ANSYS 会自动生成必要的低级图元。图 21－1 的模型采用自顶向下建模方法的实现过程如下：

1．定义工作文件名和工作标题

（1）定义工作文件名：执行 Utility Menu→File→Change Jobname 命令，在弹出的对话框中输入 Wheel Top，选中 New log and error files 复选框，单击 OK 按钮。对话框效果同图 21－17。

（2）定义工作标题：执行 Utility Menu→File→Change Title 命令，在弹出的对话框中输

入 Stress Calculation of Wheel，单击 OK 按钮。对话框效果同图 21-18。

2. 建立3D模型

（1）建立3个圆柱体：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Volumes→Cylinder→By Dimensions 命令，弹出 Create Cylinder by Dimensions 对话框，如图 21-41 所示。在对话框中分别输入以下数据：RAD1 和 RAD2 输入框依次输入 5.5 和 5，Z1 和 Z2 输入框依次输入 -2.5 和 2.5，单击 Apply 按钮；RAD1 和 RAD2 输入框依次输入 5.5 和 7.5，Z1 和 Z2 输入框依次输入 -0.75 和 0.75，单击 Apply 按钮；RAD1 和 RAD2 输入框依次输入 7.5 和 8，Z1 和 Z2 输入框依次输入 -1.5 和 1.5，单击 OK 按钮。执行 Utility Menu→PlotCtrls→Numbering 命令，选中 VOLU 对应的复选框，即显示体编号，生成模型如图 21-42所示。

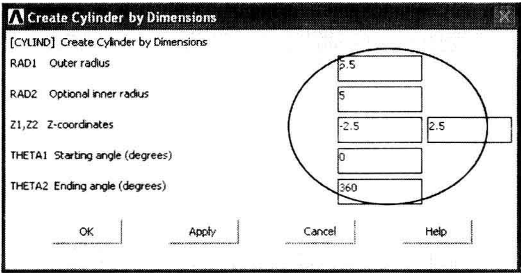


图 21-41 圆柱体创建对话框

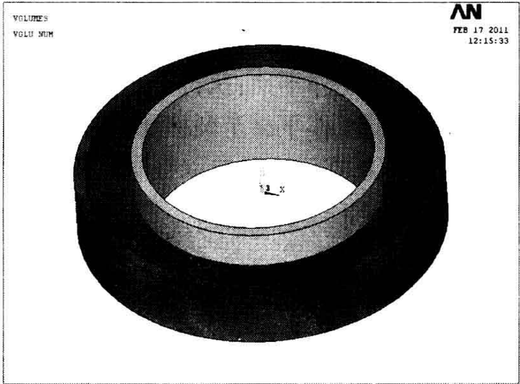


图 21-42 生成体模型图

（2）体相加操作：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Operate→Booleans→Add→Volumes 命令，弹出拾取框，如图 21-43 所示，单击 Pick All 按钮。三个体相加为一个体，相加后的模型如图 21-44 所示。

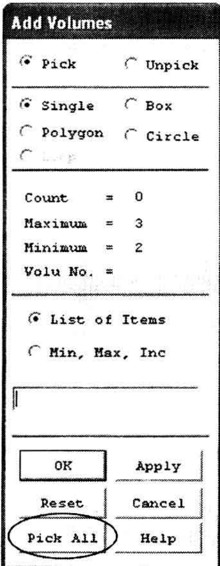


图 21-43 体相加操作对话框

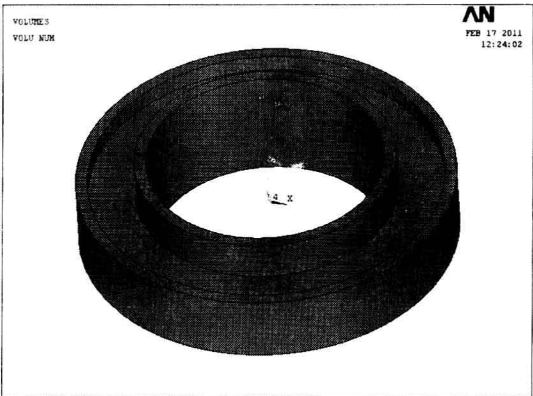


图 21-44 相加后体模型图

（3）压缩体编号操作：执行 Main Menu→Preprocessor→Numbering Ctrls→Compress Numbers 命令，弹出 Compress Numbers 对话框，如图 21－45 所示。在 NUMCMP 下拉框中选择 ALL，即压缩所有元素的编号（关键点、线、面和体等）。

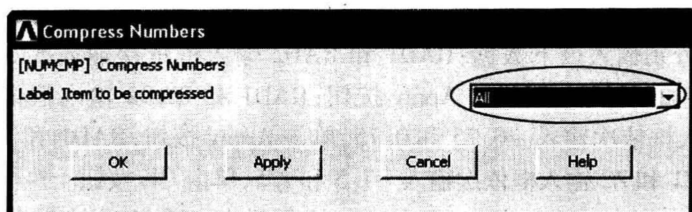


图 21－45　Compress Numbers 对话框

3. 生成圆柱孔

（1）显示工作平面：执行 Utility Menu→WorkPlane→Display Working Plane 命令。

（2）移动工作平面至圆柱孔中心：执行 Utility Menu→WorkPlane→Offset WP to→XYZ Locations 命令，在弹出的拾取框中输入 6.5，0，0，如图 21－46 所示。

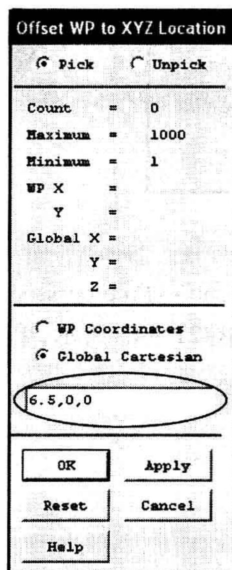


图 21－46　Offset WP to XYZ 拾取框

（4）生成一个实心圆柱体：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Volume→Cylinder→By Dimensions 命令，弹出如图 21－47 所示的 Create Cylinder by Dimensions 对话框。在 RAD1 输入框中输入 0.5，在 Z1 和 Z2 输入框中分别输入 －2 和 2，单击 OK 按钮，生成的模型如图 21－48 所示。

（5）坐标系还原到整体笛卡尔坐标系：执行 Utility Menu→WorkPlane→Align Wp with→Global Cartesian 命令。

（6）坐标系转化为柱状坐标系：执行 Utility Menu→WorkPlane→Change Active CS to→Global Cylindrical 命令（以 Z 轴为旋转轴）。

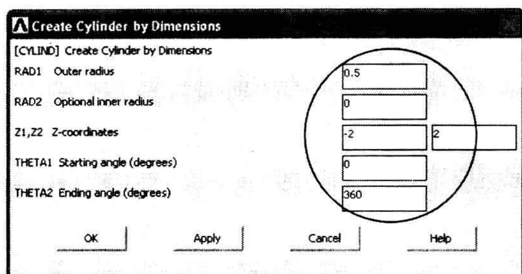


图 21 －47　Create Cylinder by Dimensions 对话框

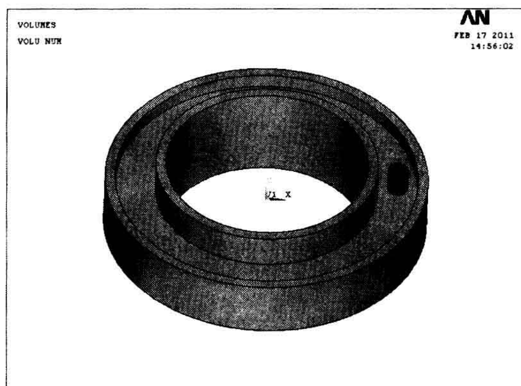


图 21 －48　含圆柱体 3D 实体模型图

（7）阵列生成其余实心圆柱体：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Copy→Volumes 命令，弹出 Copy Volumes 拾取框。选择实心圆柱体，单击 OK 按钮，弹出 Copy Volumes 对话框，如图 21 －49 所示。在输入框中输入以下信息：ITIME 输入 8；DY 输入 45。单击 OK 按钮，得到如图 21 －50 所示的模型。

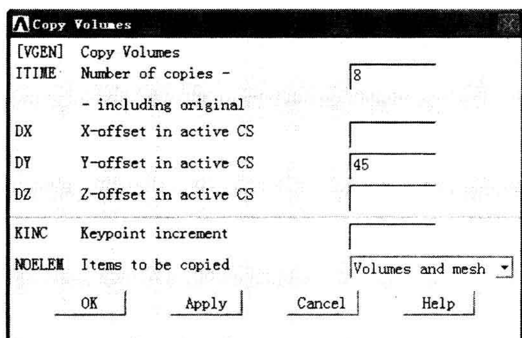


图 21 －49　Copy Volumes 对话框

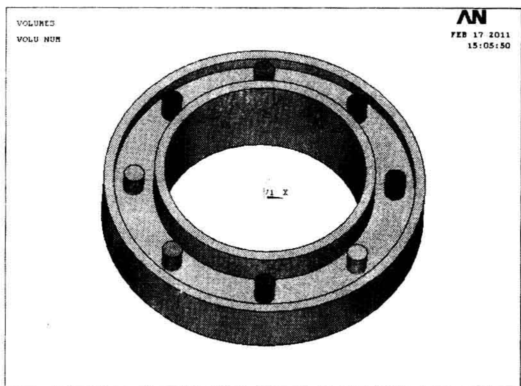


图 21 －50　阵列后 3D 模型图

（8）体相减操作：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Operate→Booleans→Subtract→Volumes 命令，弹出 Subtract Volumes 对话框。拾取编号为 V1 的体，单击 OK 按钮；然后，拾取编号为 V2 ~ V9 的体，单击 OK 按钮，生成的结果如图 21 －51 所示。

（10）关闭体编号显示：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Numbering 命令，弹出 Plot Numbering Control 对话框，清除 Volume Numbers 复选框。

（11）坐标系还原到整体笛卡尔坐标系：执行 Utility Menu→WorkPlane→Change Active CS to→ Global Cartesian 命令。

（12）保存结果文件：执行 Utility Menu→File→Save as 命令，弹出 Save as 对话框。输入 Wheel model Top，如图 21 －52 所示，单击 OK 按钮。

（13）至此，3D 实体模型建立完毕。

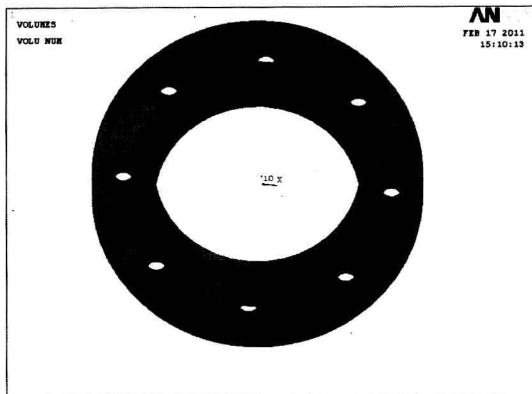


图 21－51　3D 实体模型图

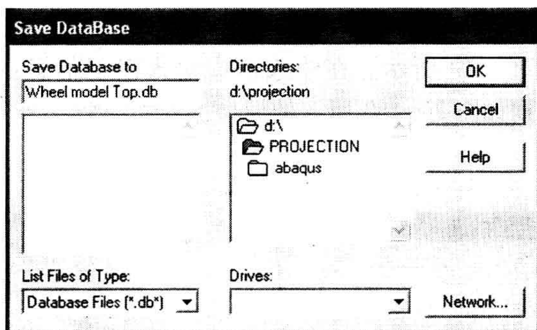


图 21－52　3D 实体模型保存对话框

小结：

由上述几何建模过程可知，各建模方法有其自身的特点和适用范围。实际应用中，可根据各建模方法的优点和实际模型的特征，综合运用各建模方法，以提高建模效率。

1. CAD 模型导入方法

CAD 模型导入方法使工程师可选用熟悉的软件进行建模，特别适用于建立大型装配体和复杂结构模型。同时，该方法避免了对现有 CAD 模型的重复操作，且有利于局部特征的修改和模型参数的调整。

鉴于直接导入的 CAD 模型可能丢失线或面等特征，需要进行较多的模型修补工作。同时，为了提高计算精度和效率，需根据实际需求和有限元建模原则对导入模型的细节特征进行简化处理。

2. ANSYS 实体建模方法

ANSYS 实体建模方法支持 ANSYS 提供的全部几何操作和布尔运算、镜像等诸多建模功能，建模过程中可根据实际需求和有限元建模原则简化模型细节特征，适用于建立庞大或复杂的三维模型。该方法建立的模型可方便地实现几何模型修改、单元类型改变、自适应网格划分和局部细化等功能及结构的优化设计，且不存在模型修补和细节简化等问

题。自底向上建模方法可实现不规则形体、函数曲线和曲面等模型的建立；自顶向下建模方法可方便的建立由基本体素（球体、棱柱体、长方体、面等）组成的物理模型。

该方法的缺点在于对某些小型或简单模型比较繁琐，较直接生成有限元模型法需要更多的数据和大量的 CPU 处理时间；在极少数情况下，还可能产生畸形网格，需进行手动调整。

总之，ANSYS 实体建模方法一般比直接生成方法和 CAD 模型导入法更加便捷、有效和通用，是一般建模的首选方法。

第22章 ANSYS 单元类型和参数设置方法

ANSYS 提供了 190 多种单元供用户根据实际问题的性质和模型特点选择。每种单元都有一个标识单元类型的前缀和一个特定的编号，如 BEAM4、SOLID45、PLANE82 等。前面的字母表示其类型（梁单元、实体单元和板单元）；数字表示其在单元库中的编号，编号越大，说明其加入单元库的时间越晚。

单元类型决定了单元的自由度数、节点个数、空间维数（一维、二维或三维）、实常数和材料属性等内容。同时，多数单元有一些附加选项（KEYOPTs），用于控制单元刚度矩阵生成方式、单元坐标系、结果输出内容、打印输出控制、问题类型控制（平面应力或应变）和单元积分方式等。

22.1 ANSYS 单元类型及常用单元简介

实际应用中的结构形式很多，但总体可归纳为以下 4 类：

（1）质点结构：质量较为集中，体积相对其他部分很小，可忽略不计的结构。

（2）杆件结构：主要由杆件组成，几何特征是横截面尺寸比长度尺寸小很多（如长度/截面最大尺寸 >10），如梁、桁架和管道结构。

（3）板壳结构：也称为薄壁结构，厚度尺寸比长度和宽度尺寸小得多，如平板结构、曲面壳体结构等；

（4）实体结构：结构的长、宽、厚三个尺寸大小相仿。

ANSYS 对应于上述 4 种类型结构提供了大量单元供用户选择。质点结构可采用 Mass21 单元定义；梁结构可选用单元类型标识为 Beam 的单元模拟；桁架结构可选用单元类型标识为 Truss 的单元模拟；管道结构可选用单元类型标识为 Pipe 的单元模拟；板结构可选用 Plane 单元进行模拟；壳结构可选用 Shell 单元进行模拟；实体结构可选用 Solid 单元进行模拟。除此而外，ANSYS 还提供了单元类型标识为 Contac 的单元模拟结构或部件间的接触；单元类型标识为 Combin 的单元模拟弹簧和阻尼特性；单元类型标识为 Hyper 的单元适用于模拟超弹性材料特性等。单元选型过程中，根据实际对象的组成特点（如一维、二维或三维问题，弹塑性问题等），可选用一种或多种类型的单元建立分析模型。

表 22-1 列出了几种 ANSYS 常用的单元类型和特性介绍，便于单元选用。

表 22-1 ANSYS 常用单元及其简介

结构类型	维数	单元名称	单元简介
质点结构	3D	MASS21	6 自由度点单元，包含 x、y、z 方向的 3 个移动自由度和绕 x、y、z 轴的 3 个转动自由度，每个自由度的质量和惯性矩均可分别定义

（续）

结构类型	维数	单元名称	单元简介
梁结构	2D	BEAM3	可承受拉、压和弯曲的二维梁单元，每个节点包含 x、y 方向的 2 个移动自由度和绕 z 轴的转动自由度
	3D	BEAM4	可承受拉、压和弯曲的三维梁单元，每个节点包含 x、y、z 方向的 3 个移动自由度和绕 x,y 和 z 轴的 3 个转动自由度
	2D	BEAM54	弹性变截面非对称梁单元，每个节点包含 x、y 方向的 2 个移动自由度和绕 z 轴的转动自由度。该单元适用于二维变截面和不对称截面梁结构建模，且允许存在应力强化效应
	3D	BEAM188	线性有限应变梁，基于 Timoshenko 梁理论建立，适用于分析细长梁结构。可自定义梁截面形状，允许存在弹性、蠕变和塑性效应
	3D	BEAM189	二次有限应变梁，基于 Timoshenko 梁理论建立，包含切应变效应，适用于分析细长梁结构和存在大转角及非线性大应变的情况，可自定义梁截面形状，允许存在弹性，蠕变和塑性效应
桁架结构	2D	LINK1	线性杆单元，每个节点包含 x、y 方向的 2 个移动自由度，只可承受沿杆方向的拉和压，适用于模拟桁架、链杆和弹簧等
	3D	LINK8	线性杆单元，每个节点包含 x、y、z 方向的 3 个移动自由度，只可承受沿杆方向的拉和压，适用于模拟桁架、垂缆、杆件和弹簧等，允许存在塑性、应力强化、大变形和膨胀等效应
	3D	LINK33	线性热传导杆单元，每个节点包含一个温度自由度
	3D	LINK180	线性杆单元，每个节点包含 x、y、z 方向的 3 个移动自由度，只可承受沿杆方向的拉和压，适用于模拟桁架、垂缆、杆件和弹簧等，允许存在塑性、蠕变、应力强化、应力刚化、大变形和膨胀等效应
管结构	3D	PIPE16	单轴管单元，每个节点包含 x、y、z 方向的 3 个移动自由度和绕 x、y 和 z 轴的 3 个转动自由度，具有拉压、扭转和弯曲性能
	3D	PIPE17	弹性 T 形管单元，每个节点包含沿 x、y 和 z 方向的 3 个移动自由度和绕 x、y 和 z 轴的 3 个转动自由度，包含张力压缩、扭转和弯曲能力，可解决绝缘、流体和腐蚀余度问题
板结构	2D	PLANE2	6 节点三角形板单元，每个节点包含 x、y 方向的 2 个移动自由度，适用于平面应力、平面应变和轴对称问题。该单元具有塑性、蠕变、辐射膨胀、应力刚化等能力
	2D	PLANE42	4 节点板单元，每个节点包含沿 x、y 方向的 2 个移动自由度，适用于平面应力、平面应变和轴对称问题。该单元具有塑性、蠕变、辐射膨胀、应力刚化等能力，支持附加的位移形函数
	2D	PLANE82	8 节点三角形板单元，每个节点包含沿 x、y 方向的 2 个移动自由度，适用于平面应力、平面应变和轴对称问题。该单元具有塑性、蠕变、辐射膨胀、应力刚化等能力，可承受非轴对称载荷

（续）

结构类型	维数	单元名称	单元简介
壳结构	3D	SHELL41	膜壳单元，每个节点包含沿 x、y、z 方向的 3 个移动自由度。平面内具有膜强度但平面外没有弯曲强度
	3D	SHELL63	弹性薄壳单元，每个节点包含沿 x、y、z 方向的 3 个移动自由度和绕 x、y、z 轴的 3 个转动自由度。具有应力刚化和大变形能力
	3D	SHELL 181	弹性壳单元，每个节点包含 x、y、z 方向的 3 个移动自由度和绕 x、y、z 轴的 3 个转动自由度，适用于中等厚度壳结构和复合材料壳结构，具有应力刚化和大变形功能，可自定义截面参数
实体结构	3D	SOLID45	8 节点实体单元，每个节点包含 x、y、z 方向的 3 个移动自由度，具有塑性、蠕变、应力强化、大变形和大应变能力，可实现单元矩阵缩减积分方式计算
	3D	SOLID64	8 节点各向异性实体单元，每个节点包含 x、y、z 方向的 3 个移动自由度，具有应力刚化和大变形能力，可模拟晶体和复合材料等
	3D	SOLID92	10 节点二次实体单元，每个节点包含 x、y、z 方向的 3 个移动自由度，具有塑性、蠕动、膨胀、应力刚化、大变形和大张力的能力

22.2 ANSYS 常用单元的特性参数设置

ANSYS 单元属性包括单元类型、实常数、材料特性、横截面类型和单元坐标系等参数。单元属性的个数和要求依赖于单元类型，并非所有单元都需定义实常数。通常，需要定义实常数的单元包括壳单元、杆单元、梁单元等。本节重点介绍梁单元、壳单元和实体单元的参数设置方法。

22.2.1 梁单元参数设置

该处选用 BEAM4 单元说明梁单元参数的设置。

（1）定义单元类型：执行 Main Menu→Preprocessor→Element Type→Add/Edit/Delete 命令，弹出 Element Type 对话框。单击 Add 按钮，弹出 Library of Element Types 对话框，选择 Beam4 单元，如图 22－1 所示。单击 OK 按钮，退回到 Element Type 对话框。选中 Type 1 BEAM4，如图 22－2 所示。单击 Options 按钮，弹出 BEAM4 element type options 对话框，如图 22－3 所示。通过各选项可设置 BEAM4 单元的应力刚度选项、膜力结果输出、载荷偏移状况等信息。

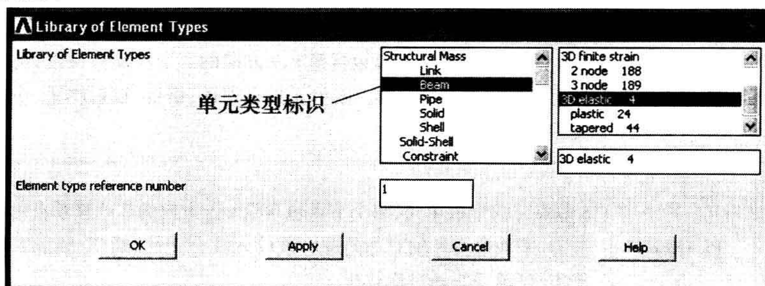


图 22－1　Library of Element Types 对话框

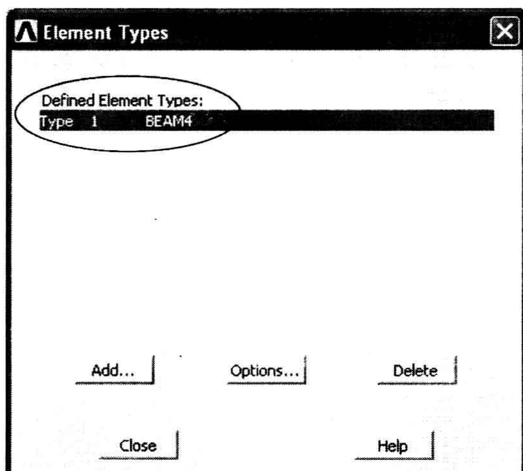


图 22－2　Element Type 对话框

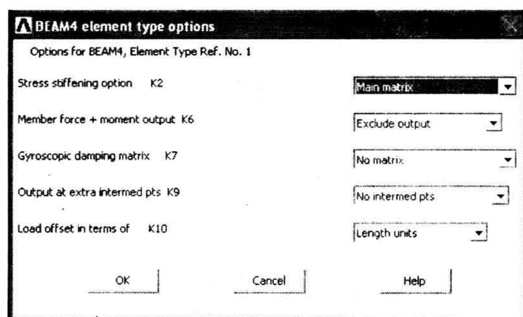


图 22－3　BEAM4 element type options 对话框

（2）定义梁截面实常数：执行 Main Menu→Preprocessor→Real Constants→Add/Edit/Delete 命令，弹出 Real Constants 对话框。单击 Add 按钮，弹出 Element type for Real Constants 对话框，选中 Beam4 单元，如图 22－4 所示。单击 OK 按钮，弹出 Real Constant Set for BEAM4 对话框。输入梁截面的参数，如图 22－5 所示。单击 OK 按钮，完成实常数设置。

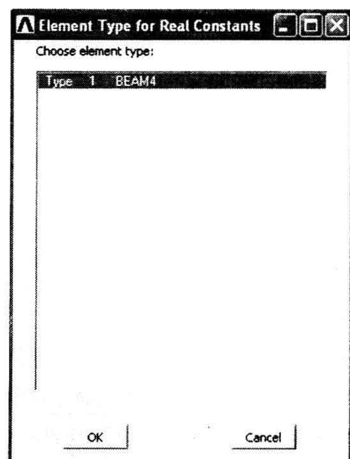


图 22－4　Element type for Real Constants 对话框

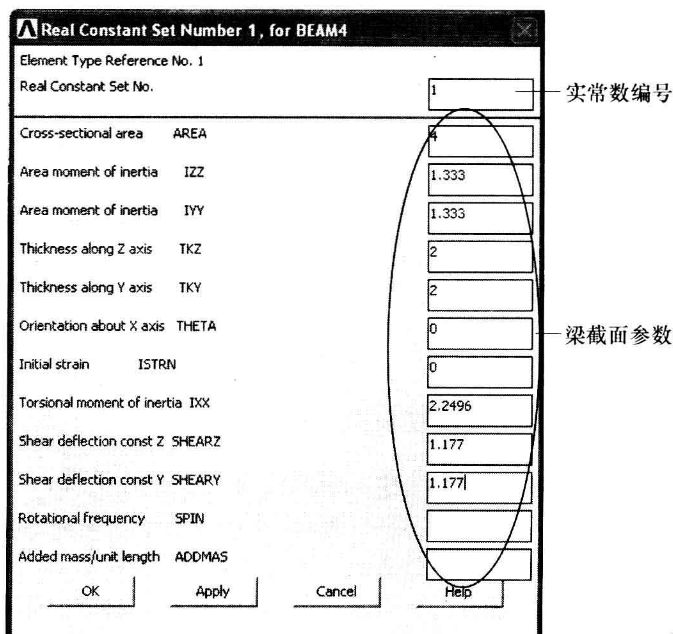


图 22－5　Real Constant Set for BEAM4 对话框

（3）材料参数定义：执行 Main Menu→Preprocessor→Material Props→Material Models 命令，弹出 Define Material Model Behavior 对话框，如图 22－6 所示。双击 Structural→Line-

ar→Elastic→Isotropic 按钮，弹出线弹性各向同性材料参数对话框，输入材料杨氏模量 EX 为 1.93×10^{11}，泊松比为 0.3，如图 22－7 所示。单击 OK 按钮确认。双击 Density 按钮，弹出材料密度定义对话框，输入材料密度为 7800，如图 22－8 所示。单击 OK 按钮确认。

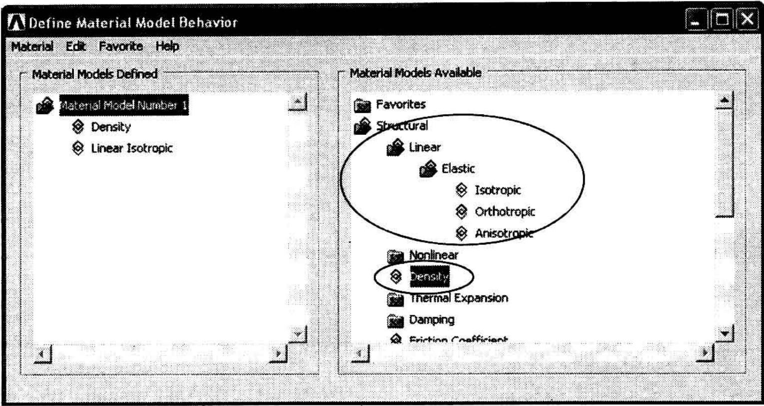


图 22－6　Define Material Model Behavior 对话框

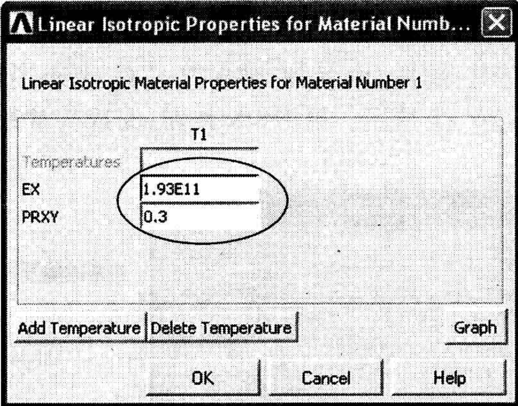


图 22－7　Linear Isotropic Properties for Material 对话框

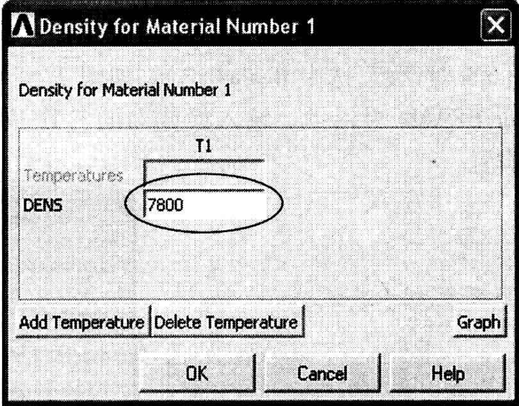


图 22－8　Density for Material 对话框

（4）至此，梁单元参数设置完毕。

22.2.2　壳单元参数设置

该处选用 SHELL63 单元说明壳单元参数的设置。

（1）定义单元类型：执行 Main Menu→Preprocessor→Element Type→Add/Edit/Delete 命令，弹出 Element Type 对话框。单击 Add 按钮，弹出 Library of Element Types 对话框，选择 Shell63 单元，如图 22－9 所示。单击 OK 按钮，退回到 Element Type 对话框。选中 Shell63，单击 Options 按钮，可设置 Shell63 单元的单元刚度、附加位移函数、结果输出等信息。

（2）定义壳单元实常数：执行 Main Menu→Preprocessor→Real Constants→Add/Edit/Delete 命令，弹出 Real Constants 对话框。单击 Add 按钮，弹出 Element type for Real Constants 对话框，选中 Shell63 单元，单击 OK 按钮，弹出 Real Constant Set for SHELL63 对话框。输入梁截面的参数，如图 22－10 所示。单击 OK 按钮，完成实常数设置。

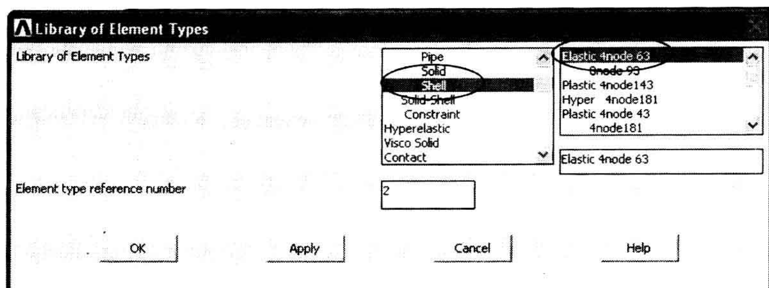


图 22－9 Library of Element Types 对话框

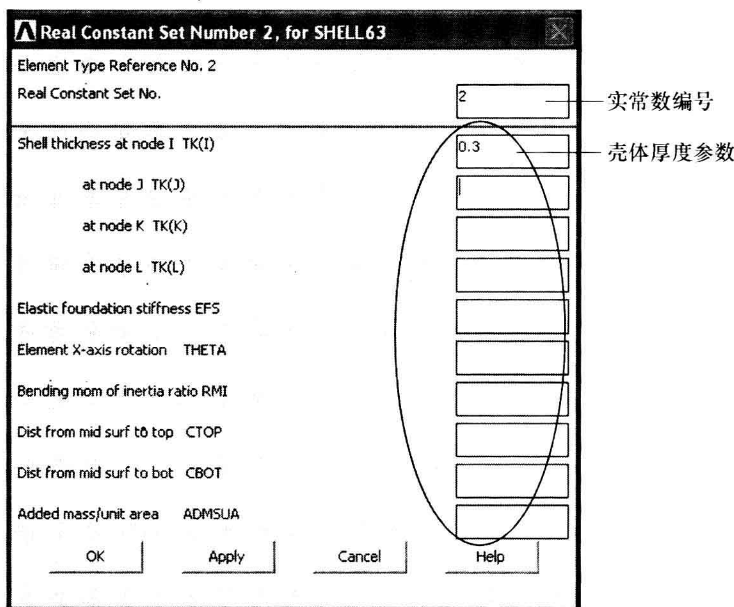


图 22－10 Real Constant Set for SHELL63 对话框

（3）材料参数定义：同 22.2.1 分节。

（4）至此，壳单元参数设置完毕。

22.2.3 实体单元参数设置

该处选用 SOLID45 单元说明实体单元参数的设置。

（1）定义单元类型：执行 Main Menu→Preprocessor→Element Type→Add/Edit/Delete 命令，弹出 Element Type 对话框。单击 Add 按钮，弹出 Library of Element Types 对话框，选择 SOLID45 单元，如图 22－11 所示。单击 OK 按钮，退回到 Element Type 对话框。选中 SOLID45，单击 Options 按钮，可设置 SOLID45 单元的单元积分方式、附加单元结果输出等信息。

（2）定义实常数：鉴于实体单元无需定义实常数，故该步骤可忽略。

（3）材料参数定义：同 22.2.1 分节。

至此，实体单元参数设置完毕。

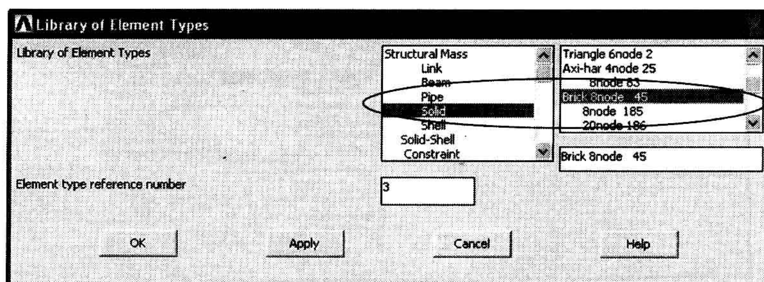


图 22－11　Library of Element Types 对话框

第23章　ANSYS网格划分及模型检查

在ANSYS中,有限元网格可以由程序自动生成,用户可通过指定某些参数对程序进行宏观控制;也可以由用户自定义节点和单元信息,生成有限元模型。网格划分时,应做到由简单到复杂,先整体后局部,2D单元和3D单元合理搭配使用。为了提高求解的效率和结果的精度,要充分利用结构的重复、对称和反对称等特征,采用子结构或局部模型进行分析。

ANSYS主要包括四种分网方法:自由分网、映射分网、扫掠分网和自适应分网。自由分网方法由ANSYS自动生成网格,可通过单元数量、边长及曲率等来控制网格的质量,适用于任意曲线、曲面和实体结构的网格划分,不受单元形状的限制。映射分网方法适用于形状规则或处理后形状规则的曲面和实体,可选用的单元形状包括三角形、四边形和六面体。同时,可通过指定单元边长、网格数量等参数对分网效果进行严格控制。扫掠分网方法适用于通过拉伸、旋转或扫掠方式生成的规则和不规则的实体结构,可选用的单元形状包括五面体和六面体。实际应用过程中,可根据模型特点自由组合三种分网方法,以获得较高质量的网格。

自适应分网完全由程序自动地生成有限元网格,根据分析和估算的网格离散误差,重新定义网格大小和网格细化,再次进行分析计算、估计网格的离散误差,直至计算误差低于用户定义值或达到用户定义的求解次数。ANSYS自适应分网仅适用线性静力分析和线性稳态热分析,且分网单元必须支持误差计算功能。分析过程的网格误差估计是根据平均节点应力计算,难以获得不同材料过渡位置的结果,故模型最好只使用一种材料。鉴于自适应网格划分方法存在诸多限制,该处仅介绍前三种分网方法的实现过程。

23.1　ANSYS自由分网方法

ANSYS自由分网方法没有特定的准则,对单元形状和结构形式没有任何限制,可适用于所有的模型。缺点在于自由分网方法生成的单元形状不规则,内部节点位置由程序自动生成,用户无法控制。

该处选用图21-39的实体模型说明ANSYS自由分网方法的基本步骤。

(1)读取图21-39的实体模型:执行Utility Menu→File→Resume from命令,弹出Resume Database对话框。选择Wheel model.db文件,单击OK按钮,读入实体模型。

(2)由22.2.3分节内容建立材料参数模型和实体单元。

(3)定义单元尺寸参数。ANSYS提供了两种方式定义单元尺寸信息:智能尺寸定义方式和人工指定单元大小方式。具体的设置方法描述如下:

①智能尺寸定义方式:ANSYS提供了基本控制和高级控制两种方式。基本控制只需要定义网格尺寸的等级,可选范围为1级(精细)到10级(粗略)。执行Main Menu→Pre-

processor→Meshing→Size Cntrls→SmartSize→Basic 命令,弹出 Basic SmartSize Settings 对话框,可选择需要的等级,如图 23 - 1 所示;执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→MeshTool,弹出 MeshTool 对话框,也可设置基本控制的等级,如图 23 - 2 所示。

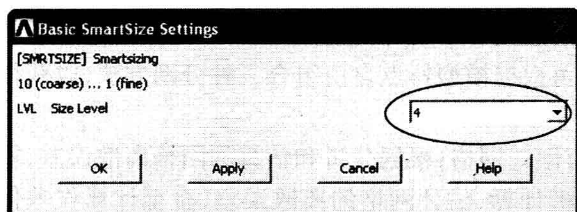


图 23 - 1 Basic SmartSize Settings 对话框

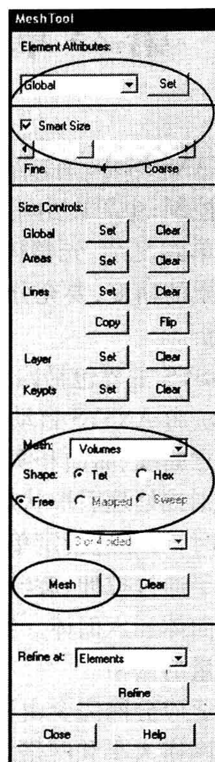


图 23 - 2 MeshTool 对话框

高级控制方式可实现整体单元大小、网格扩展因子、网格过渡因子、曲线上低阶和高阶单元最大限制角、空洞粗化参数、表面近似细化参数等信息的设置。执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Size Cntrls→SmartSize→Adv Opts 命令,弹出 Advaned SmartSize Settings 对话框,如图 23 - 3 所示。

设定智能尺寸后,网格划分器对需要分网的面或体上的所有线估算其单元边长大小和分布情况。同时,对几何体上弯曲区域的线进行细化,自动生成合理形状的单元和布局。

② 人工指定单元大小方式:执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Size Cntrls→ManulSize→Global→Size 命令,弹出 Global Element Sizes 对话框,可设置单元的边长和每条线的段数(仅当边长信息未设置时起作用),如图 23 - 4 所示。

该处选用智能尺寸定义方式,定义模型的单元信息为基本控制方式的 4 级。

(4) 网格划分:执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→MeshTool,弹出 MeshTool 对话框,选择离散对象为 Volumes(体),单元形状为 Tet(四面体单元)和 Free(自由网格划分),如图 23 - 2 所示。单击 Mesh 按钮,弹出实体选取对话框,选择生成的实体模型,程序将自动完成网格划分,如图 23 - 5 所示。

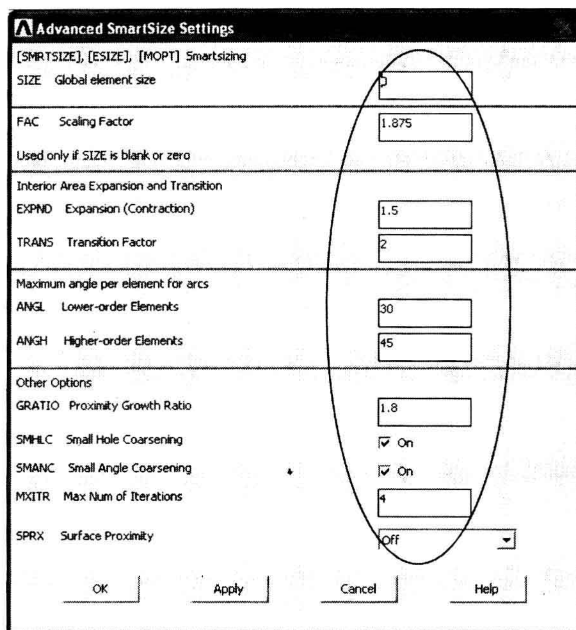


图 23－3　Advaned SmartSize Settings 对话框

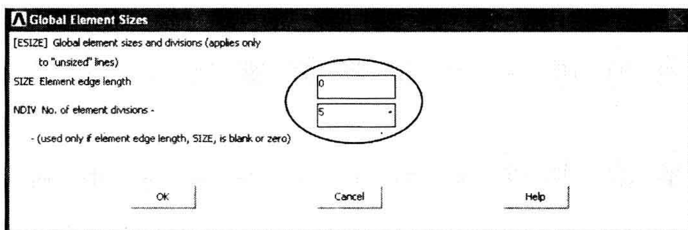


图 23－4　Global Element Sizes 对话框

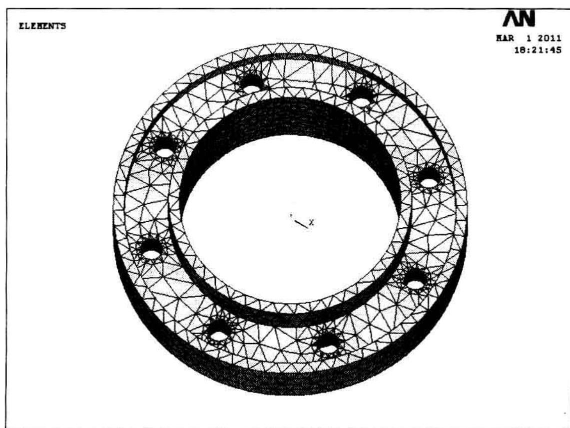


图 23－5　自由分网方式效果图

至此，完成了 ANSYS 对三维结构的自由网格划分。

23.2 ANSYS 映射分网方法

ANSYS 映射分网方法仅适用于形状规则或者处理(如切割、连接等方法)后形状规则的体或面,且映射面网格包含三角形或四边形单元,映射体网格只包含六面体单元。映射分网方法生成的单元形状比较规则,用户可控制内部节点的位置。

面模型和实体模型采用 ANSYS 映射分网方法的实现过程详述如下:

23.2.1 面模型采用 ANSYS 映射分网方法的实现过程

鉴于上述实体模型较为复杂,难以应用映射分网方法。故该处建立如下的简化模型描述映射分网的实现过程。

(1) 建立如图 23-6 所示的面模型。

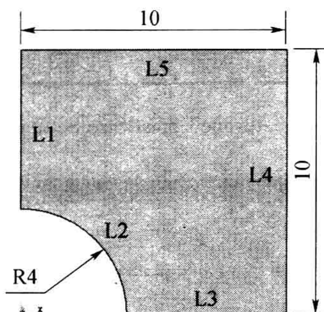


图 23-6 映射分网的面模型

(2) 定义单元类型为 PLANE42。同时,通过单元特性选项定义问题为平面应力问题,且需要指定模型厚度,如图 23-7 所示。

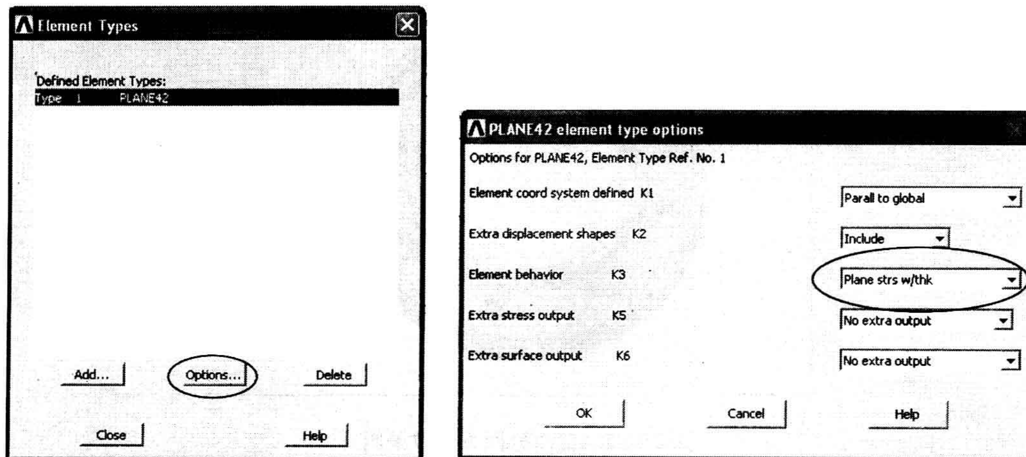


图 23-7 PLANE42 单元及选项定义

(3) 通过实常数选项定义板的厚度为0.3,如图23-8所示。

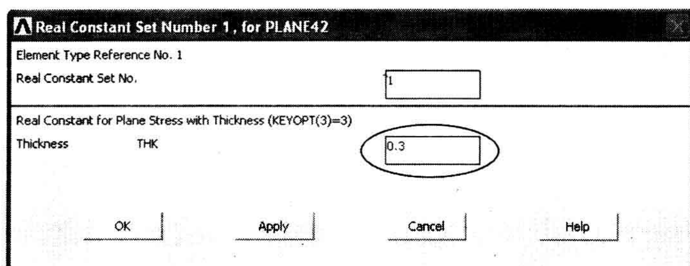


图23-8　定义板厚度为0.3

(4) 定义板的材料特性,如图23-9所示。

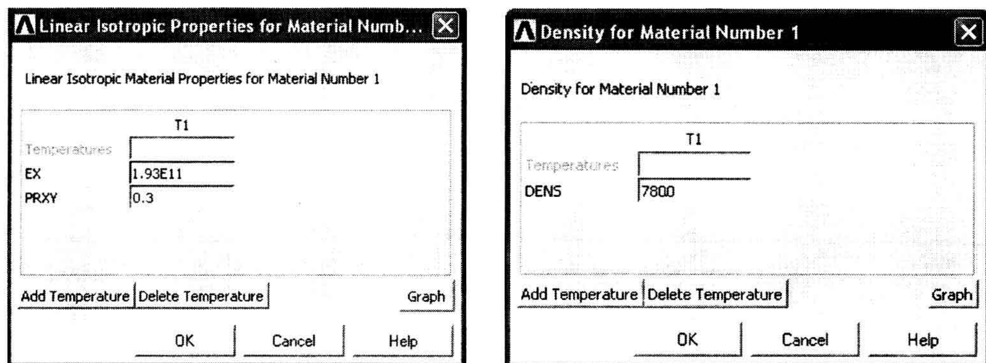


图23-9　定义材料特性参数

(5) 鉴于模型为非规则形体,无法直接使用映射分网方法。故需通过连接线方式,将模型处理为规则形体。

执行Main Menu→Preprocessor→Meshing→Concatenate→Lines命令,弹出线拾取框,选择图23-6中的线L4和L5,单击OK按钮确认。说明:Concatenate命令并非将两条线合并成一条,而是将两条线视为一条线,便于映射网格划分,不改变原有线的编号。

(6) 定义单元长度为0.5:执行Main Menu→Preprocessor→Meshing→Size Cntrls→ManulSize→Global→Size命令,弹出Global Element Sizes对话框,输入单元边长为0.5,如图23-10所示。

(7) 映射网格划分:执行Main Menu→Preprocessor→Meshing→MeshTool,弹出MeshTool对话框。选择四边形单元和映射网格划分方法,如图23-11所示。单击Mesh按钮,弹出拾取框,选择生成的面,即可完成面的映射网格划分,如图23-12所示。该模型采用自由分网方法生成的模型如图23-13所示。

至此,完成了ANSYS对面的映射网格划分。

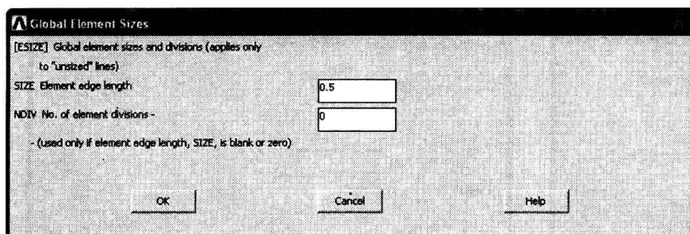


图 23 - 10　单元边长为 0.5

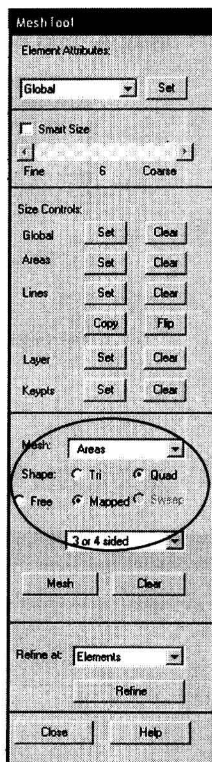


图 23 - 11　映射分网方法参数设置图

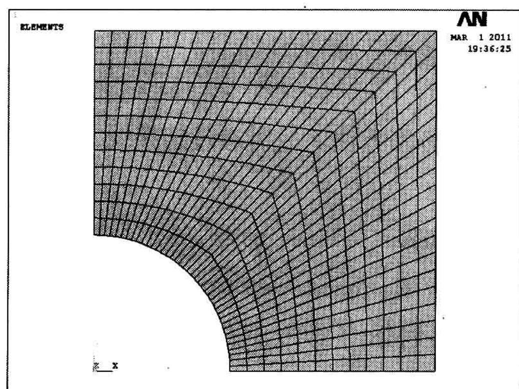


图 23 - 12　映射分网方法生成的面网格

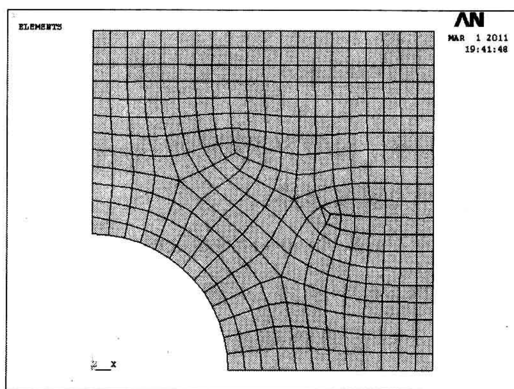


图 23 - 13　自由分网方法生成的网格

23.2.2　实体模型采用 ANSYS 映射分网方法的实现过程

（1）建立如图 23 - 14 所示的实体模型。

（2）由 22.2.3 分节内容建立材料参数模型和定义实体单元类型为 SOLID45。

（3）鉴于模型为非规则形体，无法直接使用映射分网方法。首先，通过工作平面切割体为两部分。而后，连接相应的面，使模型处理为规则形体。

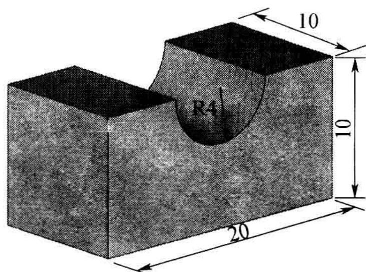


图 23－14　用于映射分网的实体模型

① 移动工作平面至(5,0,0)处:执 Utility Menu→WorkPlane→Offset WP to→XYZ Locations 命令,弹出位置拾取框,在输入栏中输入坐标位置(5,0,0),如图 23－15 所示。单击 OK 按钮确认。

② 旋转工作平面使 XY 工作平面垂直于需切割的实体:执 Utility Menu→WorkPlane→Offset WP by Increments 命令,弹出工作平面偏移对话框,增加转角控制滑动块至 90 度位置,单击正 Y 轴方向,如图 23－16 所示。单击 OK 按钮确认。

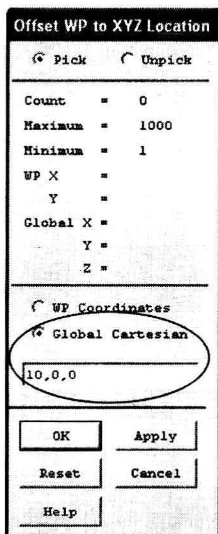


图 23－15　Offset WP to Location 拾取框

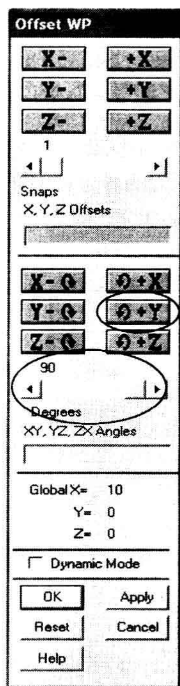


图 23－16　Offset WP 对话框

③ 使用工作平面切割实体:执 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Operate→Booleans→Divide→Volu by WorkPlane 命令,弹出实体拾取对话框,选择生成的实体,单击 OK 按钮确认,生成的模型如图 23－17 所示。

④ 将工作平面恢复至整体笛卡尔坐标系位置:执 Utility Menu→WorkPlane→Align WP with→Global Cartesian 命令。

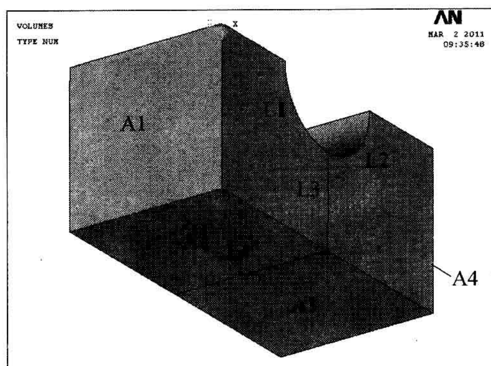


图 23 - 17　切割后模型图

⑤ 连接面使两个体分别构成规则形体：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Concatenate→Areas 命令，弹出面拾取框，选择图 23 - 17 中的面 A1 和 A2，单击 Apply 按钮确认；选择面 A3 和 A4，单击 OK 按钮确认。

（4）定义单元大小：鉴于映射分网方法离散的模型具有对称性，只需指定部分线的离散方式即可。执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→MeshTool 命令，弹出 MeshTool 对话框。单击 Lines→Set 按钮，如图 23 - 18 所示，弹出线拾取框。选择图 23 - 17 的 L1，单击 Apply 按钮确认，弹出 Element Size on Picked Lines 对话框，输入 L1 的段数为 24，如图 23 - 19 所示。单击 Apply 按钮确认，弹出线拾取框。根据上述实现过程，依次设置 L2 为 24 段，L3 为 18 段，L4 为 20 段。

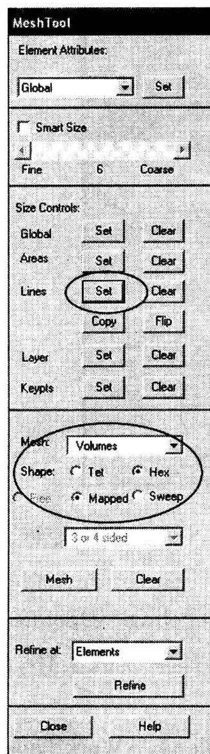


图 23 - 18　MeshTool 对话框

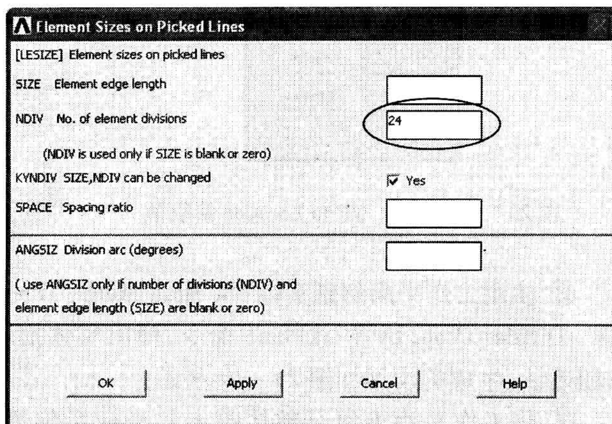


图 23 - 19　Element Size on Picked Lines 对话框

（5）映射网格划分：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→MeshTool，弹出 MeshTool 对话框。选择六面体单元和映射网格划分方法，如图 23－18 所示。单击 Mesh 按钮，弹出拾取框，选择生成的体，即可完成体的映射网格划分，如图 23－20 所示。

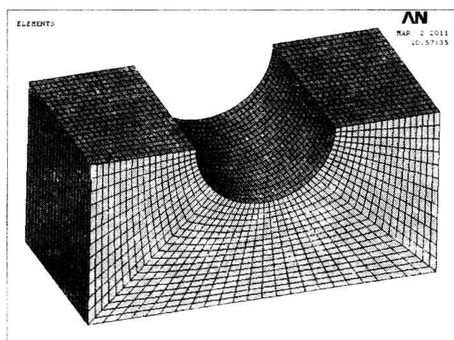


图 23－20　3D 结构映射网格划分效果图

至此，完成了 ANSYS 对 3 维结构的映射网格划分。

23.3　ANSYS 扫掠分网方法

ANSYS 扫掠分网方法可从一个面（源面）将网格扫掠贯穿整个体形成体单元。如果源面网格为四边形网格，体将生成六面体网格；如果源面为三角形网格，体将生成五面体单元；如果源面由三角形和四边形单元共同组成，则体将由五面体单元和六面体单元共同组成。该方法可用于不规则实体结构生成五面体或六面体网格，源面和目标面不必是平面或平行面，只要保证源面和目标面的拓扑结构相同即可。

实体模型采用 ANSYS 扫掠分网方法的实现过程详述如下：

（1）建立如图 23－21 所示的体模型。

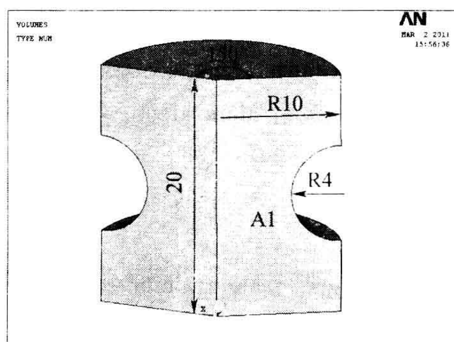


图 23－21　扫掠分网的体模型

（2）由 22.2.3 分节内容建立材料参数模型和定义实体单元类型为 SOLID45。

（3）定义 MESH200 单元用于生成 2 维面网格，指定单元选项为 QUAD 4－NODE，如图 23－22 所示。说明：MESH200 单元仅用于产生网格，对求解无影响，适用于产生辅助的一维、二维或三维网格。

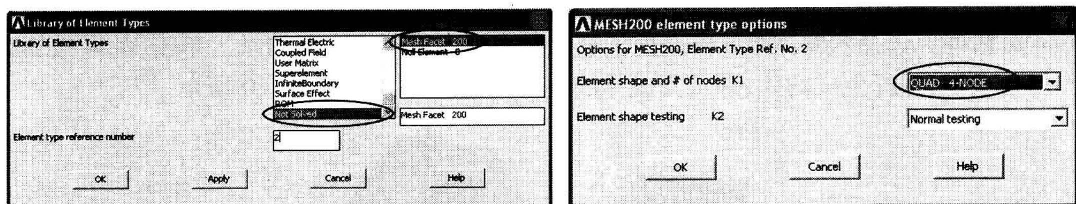


图 23－22　MESH200 单元及特性定义

(4) 选择单元类型为 MESH200：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Mesh Attributes→Default Attribs 命令，弹出 Meshing Attributes 对话框，选择 MESH200 单元，如图 23－23 所示。

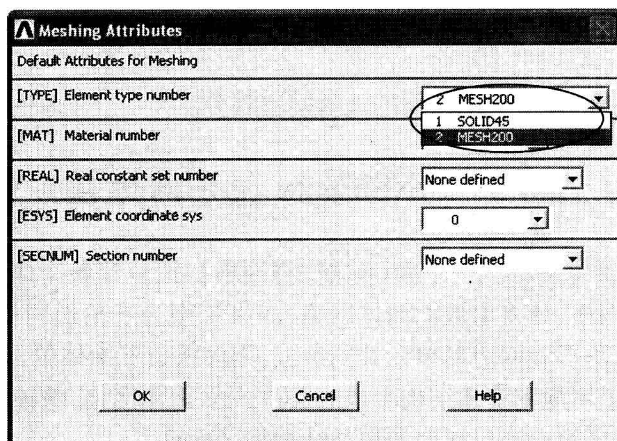


图 23－23　Meshing Attributes 对话框

(5) 定义单元长度为 0.5：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Size Cntrls→ManulSize→Global→Size 命令，弹出 Global Element Sizes 对话框，输入单元边长为 0.5。

(6) 自由分网方法生成面网格：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→MeshTool 命令，弹出 MeshTool 对话框。选择四边形单元和自由网格划分方法，如图 23－24 所示。单击 Mesh 按钮，弹出拾取框，选择图 23－21 中的面 A1，单击 OK 按钮确认，即可完成面的自由网格划分，如图 23－25 所示。

(7) 选择单元类型为 SOLID45：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Mesh Attributes→Default Attribs 命令，弹出 Meshing Attributes 对话框，选择 SOLID45 单元。

(8) 扫掠生成体网格：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→MeshTool 命令，弹出 MeshTool 对话框。选择分网对象为体，离散单元为六面体或五面体单元，指定扫掠网格划分方法，且人工选择目标面和源面方式，如图 23－26 所示。单击 Sweep 按钮，弹出拾取框，选择生成体模型，单击 OK 按钮确认；弹出源面选择拾取框，选择图 23－25 中的源面 A1，单击 OK 按钮确认；弹出源面选择拾取框，选择图 23－25 中的目标面 A2，完成扫掠网格划分，如图 23－27 所示。

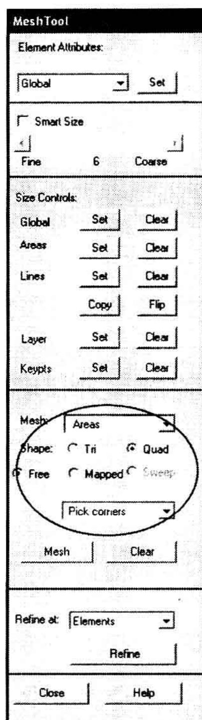


图 23 – 24　MeshTool 对话框

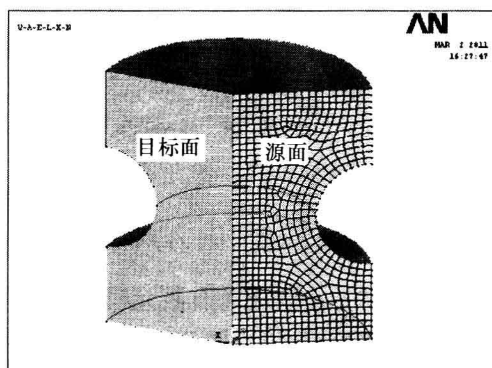


图 23 – 25　面自由网格划分效果图

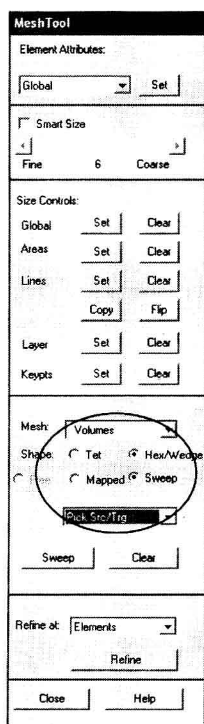


图 23 – 26　MeshTool 对话框

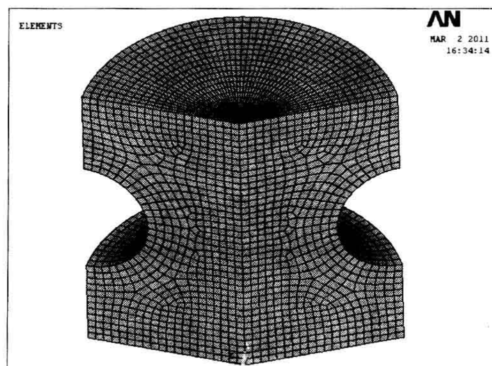


图 23 – 27　实体扫掠网格划分效果图

至此，完成了 ANSYS 扫掠分网的过程。

23.4 ANSYS 单元形状和网格有效性检查

有限元模型的单元质量和数量对求解结果和效率影响很大。如果单元全部由规则或近似规则的形状（等边三角形、正方形、正四面体、立方六面体等）构成，则求解结果十分接近真实结果。但由于实际结构形状各异，且存在凸台、凹槽、空洞等局部特征，难以完全离散为规则形状的单元。因此，如何有效的评估网格质量，并对质量较差部分的网格进行细化或调整具有重要的意义。

鉴于单元形状的评价没有通用和绝对的标准。因此，实际应用中，建议用户尝试使用多种单元和不同的网格划分方法进行计算，对比分析各种计算结果。同时，结合理论分析的定性结果，给出合理的评价。ANSYS 提供的单元质量评价指标主要包括单元的长宽比、扭曲度、雅克比比率、尖角、锥角等。

23.4.1 单元检查信息输出方式设置

采用实体建模方法生成的有限元模型与几何实体模型之间存在紧密的联系。ANSYS 通过模型相互对照检查，可以防止实体模型数据与有限元模型数据发生混乱。执行 Main Menu→Preprocessor→Checking Ctrls→Model Checking 命令，弹出 Model Checking Controls 对话框，可以根据分析需要设置有限元模型与几何实体模型间检查的方式，如图 23－28 所示。

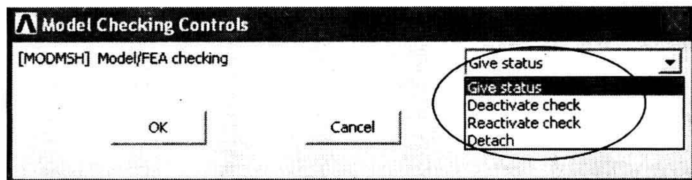


图 23－28 Model Checking Controls 对话框

单元形状检查信息输出方式设置：执行 Main Menu→Preprocessor→Checking Ctrls→Shape Checking 命令，弹出 Shape Checking Controls 对话框，可以根据分析需要设置检查信息的输出方式，如图 23－29 所示。

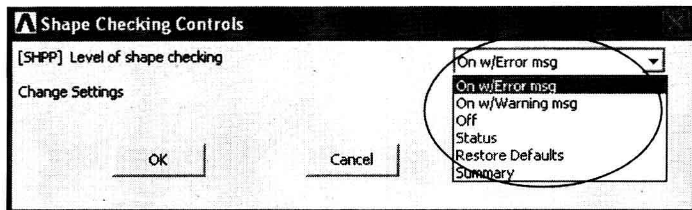


图 23－29 Shape Checking Controls 对话框

单元形状检查内容设置：执行 Main Menu→Preprocessor→Checking Ctrls→Toggle Checks 命令，弹出 Toggle Shape Checks 对话框，可以根据分析的需要选定检查的项目，如图 23－30 所示。

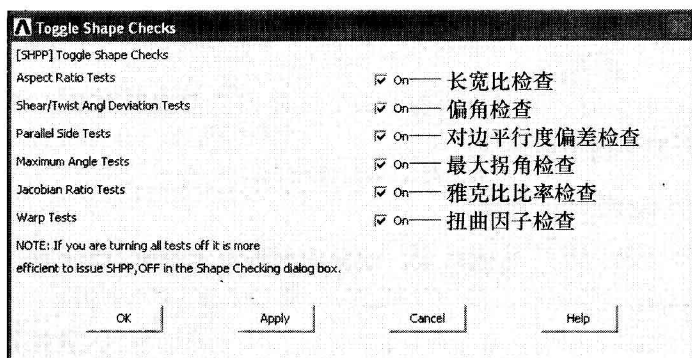


图 23－30　Toggle Shape Checks 对话框

23.4.2　单元形状和连接有效性检查

ANSYS 提供了图形显示方式检查网格的质量：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Check Mesh→Individual Elm→Plot Warning/Error Elements 命令，弹出 Plot Warning/Error Elements 对话框，如图 23－31 所示。选中需要显示的单元（正常单元以蓝色显示，警告单元以黄色显示，错误单元以红色显示）对应的复选框，单击 OK 按钮确认，各单元将以不同颜色显示，如图 23－32 所示。

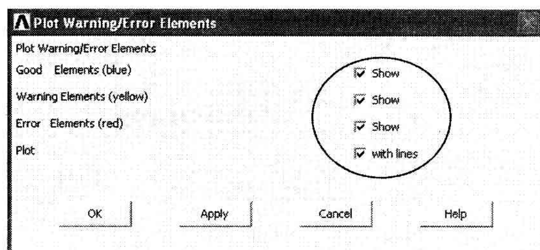


图 23－31　Plot Warning/Error Elements 对话框

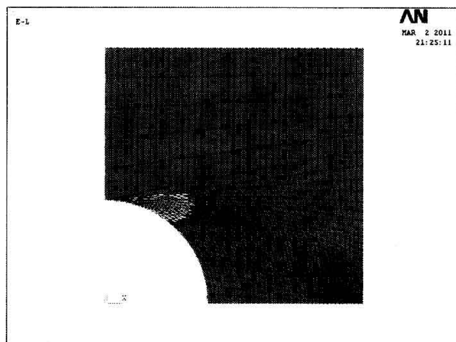


图 23－32　错误和警告单元显示效果图

选择警告/错误单元：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Check Mesh→Individual Elm→Select Warning/Error Elements 命令，将选中所有的警告和错误单元，用户可通过列表显示各警告和错误单元的信息及组成。

检查单元连接有效性：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Check Mesh→Connectivity→Ck Connectvty 命令，将检查单元的连接特性。

选择有误和存在问题的单元连接：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Check Mesh→Connectivity→Sel Bad Connt 命令，将选中所有有误和存在问题的单元连接，用户可通过列表显示相关的信息。

23.5　ANSYS 网格修改和重新生成

对于已经划分网格的模型,若用户想获得局部应力集中或感兴趣区域更为准确的解,需对局部网格进行细化或重新生成。

23.5.1　ANSYS 网格局部细化

ANSYS 提供了节点、单元、关键点、线、面和所选择单元附近区域的网格细化功能。

执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Modify Mesh→Refine At→Nodes (Elements, Keypoints, Lines, Areas, All)命令,弹出相应对象的拾取框,选择需要细化的对象并输入控制参数,单击 OK 按钮确认即可。以节点附近区域细化为例,弹出 Refine Mesh at Node 对话框,如图 23-33 所示。ANSYS 提供了五个等级用于局部细化,用户可以通过 LEVEL 参数值定义细化的程度。1 表示最小程度的细化,细化区域得到的单元边长约为原单元边长的 1/2;5 表示最大程度的细化,细化区域得到的单元边长约为原单元边长的 1/9。注意:局部网格细化后,总是在细化区域产生较小网格,不能实现粗化。

若选中 Refine Mesh at Node 对话框中的 Advanced options 选项,单击 OK 按钮确认后,弹出高级选项对话框,如图 23-34 所示。通过 DEPTH 值可指定网格细化深度,默认情况只对所选图元外面的一个单元进行细化。通过 POST 值来指定细化区域的后处理操作方式:Off 为对细化区域不进行任何处理;Clearup + Smooth 为对细化区域进行光滑和清理处理;Smooth 为对细化区域只进行光滑处理。RETAIN 值用于指定细化网格是否保持四边形单元:RETAIN = ON,则对于全部为四边形的网格,网格细化时,细化单元全部采用四边形单元;RETAIN = OFF,在细化区域可能引入三角形单元。图 23-35 和图 23-36 给出了模型细化前后的效果。细化参数为:LEVEL = 2,DEPTH = 2;POST = Clearup + Smooth ,RETAIN = ON。

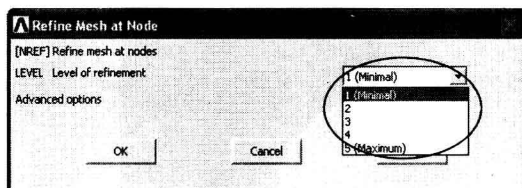


图 23-33　Refine Mesh at Node 对话框

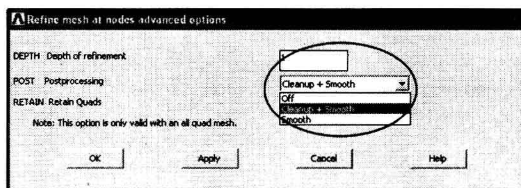


图 23-34　Refine Mesh at Node advanced options 对话框

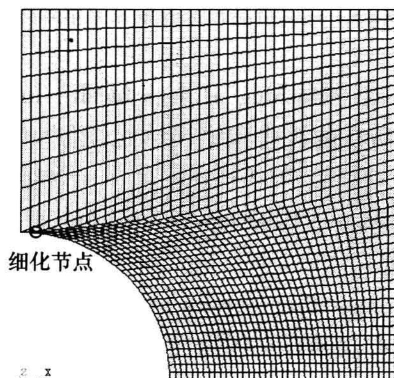


图 23-35　细化前模型

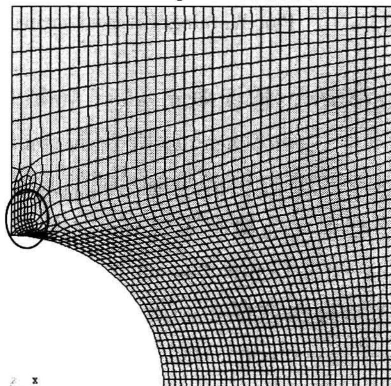


图 23-36　细化后模型

局部细化存在以下限制：

（1）由非四面体单元组成的体网格不能进行局部细化。

（2）若待细化区域内包含接触单元、梁单元或表面单元，则不能进行局部细化。

（3）若载荷直接施加在模型的节点或单元上，则不能进行局部细化。

（4）若模型中存在约束方程或节点上施加有初始条件，则不能进行局部细化。

23.5.2 ANSYS 网格改进和清除

ANSYS 提供了改进实体内部四面体单元质量的功能：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Modify Mesh→Improve Tets→Volumes 命令，弹出体拾取框，选择需要改进网格的体，单击 OK 按钮确认即可。

ANSYS 还提供了清除关键点、线、面和体上网格的功能：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Clear→Keypoints（Lines，Areas，Volumes）命令，弹出相应对象的拾取框，选择需要清除网格的对象，单击 OK 按钮确认即可。清除关键点、线、面和体上的网格以后，可重新指定线的分段方式和尺寸大小，便于后续的映射网格划分等功能。

第24章 ANSYS加载设置和求解技术

在ANSYS中,边界条件包括位移边界条件、载荷边界条件、热边界条件等。不同类型的分析施加的边界条件也有所差异,可以归结为以下6类:

(1)自由度约束(DOF constraint):用于定义强制边界条件,消除矩阵的奇异性。如结构分析中的强制位移、热分析中的温度约束等。

(2)集中载荷(Force):施加于节点或关键点上的载荷。如结构分析中的集中力和力矩、热分析中的热流密度等。

(3)分布载荷(Pressure):施加于单元、线和面上的载荷。如结构分析中的压力、热分析中的热通量等。

(4)体载荷(Body load):包括体积力和场载荷。如结构分析中的重力、热分析中的热生成率等。

(5)惯性载荷(Inertia loads):由单元质量和加速度引起的载荷。主要应用于结构分析,如由角加速度和角速度引起的惯性载荷。

(6)耦合场载荷(Coupled - field loads):包括初应力载荷、耦合场转化载荷等。

同时,ANSYS提供了表格载荷、函数载荷、常值载荷、梯度载荷等多种载荷定义方式和载荷缩放、传递、叠加和替换等高级操作,可以方便地描述工程应用中的各种情况。

24.1 ANSYS软件常用边界条件和施加方法

在ANSYS中,边界条件可以施加在实体模型(如关键点、线和面)或有限元模型(单元和节点)上。无论采用何种加载方式,ANSYS求解前都将边界条件转化到有限元模型上。实体模型加载操作较为简单,且不受网格清除、重新划分或局部修改的影响;有限元模型上直接施加载荷时,位置明确,不必担心约束扩充和缩减分析中产生的问题。实体模型和有限元模型加载具有各自的优点和缺点,用户可根据具体情况合理选用。该处以结构分析中常用的边界条件和图5 -20所示的模型为实例,说明ANSYS中边界条件施加的过程。

24.1.1 施加自由度约束

1. 施加位移约束

(1)建立如图23 -20所示的模型。

(2)在顶端两个面施加位移约束:执行Main Menu→Solution→Define Loads→Apply→Structural→Displacement→On Areas命令,弹出面拾取框,选择顶端两个面,单击OK按钮确认。弹出“Apply U,ROT on Areas”对话框,如图24 -1所示。通过Lab2选择需要约束的自由度,通过VALUE可定义该自由度的值,默认为0。单击OK按钮确认,完成位移约束的施加,同时在模型上显示约束的符号,如图24 -2所示。

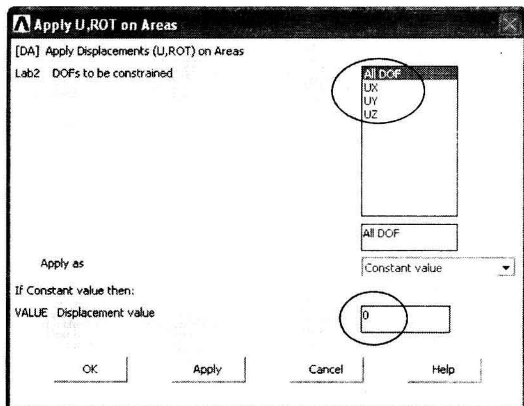


图 24－1　Apply U,ROT on Areas 对话框

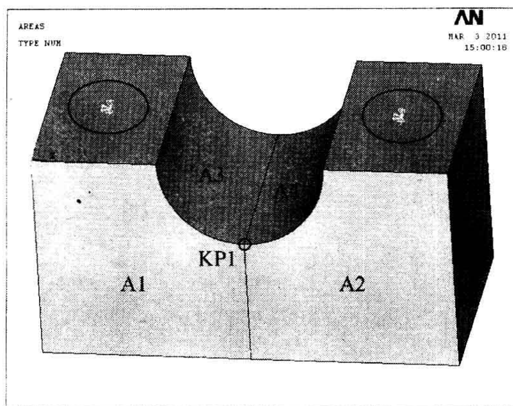


图 24－2　施加位移约束后模型效果图

2. 在 A1 面的所有节点上施加对称约束

（1）选择 A1 面：执 Utility Menu→Select→Entities 命令，弹出 Select Entities 对话框。选择对象为面，通过编号/选取方式获得，如图 24－3 所示，单击 OK 按钮确认。弹出面拾取框，选择 A1 面，单击 OK 按钮确认。

（2）选择 A1 面上所有节点：执 Utility Menu→Select→Entities 命令，弹出 Select Entities 对话框。选择对象为 Nodes，附属于方式，从已选择集中选取，如图 24－4 所示，单击 OK 按钮确认。

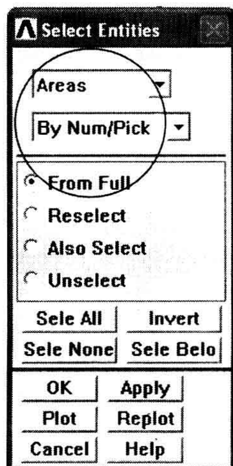


图 24－3　Select Entities 对话框

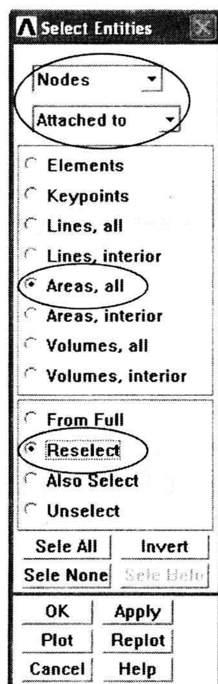


图 24－4　Select Entities 对话框

（3）显示选择的节点：执 Utility Menu→Plot→Nodes 命令，显示选择的节点如图 24 －5 所示。

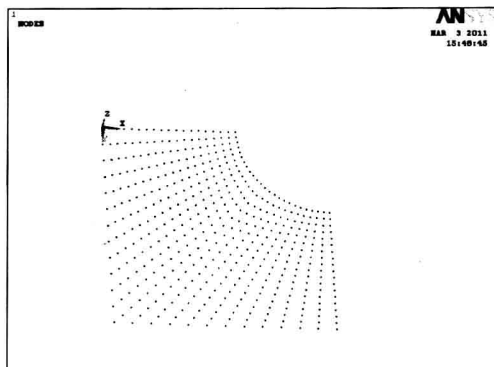


图 24 －5　A1 面所有节点效果图

（4）施加对称约束：执行 Main Menu→Solution→Define Loads→Apply→Structural→Displacement→Symmetry B. C. →On Nodes 命令，弹出对称面法线方向选取对话框，选取 Z 轴为法线方向，如图 24 －6 所示。单击 OK 按钮确认，生成的对称约束如图 24 －7 所示。

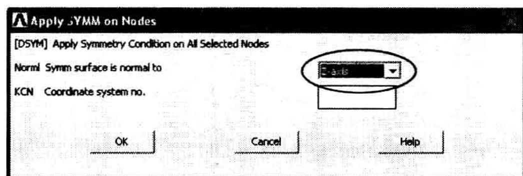


图 24 －6　Apply SYMM on Nodes 对话框

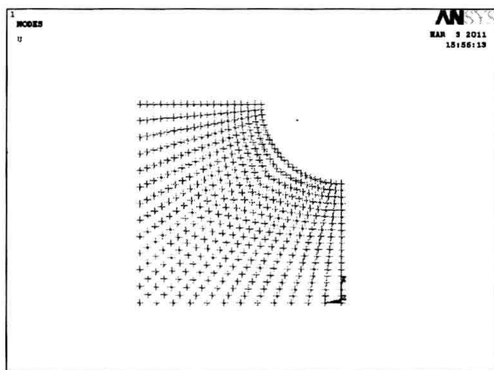


图 24 －7　对称约束效果图

（5）选择所有的实体，便于后续的操作：执 Utility Menu→Select→Everything 命令。

3．在 A2 面的所有节点上施加反对称约束

（1）选择 A2 面：执 Utility Menu→Select→Entities 命令，弹出 Select Entities 对话框。选择对象为面，通过编号/选取方式获得，如图 24 －3 所示，单击 OK 按钮确认。弹出面拾取框，选择 A2 面，单击 OK 按钮确认。

（2）选择 A2 面上所有节点：执 Utility Menu→Select→Entities 命令，弹出 Select Entities 对话框。选择对象为 Nodes，附属于方式，从已选择集中选取，如图 24 －4 所示，单击 OK 按钮确认。

（3）施加对称约束：执行 Main Menu→Solution→Define Loads→Apply→Structural→Displacement→Antisymm B. C. →On Nodes 命令，弹出对称面法线方向选取对话框，选取 Z 轴为法线方向，如图 24 －8 所示。单击 OK 按钮确认，生成的反对称约束如图 24 －9 所示。

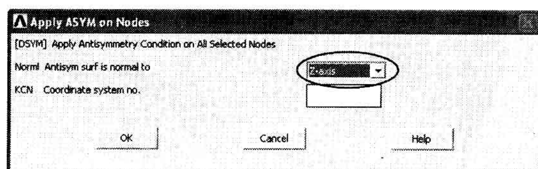


图 24－8 Apply ASYM on Nodes 对话框

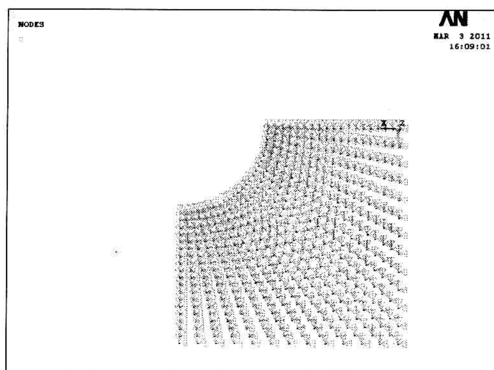


图 24－9 反对称约束效果图

(4) 选择所有的实体：执 Utility Menu→Select→Everything 命令。

24.1.2 施加外载荷

1. 在关键点 KP1 上施加集中载荷

执行 Main Menu→Solution→Define Loads→Apply→Structural→Force/Moment→On Keypoints 命令，弹出关键点拾取框，拾取关键点 KP1，单击 OK 按钮确认。弹出 Apply F/M on KPs 对话框，选择施加 Y 方向的集中力，大小为 1000，如图 24－10 所示。其中，负号表示沿 Y 轴负方向，生成的载荷如图 24－11 所示。

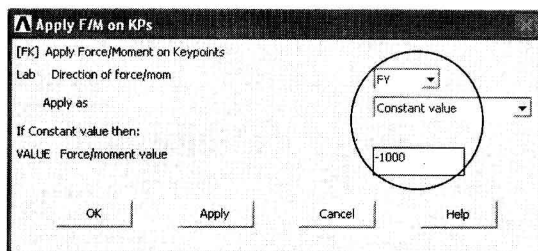


图 24－10 Apply F/M on KPs 对话框

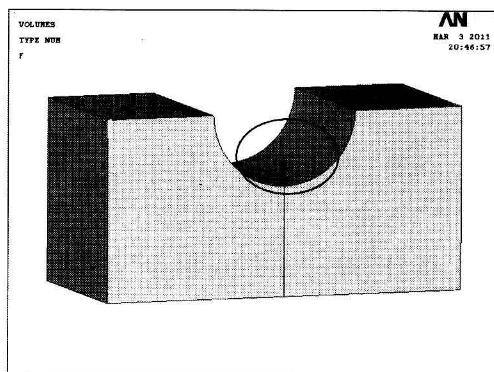


图 24－11 集中载荷效果图

2. 在面 A3 和 A4 上施加分布载荷

执行 Main Menu→Solution→Define Loads→Apply→Structural→Pressure→On Areas 命令，弹出面拾取框，拾取面 A3 和 A4，单击 OK 按钮确认。同时，弹出 Apply PRES on areas 对话框，在 VALUE 输入框中输入面力大小为 100，如图 24－12 所示。其中，LKEY 用于控制分布载荷的方向。生成的施加分布载荷的模型如图 24－13 所示。

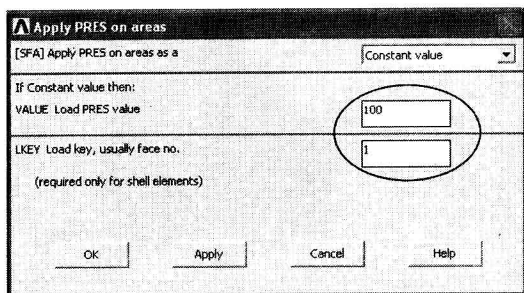


图 24－12　Apply PRES on areas 对话框

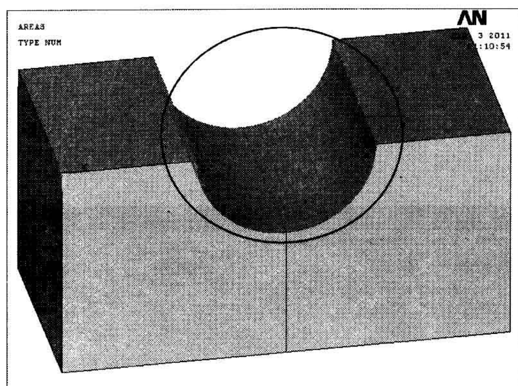


图 24－13　施加分布载荷效果图

3．施加重力载荷

执行 Main Menu→Solution→Define Loads→Apply→Structural→Inertia→Gravity→Global 命令，弹出 Apply Accleration 对话框，在 ACELY 输入框中输入 9.8，即指定重力加速度沿 Y 轴方向，大小为 9.8，如图 24－14 所示。生成的施加重力载荷的模型如图 24－15 所示。

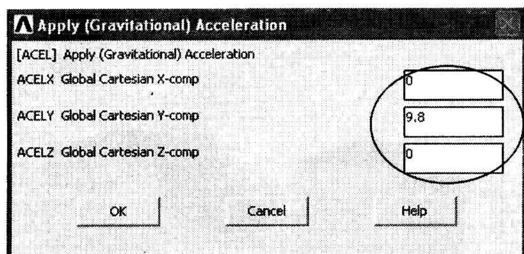


图 24－14　Apply Acceleration 对话框

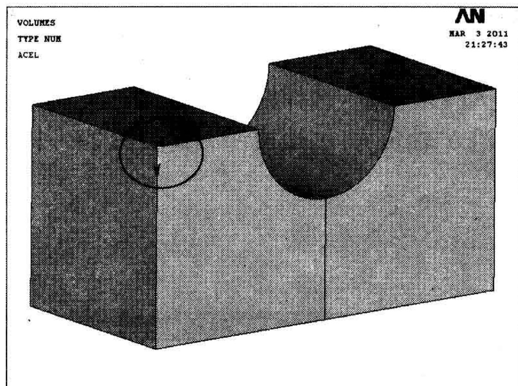


图 24－15　重力加速度效果图

4．施加角速度惯性载荷

执行 Main Menu→Solution→Define Loads→Apply→Structural→Inertia→Angular Veloc→Global 命令，弹出 Apply Angular Velocity 对话框，在 OMEGZ 输入框中输入 10，即指定绕整体笛卡尔坐标 Z 轴的角速度为 10，如图 24－16 所示。生成施加角速度惯性载荷的模型如图 24－17 所示。

5．施加耦合场载荷

在耦合场分析中，通常将一个分析的结果作为另一个分析的载荷。例如，热应力分析时，将热分析计算的节点温度作为体载荷施加于结构分析。执行 Main Menu→Solution→Define Loads→Apply→Structural→Temperature→From Therm Analy 命令，选择热分析生成的结果文件即可。

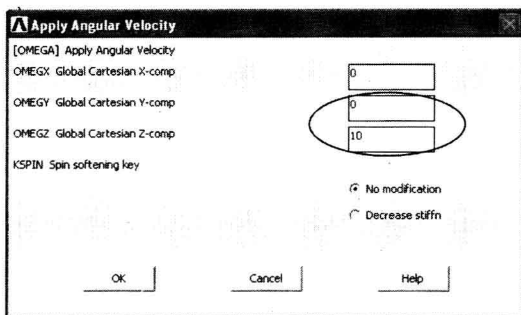


图 24 - 16　Apply Acceleration 对话框

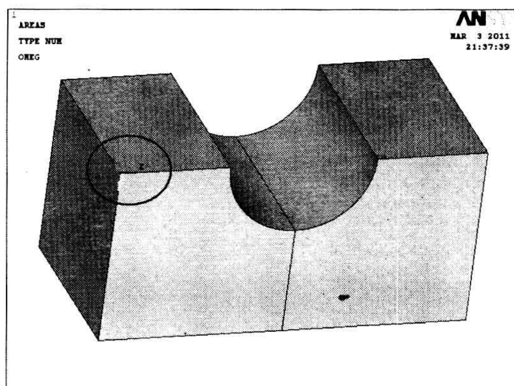


图 24 - 17　施加角速度惯性载荷效果图

24.2　ANSYS 求解方法选择和参数设置

该部分重点介绍 ANSYS 常用的分析类型、求解器选择方法和求解方式。

24.2.1　ANSYS 分析类型选择和参数设置

ANSYS 提供的结构分析类型主要包括静力分析、模态分析、谐响应分析、瞬态动力学分析、谱分析、屈曲分析和子结构分析。该处主要介绍前三者的参数设置过程。

1. 选择分析类型

执行 Main Menu→Solution→Analysis Type→New Analysis 命令，弹出 New Analysis 对话框，如图 24 - 18 所示。用户可根据需要选个需要的分析类型，单击 OK 按钮确认。

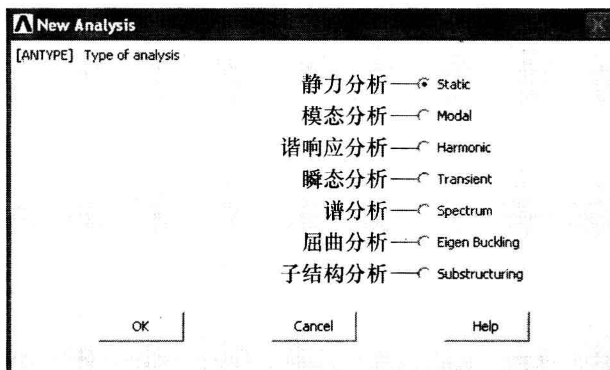
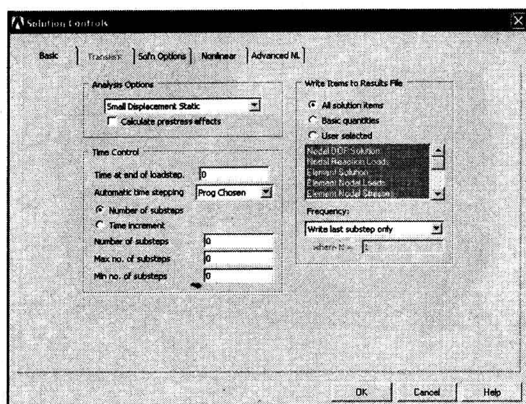


图 24 - 18　New Analysis 对话框

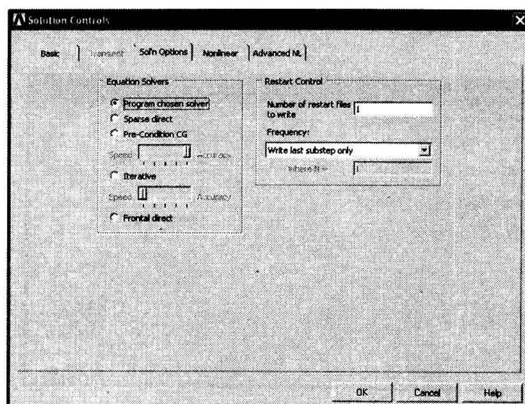
2. 静力分析参数设置

执行 Main Menu→Solution→Analysis Type→Sol'n Controls 命令，弹出 Solution Controls 对话框。该对话框有 5 个标签页，静力分析时，只有 4 个可用，如图 24 - 19 所示。

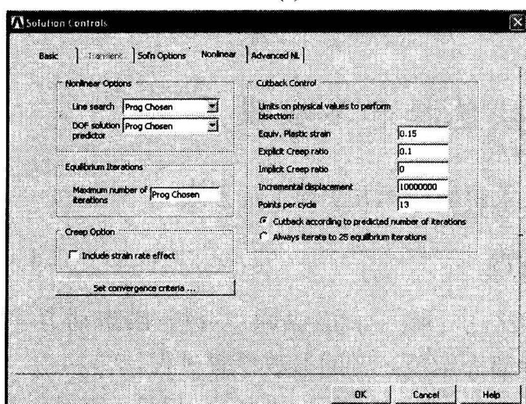
在基本控制标签页中，通过 Analysis Options 部分，用户可以定义分析类型为静态小变形、静态大变形、瞬态小变形和瞬态大变形等分析及是否包含预应力效应；通过 Time



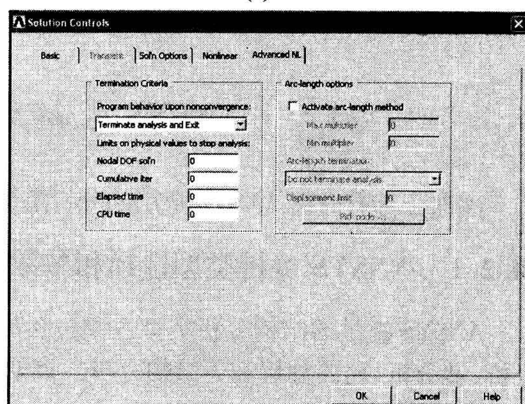
(a)



(b)



(c)



(d)

图 24－19　Solution Controls 对话框

(a) 基本控制标签页；(b) 求解器标签页；(c) 非线性控制标签页；(d) 高级非线性设置标签页。

Control 部分，可以控制载荷布和载荷子步的信息；通过 Write Items to Results File 选项，可以控制计算结果的输出方式和输出频率。

瞬态控制标签页主要控制瞬态效应、渐变载荷和突变载荷的信息、指定阻尼系数和定义积分常数等内容。

在求解器控制标签页中，Equation Solvers 部分用于设置不同的求解器或由程序自动选择求解器；Restart Control 部分主要控制重启动参数设置和结果输出方式。

非线性控制标签页用于定义线性搜索选项、时间步长预测选项、每一个子步的最大平衡迭代次数、蠕变选项和收敛准则。

高级非线性标签页可设置程序终止判据和弧长法控制参数。在程序终止判据设置部分，用户可以选择程序不收敛或达到指定限制时的操作，如程序不终止、程序终止并退出和程序只终止不退出。弧长法部分用于定义计算中是否使用弧长法，指定弧长参考半径的最大和最小因子及定义弧长法终止判据。

3. 模态分析参数设置

执行 Main Menu→Solution→Analysis Type→Analysis Options 命令，弹出 Modal Analysis

对话框，可指定模态计算方法、提取的模态阶数和扩展设置等信息，如图 24－20 所示。单击 OK 按钮确认，弹出模态起止频率设定对话框。默认情况下，起始频率为 0，提取指定阶数的频率结果。可通过输入框设定起止频率值，如图 24－21 所示。同时，可指定振型的归一化方法（按质量阵或单位阵归一）。

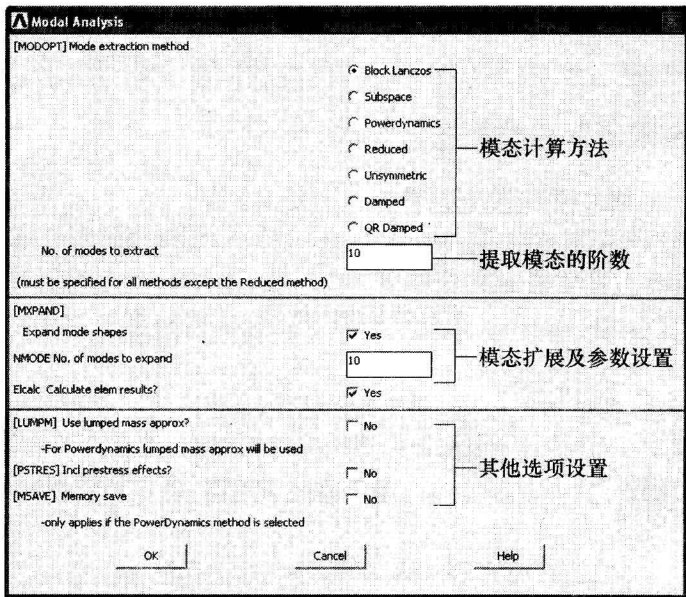


图 24－20 Modal Analysis 对话框

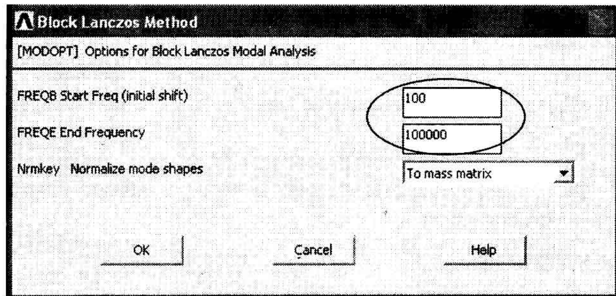


图 24－21 模态起止频率设定对话框

4. 谐响应分析参数设置

执行 Main Menu→Solution→Analysis Type→Analysis Options 命令，弹出 Harmonic Analysis 对话框，可指定谐响应分析的计算方法，如全积分方法、模态叠加法或缩减积分方法，还可指定自由度的输出方式，如实部和虚部方式、模和相位角方式等，如图 24－22 所示。单击 OK 按钮确认，弹出求解器选择对话框，可设置求解器及其容差范围，如图 24－23 所示。单击 OK 按钮确认，完成谐响应参数设置。

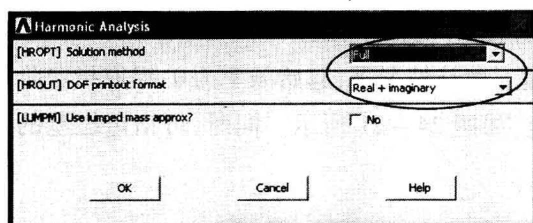


图 24-22 Harmonic Analysis 对话框

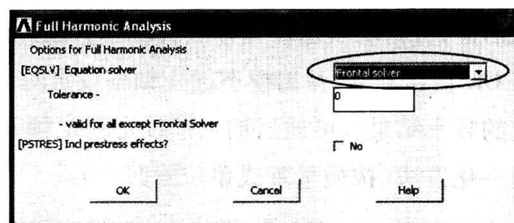


图 24-23 Full Harmonic Analysis 对话框

24.2.2 ANSYS 求解器分类和选择方法

ANSYS 提供了多种求解器,根据计算方式可分为 3 种:

(1) 直接求解器包括波前法和直接消去(Sparse)法,可以得到十分精确的解。

(2) 迭代求解器包括雅克比共轭梯度(JCG)法、不完全乔利斯基共轭梯度(ICCG)法、预条件共轭梯度(PCG)法和自动迭代(ITER)法,求解精度取决于用户指定的收敛准则。

(3) 并行求解器(需单独授权)包括代数多网格(AMG)法和分布区域(DDS)法。

表 24-1 给出了 ANSYS 中各求解器的特点、模型规模、占用内存和硬盘情况及典型应用。用户可以根据自己的问题描述,选用合适的求解器,以获得较高的计算精度和求解效率。

表 24-1 ANSYS 求解器特点和适用范围

求解方法	方法特点	典型应用	模型规模	占用内存	占用硬盘
波前法	占用内存少,稳定性高	几何和材料非线性分析	低于 50000 自由度	低	高
直接消去法	稳定性高,求解速度较快	非线性分析和迭代收敛较慢的线性分析	自由度为 10000 ~ 500000	中	高
雅克比共轭梯度法	求解速度快	求解速度要求较高的热、磁、声等单场和多物理场问题	自由度为 50000 ~ 1000000	中	低
不完全乔利斯基共轭梯度法	求解速度快	多物理场耦合分析;其他迭代法难以收敛的问题	自由度为 50000 ~ 1000000	高	低
预条件共轭梯度法	求解速度快	大型线性分析问题,尤其适用于实体单元模型	自由度 50000 ~ 1000000	高	低
代数多网格	求解速度快,效率高,可以在共享储存器的并行机上扩展至 8 个处理器	大型线性和非线性问题分析	自由度 50000 ~ 1000000	高	低
分布区域	求解速度快、效率高,求解器可扩展到有多个系统和多个处理器的网络上		自由度 1000000 ~ 10000000	高	低

24.2.3 ANSYS 求解方式

ANSYS 提供了 3 种求解方式用于求解单步载荷和多步载荷分析。

1. 直接求解方式

直接求解方式主要用于求解只含单个载荷步的问题，如静力分析、模态分析、谐响应分析和谱分析等。

执行 Main Menu→Solution→Solve→Current LS 命令，弹出模型信息检查窗口和 Solve Current Load Step 对话框，如图 24 - 24 和图 24 - 25 所示。模型信息检查窗口给出了当前模型、载荷和约束的全部信息，用户可通过该窗口检查问题类型、模型和载荷的正确性。如果模型或载荷有错误，则需要重新定义模型或载荷；如果模型或载荷信息全部正确，单击模型信息检查窗口右上角的关闭按钮，关闭该窗口。单击 Solve Current Load Step 对话框的 OK 按钮，开始求解。求解完成后，自动弹出信息提示框，如图 24 - 26 所示，单击 Close 按钮关闭即可。

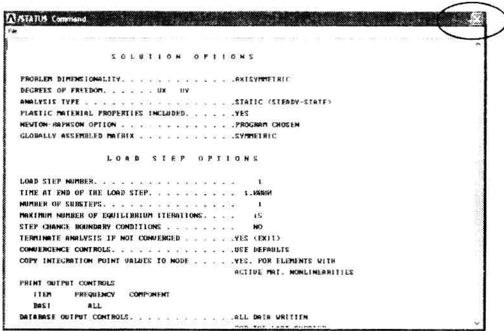


图 24 - 24　模型信息检查窗口

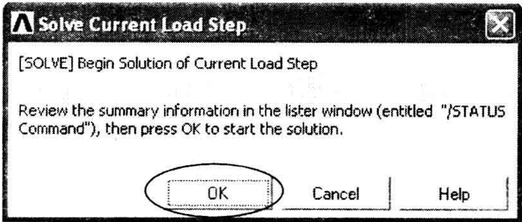


图 24 - 25　Current Load Step 对话框

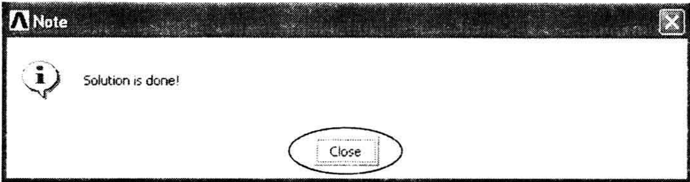


图 24 - 26　求解完成信息提示框

2. 多步求解方式

多步求解方式用于多个载荷步的直接求解，多用于瞬态响应分析。这种方法在每个定义的载荷步后，执行一次 SOLVE 命令，直至计算完所有的载荷步。

执行 Main Menu→Solution→Solve→From LS Files 命令，弹出 Solve Load Ste PFiles 对话框，如图 24 - 27 所示。通过输入框可设置求解载荷步的起始编号、终止编号和增量值。设置完毕后，单击 OK 按钮开始求解计算。求解完成后，自动弹出信息提示框，如图 24 - 26所示。

3. ANSYS 重启动分析

重启动分析主要用于求解完成后，重新定义新的分析；求解更多的载荷步；非线性分

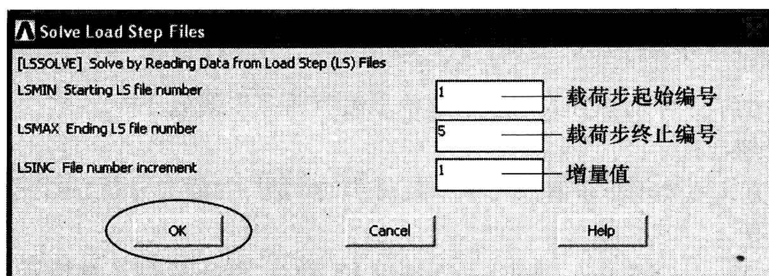


图 24 - 27 Solve Load Ste PFiles 对话框

析收敛失败时的恢复等。ANSYS 提供的重启动类型包括单点重启动和多点重启动两种。单点重启动分析只能在分析停止的点重新启动;多点重启动分析可以从分析中存储信息的指定位置重新启动。

1）单点重启动

（1）单点重启动分析需具备下列条件:

① 分析类型必须为静态分析、谐波(2D 磁场)或完全瞬态分析;

② 在前一次求解计算中至少已完成一次迭代;

③ 前一次分析不是因为用户中断作业、系统中断或系统崩溃而终止;

④ 前一次分析后,应保留的文件:数据库文件(Jobname. db)、单元矩阵文件(Jobname. emat)、单元数据文件(Jobname. esav 或 Jobname. osav)。

注:单点重启动分析前,必须删除前一次求解过程中生成的 Jobname. Rdb、Jobname. Ldhi 和 Jobname. Rnnn 文件。

（2）单点重启动分析的步骤如下:

① 修改文件名:进入 ANSYS,执行 Utility Menu→File→Change Jobname 命令,修改文件名与第一次分析时的文件名相同;

② 恢复分析的数据库文件:执行 Utility Menu→File→Resume Jobname. db 命令;

③ 指定分析类型为重启动分析:执行 Main Menu→Solution→Analysis Type→Restart 命令;

④ 根据实际情况修改或增减载荷;

⑤ 指定是否重新计算三角化矩阵:执行 Main Menu→Solution→Load Step Opts→Other→Reuse Tri Matrix 命令,弹出 Reuse Triangularized Matrix 对话框,如图 24 - 28 所示。用户可根据需要选择程序确定、重新计算或不重新计算 3 种方式,单击 OK 按钮确认。

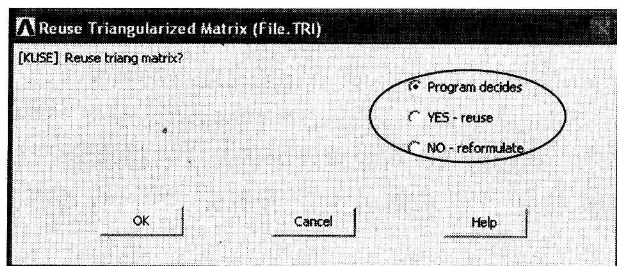


图 24 - 28 Reuse Triangularized Matrix 对话框

⑥ 重新求解:执行 Main Menu→Solution→Solve→Current LS 命令,进行重启动分析。

2) 多点重启动

(1) 多点重启动分析需要保留以下文件:

① 第 1 个载荷步第 1 次迭代时系统自动保存的数据库文件(Jobname. rdb);

② 加载历程文件(Jobname. ldhi);

③ 单元信息记录文件(Jobname. Rnnn)。

(2) 多点重启动分析的步骤如下:

① 修改文件名:进入 ANSYS,执行 Utility Menu→File→Change Jobname 命令,修改文件名与第 1 次分析时的文件名相同;

② 恢复分析的数据库文件:执行 Utility Menu→File→Resume Jobname. db 命令;

③ 使用 RECONTROL,FILE _ SUMMARY 命令确定重启动的载荷步和子步,这个命令将输出当前目录中所有 Jobname. Rnnn 文件的载荷步和子步信息;

④ 指定分析类型为重启动分析:执行 Main Menu→Solution→Analysis Type→Restart 命令;

⑤ 根据实际情况修改或增减载荷;

⑥ 重新求解:执行 Main Menu→Solution→Solve→Current LS 命令,进行重启动分析。

第25章　ANSYS后处理及图形显示技术

通过实体建模、划分网格、施加载荷和边界条件、求解后，即可获得有限元分析的结果。ANSYS计算的结果包括基本解和导出解两部分。基本解包括每个节点上的自由度结果，如结构分析的位移，热分析的温度，电磁分析的磁势等。导出解是从基本数据计算而来的结果，如结构分析的应力和应变，热分析的热梯度和热通量，电磁分析的磁通量等。导出解又称单元解，通常为单元积分点上的计算结果。各分析类型的基本解和导出解总结如表25－1所示。

表25－1　不同分析类型的基本解和导出解

分析类型	基本解	导出解
结构分析	位 移	应力、应变、支座反力等
热 分 析	温 度	热通量、热梯度等
电磁分析	磁 势	磁通量、电流密度等
电场分析	电 势	电场、通量密度等
流场分析	速度和压力	压力梯度、热通量等

用户可以通过后处理工具查看ANSYS分析的结果，确定结构的响应历程和行为状态。普遍的看法是后处理较为简单，会查看应力和位移就足够了。实则不然，ANSYS的后处理器仅是检查和显示分析结果的工具，仍然需要用户根据自己的工程判断能力分析结果的正确性和有效性。

ANSYS提供了两种后处理工具：通用后处理器（POST1）和时间历程后处理器（POST26）。通用后处理器用来查看模型在某一特定时刻（或某一载荷步、频率点）的结果。结果显示方式包括等值线图、云图、切片图、矢量图、剖视图、纹理显示图、列表显示结果等。时间历程后处理器用来查看模型指定点的结果随时间、频率或载荷步的变化规律。同时，还可以对变量进行数学运算，包括积分、微分等。

25.1　通用后处理器

ANSYS求解完成后，执行Main Menu→General Postproc命令，进入ANSYS通用后处理器。结果查看和分析的一般步骤如下：

（1）将数据结果读入数据库中；

（2）定义载荷步、频率点、单元表数据等信息（可以选择）；

（3）列表或图形显示计算结果；

（4）保存列表数据或图形。

25.1.1 读入结果数据

通用后处理所使用的模型数据(包括单元类型、节点、单元、材料特性和实常数等)应该与求解时使用的模型数据完全一致,否则会引起数据不匹配。

1. 读入结果文件

通用后处理器处理结果前,应保证模型信息(如节点位置信息、单元组成信息等)已经在当前数据库中。如果数据库中不包含模型数据,执行 Utility Menu→File→Resume Jobname.db 或 Resume from 命令将模型信息读入当前数据库中。同时,需将结果数据读入到数据库中。若有多组结果文件,可通过下列方法选择需要显示的结果文件。

执行 Main Menu→General Postproc→Data & File Opts 命令,弹出 Data and File Options 对话框。用户可根据需要选择读入的结果数据和结果文件,如图 25-1 所示。

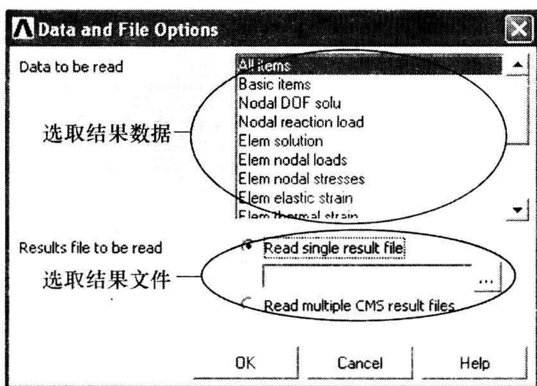


图 25-1 Data and File Options 对话框

2. 读取载荷步(可以选择)

对于随时间、频率或加载历程变化的分析结果需读取查看结果的标识(时间点、频率点或载荷步等)。ANSYS 提供了多种选择标识的方法,执行 Main Menu→General Postproc→Read Results→First Set(第一组结果)/ Next Set(下一组结果)/ Previous Set(前一组结果)/ Last Set(最后一组结果)/ By Pick(手动选择)/ …即可。

25.1.2 图形方式显示结果

图形方式能够直观而便捷地反映计算结果的效果,使用户快速地了解整个模型的结果分布规律,进而判断分析结果的正确性和有效性。在通用后处理器中,图形显示方式包括云图、等值面图、等值线图、矢量图、切片图、透视图、粒子流轨迹图等。

1. 云图显示方式

(1) 云图方式显示结构变形:执行 Main Menu→General Postproc→Plot Results→Deformed Shape 命令,弹出 Plot Deformed Shpae 对话框。ANSYS 提供了 3 种控制方式(仅显示变形后结果方式、同时显示变形前后结果方式和显示变形后结果及变形前框架方式)显示结构变形云图,如图 25-2 所示,用户可根据实际需要选择显示选项。该处选择同时显示变形前后变形结果方式,单击 OK 按钮确认,变形云图如图 25-3 所示。

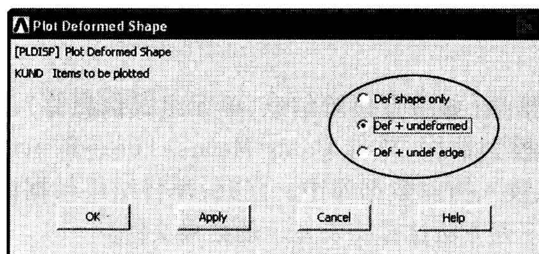


图 25-2 Plot Deformed Shpae 对话框

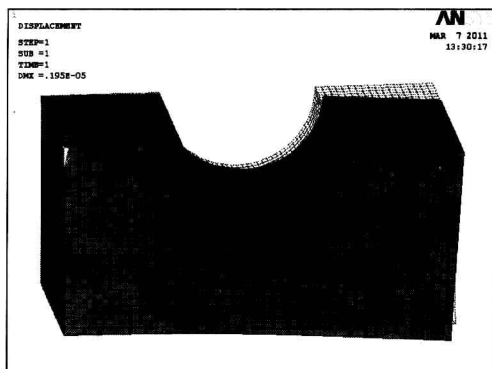


图 25-3 结构变形云图

（2）云图方式显示结构应力分布：执行 Main Menu→General Postproc→Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu 命令，弹出 Contour Nodal Solution Data 对话框。ANSYS 提供了变形、应力、应变、能量等结果的云图显示，如图 25-4 所示，用户可根据实际需要选择显示内容。该处选择显示当量应力（von Mises stress）结果，单击 OK 按钮确认，如图 25-5 所示。

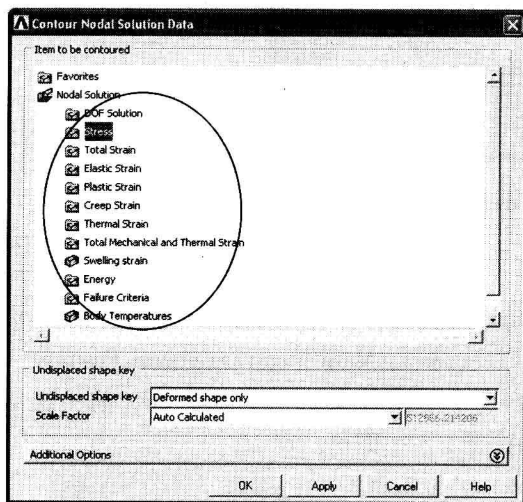


图 25-4 Contour Nodal Solution Data 对话框

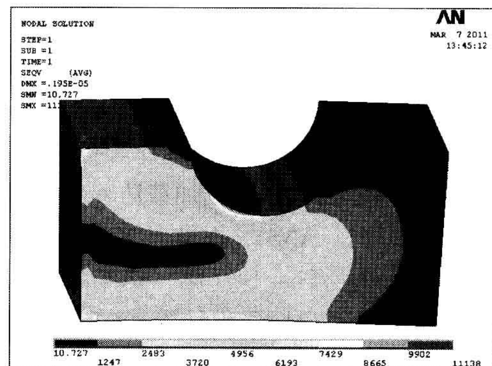


图 25-5 结构当量应力分布云图

2. 等值面显示方式

（1）设置显示方式为等值面方式：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Style→Contours→Contour Style 命令，弹出 Contour Style 对话框，设置 Stype of contour plot 项为 Isosurface，如图 25-6 所示，单击 OK 按钮确认。

（2）等值面方式显示结构当量应力：执行 Main Menu→General Postproc→Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu 命令，弹出 Contour Nodal Solution Data 话框。选择显示当量应力（von Mises stress）结果，单击 OK 按钮确认，如图 25-7 所示。

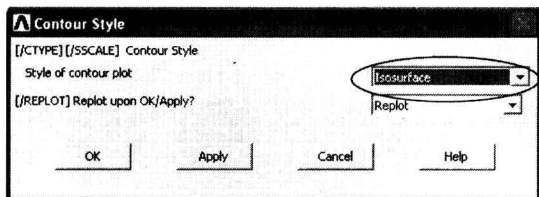


图 25 - 6　Contour Style 对话框

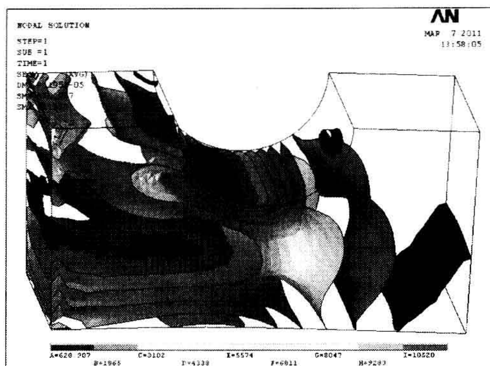


图 25 - 7　等值面方式显示结构当量应力分布图

3. 等值线显示方式

（1）设置显示方式为等值线方式：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Device Options 命令，弹出 Device Options 对话框，选中 Vector mode 方式，如图 25 - 8 所示，单击 OK 按钮确认。

（2）等值线方式显示结构当量应力：执行 Main Menu→General Postproc→Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu 命令，弹出 Contour Nodal Solution Data 话框。选择显示当量应力（von Mises stress）结果，单击 OK 按钮确认，如图 25 - 9 所示。

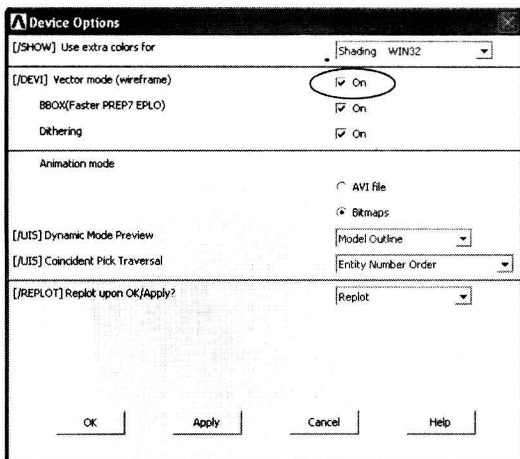


图 25 - 8　Device Options 对话框

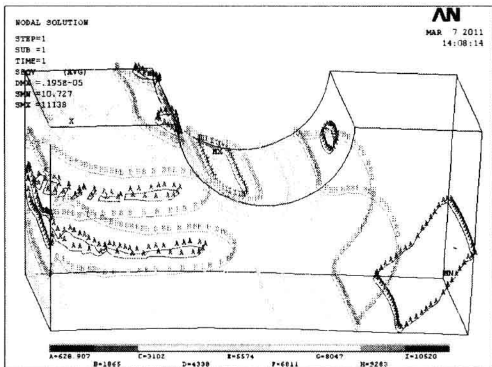


图 25 - 9　等值线方式显示结构当量应力分布图

4. 矢量图显示方式

矢量图方式显示结构变形：执行 Main Menu→General Postproc→Plot Results→Vector Plot→Predefined 命令，弹出 Vector Plot of Predefined Vectors 对话框，如图 25 - 10 所示。选择显示变形结果，且定义放缩系数为 0.5，单击 OK 按钮确认，如图 25 - 11 所示。

5. 切片图显示方式

（1）移动工作平面：执行 Utility Menu→WorkPlane→Offset WP to→XYZ Locations 命令，移动工作平至切片处。

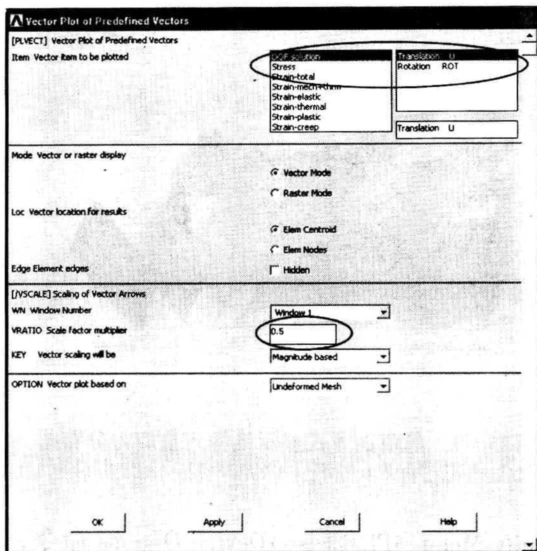


图 25 - 10　Vector Plot of Predefined Vectors 对话框

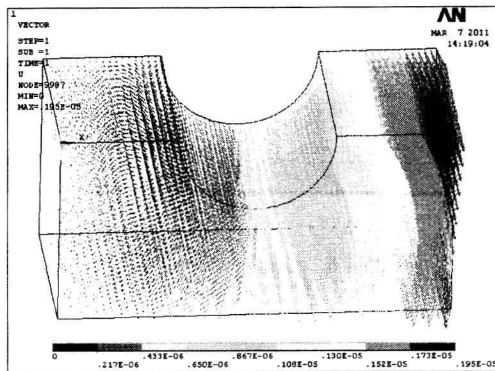


图 25 - 11　矢量图显示结构变形

（2）设置显示方式为切片方式：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Stype→Hidden - Line Options 命令，弹出 Hidden - line Options 对话框，在 Type of Plot 中，选择 Q - Slice Presice 方式，指定 Cutting plane 为 Working plane，如图 25 - 12 所示，单击 OK 按钮确认。

（3）切片方式显示结构当量应力：执行 Main Menu→General Postproc→Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu 命令，弹出 Contour Nodal Solution Data 话框。选择显示当量应力（von Mises stress）云图，单击 OK 按钮确认，如图 25 - 13 所示。

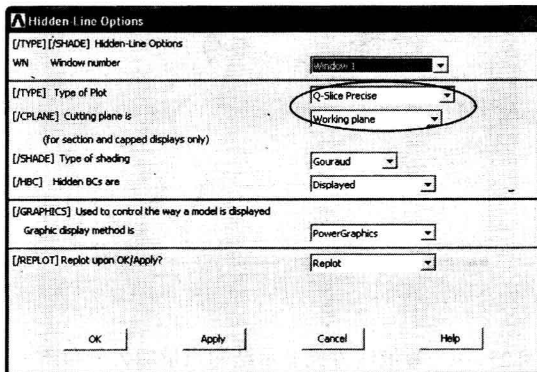


图 25 - 12　Hidden - line Options 对话框

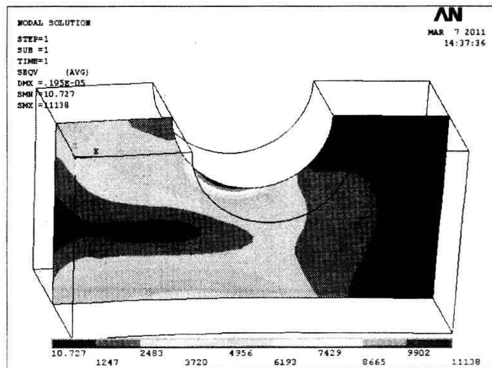


图 25 - 13　切片方式显示结构当量应力分布云图

6. 剖视图显示方式

（1）移动工作平面：执行 Utility Menu→WorkPlane→Offset WP to→XYZ Locations 命令，移动工作平至剖视处。

（2）设置显示方式为剖视方式：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Stype→Hidden - Line Options 命令，弹出 Hidden - line Options 对话框，在 Type of Plot 中，选择 Capped Hidden 方式，指定 Cutting plane 为 Working plane，如图 25 - 14 所示，单击 OK 按钮确认。

（3）剖视方式显示结构当量应力：执行 Main Menu→General Postproc→Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu 命令，弹出 Contour Nodal Solution Data 话框。选择显示当量应力（von Mises stress）云图，单击 OK 按钮确认，如图 25－15 所示。

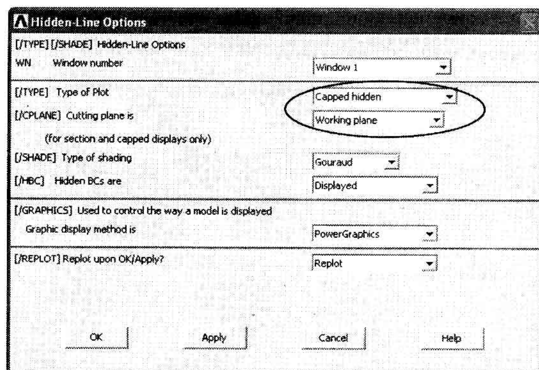


图 25－14 Hidden－line Options 对话框

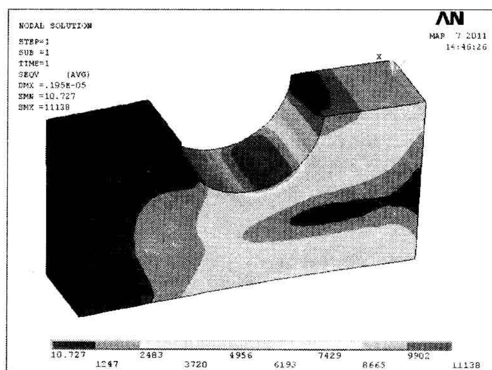


图 25－15 剖示方式显示结构当量应力分布云图

7. 结果的多窗口显示

ANSYS 提供了多窗口显示功能，可以在每个窗口显示不同的内容，便于用户对比和分析计算结果。具体实现步骤如下：

（1）窗口拆分：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Multi－window Layout 命令，弹出 Multi－Ploting 对话框。在 Window Layout 中，可以选择多个窗口的布局方式，如选择分为 3 个窗口（2 个位于上侧，1 个位于下侧），如图 25－16 所示。单击 OK 按钮确认，窗口分为 3 部分。

（2）选择活动窗口：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Multi－Plot Controls 命令，弹出 Multi－Ploting 对话框。通过 Edit Window 项可以选择活动窗口，如选择 2 号窗口为活动窗口，如图 25－17 所示。单击 OK 按钮确认，出现显示内容控制对话框，即可对 2 号窗口的显示内容进行选择，如选择显示单元结果，如图 25－18 所示。单击 OK 按钮确认，弹出显示内容选择对话框，如图 25－19 所示。

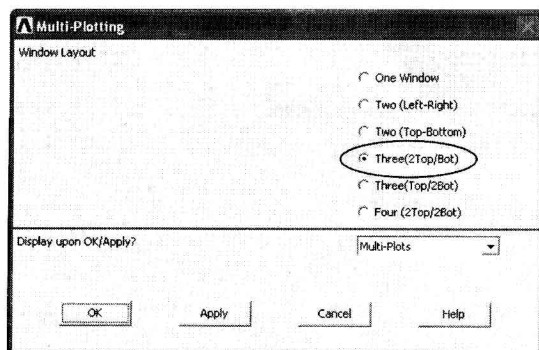


图 25－16 Multi－Ploting 对话框

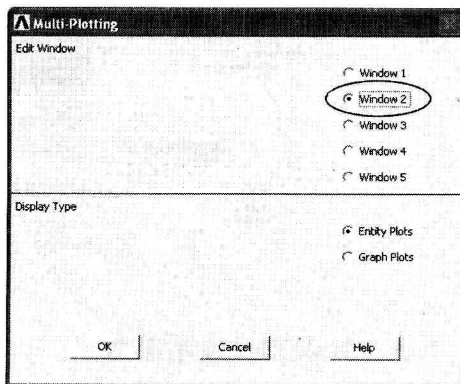


图 25－17 Multi－Ploting 对话框

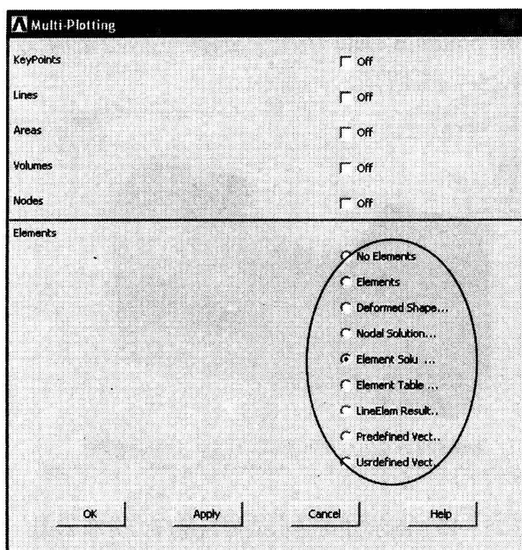


图 25－18　Multi－Ploting 显示内容对话框

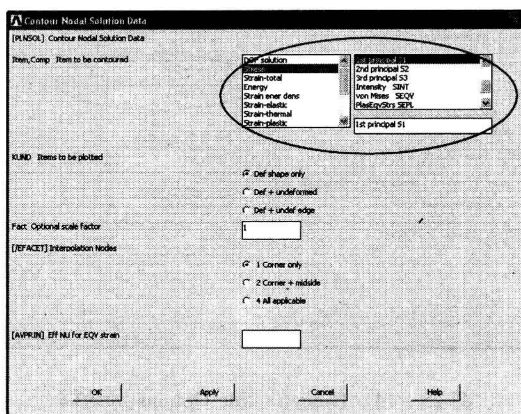


图 25－19　Contour Nodal Solution Data 对话框

（3）显示所有窗口内容：设置完毕所有窗口的显示内容后，执行 Utility Menu→Plot→Multi－Plots 命令，显示所有窗口的结果。如果窗口的内容显示不全，可通过视图工具条进行调整。图 25－20 采用多窗口方式显示了一组结构分析结果。

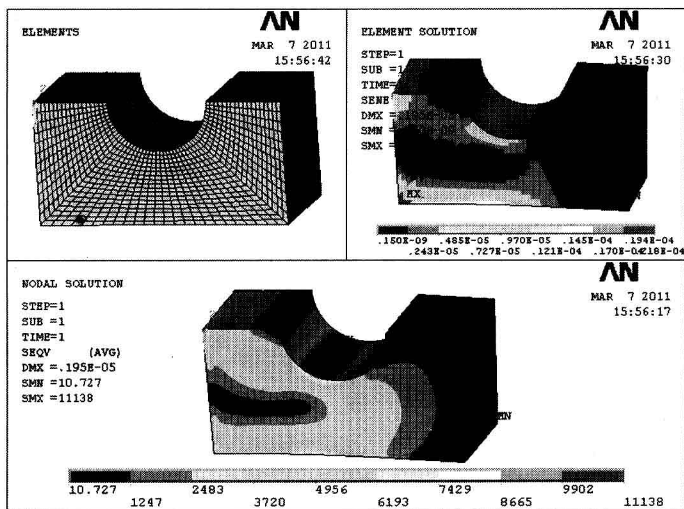


图 25－20　多窗口显示分析结果图

25.1.3　列表方式显示结果

另一种常见的后处理方法就是列表显示结果数据，包括所有的节点结果、单元结果、支座反力等。

1. 列表显示节点结果

执行 Main Menu→General Postproc→List Results→Nodal Solution 命令，弹出 List Nodal Solution 对话框，如图 25 - 21 所示。通过该对话框可选择节点上位移、应力、应变和能量等结果进行列表显示，如图 25 - 22 所示。

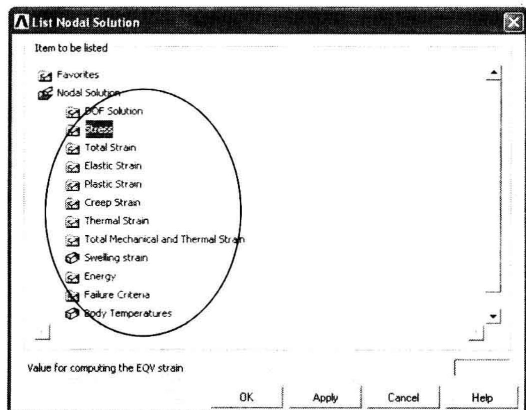
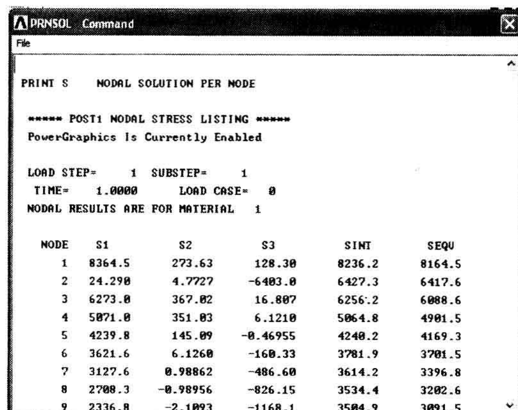


图 25 - 21 List Nodal Solution 对话框



NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQV
1	8364.5	273.63	128.30	8236.2	8164.5
2	24.290	4.7727	-6403.0	6427.3	6417.6
3	6273.0	367.02	16.807	6256.2	6088.6
4	5071.0	351.03	6.1210	5064.8	4901.5
5	4239.8	145.09	-0.46955	4240.2	4169.3
6	3621.6	6.1260	-160.33	3781.9	3701.5
7	3127.6	0.98862	-486.60	3614.2	3396.8
8	2708.3	-0.98956	-826.15	3534.4	3202.6
9	2336.8	-2.1093	-1168.1	3504.9	3091.5

图 25 - 22 节点当量应力结果列表显示

2. 列表显示单元结果

执行 Main Menu→General Postproc→List Results→Element Solution 命令，弹出 List Element Solution 对话框，如图 25 - 23 所示。通过该对话框可选择单元上的应力、应变和能量等结果进行列表显示，如图 25 - 24 所示。

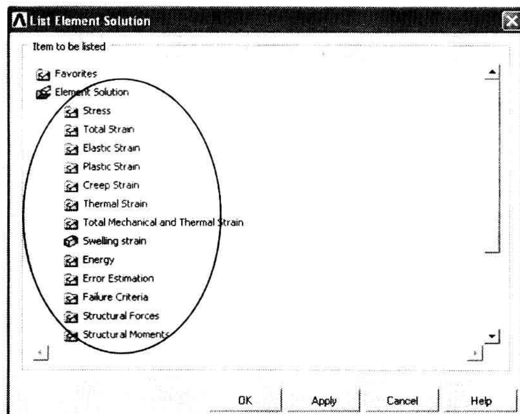
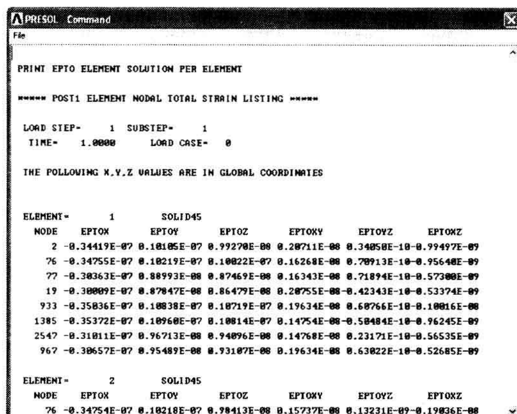


图 25 - 23 List Element Solution 对话框



NODE	EPTOX	EPTOY	EPTOZ	EPTOXY	EPTOYZ	EPTOXZ
2	-0.34419E-07	0.10105E-07	0.99270E-08	0.20711E-08	0.34050E-10	-0.99497E-09
76	-0.34755E-07	0.10219E-07	0.10022E-07	0.16268E-08	0.70913E-10	-0.95640E-09
77	-0.30363E-07	0.88993E-08	0.87469E-08	0.16343E-08	0.71894E-10	-0.57300E-09
19	-0.30009E-07	0.87047E-08	0.86479E-08	0.20755E-08	-0.42343E-10	-0.53374E-09
933	-0.35036E-07	0.10838E-07	0.10719E-07	0.19634E-08	0.60766E-10	-0.10016E-08
1385	-0.35372E-07	0.10960E-07	0.10814E-07	0.14754E-08	-0.50484E-10	-0.96245E-09
2547	-0.31011E-07	0.96713E-08	0.94096E-08	0.14768E-08	0.23171E-10	-0.56535E-09
967	-0.30657E-07	0.95489E-08	0.93107E-08	0.19634E-08	0.63022E-10	-0.52685E-09

NODE	EPTOX	EPTOY	EPTOZ	EPTOXY	EPTOYZ	EPTOXZ
76	-0.34754E-07	0.10218E-07	0.98413E-08	0.15737E-08	0.13231E-09	-0.19036E-08

图 25 - 24 单元应变结果列表显示

3. 列表显示反作用载荷结果

执行 Main Menu→General Postproc→List Results→Reaction Solu 命令，弹出 List Reaction Solution 对话框，如图 25 - 25 所示。通过该对话框可选择支反力和扭矩等结果进行列表显示，如图 25 - 26 所示。

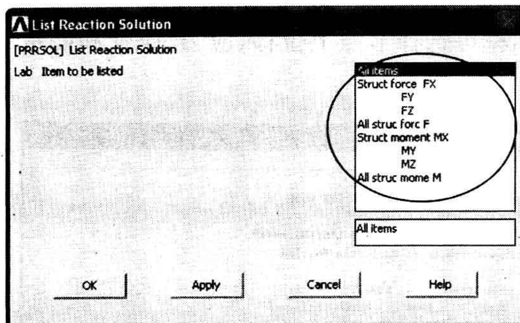


图 25 - 25　List Reaction Solution 对话框

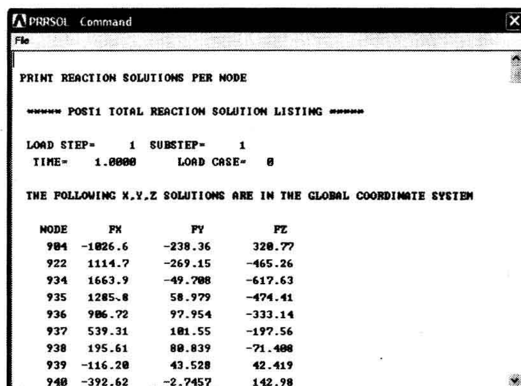


图 25 - 26　支反力结果列表显示

25.1.4　路径方式显示结果

路径是指在模型上依次拾取若干点形成的一条折线。ANSYS 通过插值获得一条描述该路经结果数据的曲线。同一个模型可以定义多条路经,相互间以路径名称区分;同一条路经上可以映射多组不同的结果,以结果名称相互区分。然后,通过列表或图形方式可以显示路径上结果,还可以对路径上的数据进行数学运算。路径操作步骤详述如下:

1. 定义路径

执行 Main Menu→General Postproc→Path Operations→Define Path→By Nodes 命令,弹出节点拾取框,依次拾取路径上的所有节点,单击 OK 按钮确认。弹出路径定义对话框,输入路径名称(如 length),如图 25 - 27 所示。单击 OK 按钮确认,完成路径定义。

2. 选择需要映射结果数据的路径

存在多条路径时,需指定当前映射结果数据的路径:执行 Main Menu→General Postproc→Path Operations→Recall Path 命令,弹出 Recall Path 对话框,选择需要映射数据的路径名称,如图 25 - 28 所示,单击 OK 按钮确认。

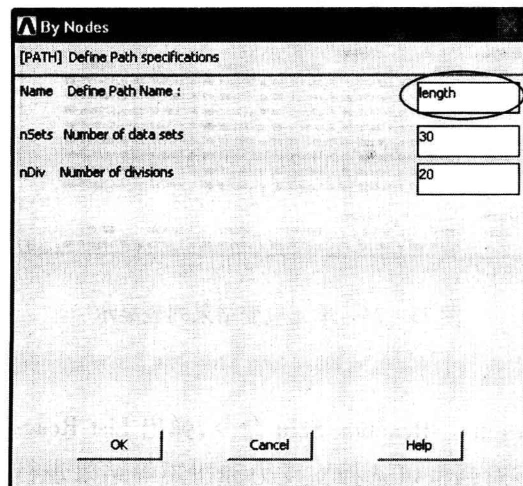


图 25 - 27　路径定义对话框

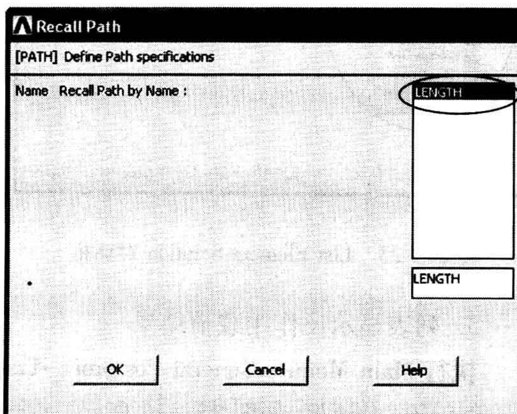


图 25 - 28　Recall Path 对话框

3. 将结果映射到路径上

执行 Main Menu→General Postproc→Path Operations→Map onto Path 命令，弹出 Map Result Items onto Path 对话框。输入映射数据的名称(如 SEQV)，选择映射数据内容如图 25－29 所示。单击 OK 按钮确认，完成数据映射过程。

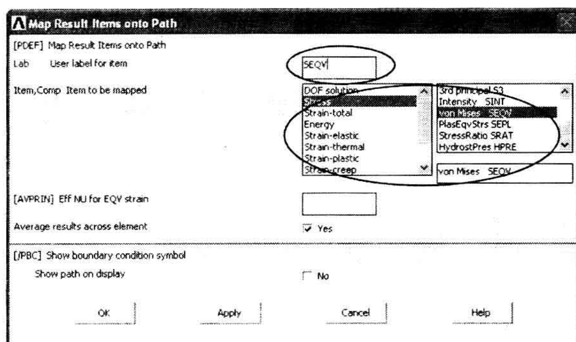


图 25－29 Map Result Items onto Path 对话框

4. 列表或图形显示路径上的结果

(1) 列表方式显示路径映射结果：执行 Main Menu→General Postproc→Path Operations→Plot Path Item→List Path Items 命令，弹出 List Path Items 对话框。选择映射数据的名称(如 SEQV)，如图 25－30 所示。单击 OK 按钮确认，弹出路径上映射的数据结果，如图 25－31 所示。

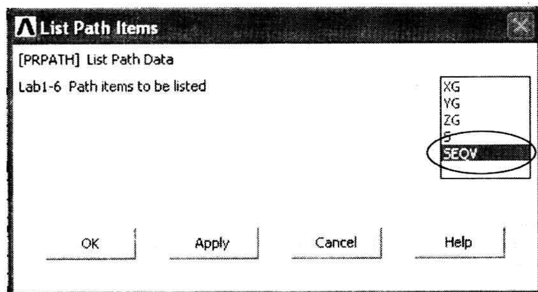
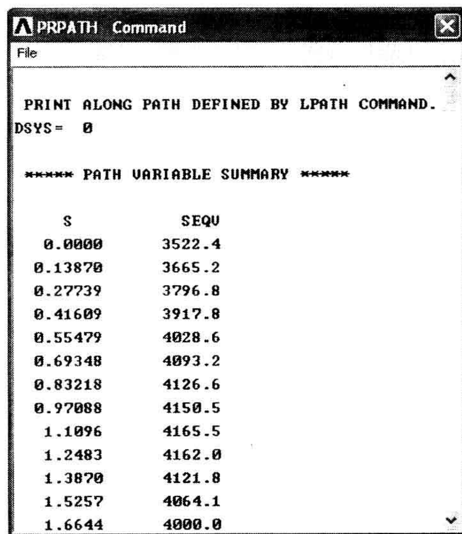


图 25－30 List Path Items 对话框


PRPATH Command
File

PRINT ALONG PATH DEFINED BY LPATH COMMAND.
DSYS= 0

***** PATH VARIABLE SUMMARY *****

S	SEQV
0.0000	3522.4
0.13870	3665.2
0.27739	3796.8
0.41609	3917.8
0.55479	4028.6
0.69348	4093.2
0.83218	4126.6
0.97088	4150.5
1.1096	4165.5
1.2483	4162.0
1.3870	4121.8
1.5257	4064.1
1.6644	4000.0

图 25－31 列表显示的映射于路径上的结果数据

(2) 曲线方式显示路径映射结果：执行 Main Menu→General Postproc→Path Operations→Plot Path Item→On Graph 命令，弹出 Plot of Path Items on Graph 对话框。选择映射数据的名称(如 SEQV)，如图 25－32 所示。单击 OK 按钮确认，路径映射结果曲线显示于视图窗口，如图 25－33 所示。

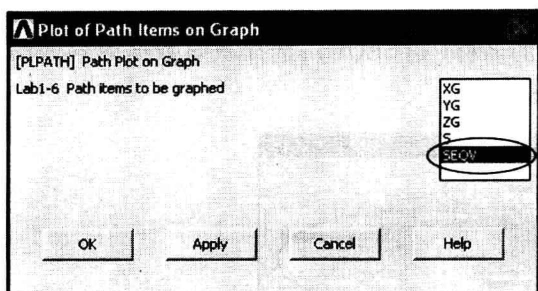


图 25－32　List Path Items 对话框

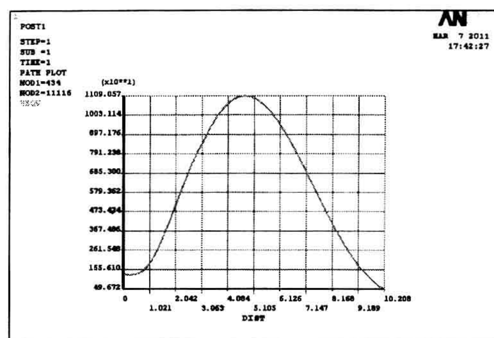


图 25－33　曲线方式显示路径映射结果数据

（3）几何路径方式显示路径映射结果：执行 Main Menu→General Postproc→Path Operations→Plot Path Item→On Geometry 命令，弹出 Plot of Path Items on Graph 对话框。选择映射数据的名称（如 SEQV），如图 25－34 所示。单击 OK 按钮确认，路径映射结果曲线显示于视图窗口，如图 25－35 所示。

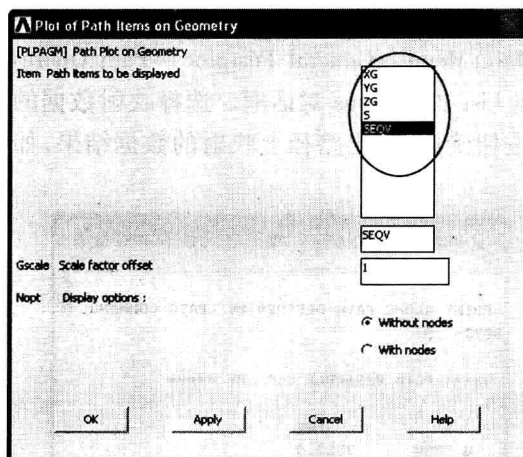


图 25－34　List Path Items 对话框

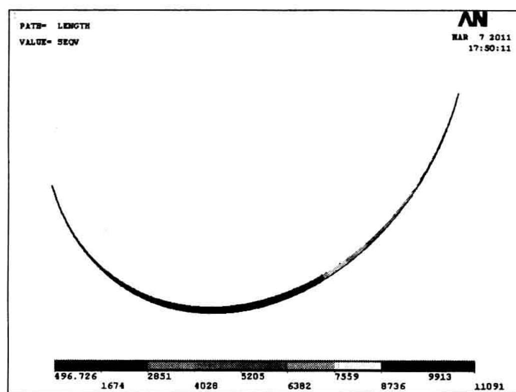


图 25－35　曲线方式显示路径映射结果数据

5. 删除路径

当路经太多或定义错误时，可删除已有的路径，并重新定义。实现方法如下：

（1）删除所有定义的路径：执行 Main Menu→General Postproc→Path Operations→Delete Path→All Pathes 命令，弹出确认对话框，单击 OK 按钮确认，删除所有定义的路径；

（2）删除指定的路径：执行 Main Menu→General Postproc→Path Operations→Delete Path→By Name 命令，弹出 Delete Path by Name 对话框，选择需删除的路径名称，单击 OK 按钮确认即可。

25.1.5　动画方式显示结果

动画方式可以直观地展示整个响应的变化过程，为建模过程的正确性判断和响应结果的有效性评估提供了有利的保障。ANSYS 中生成动画较为简便，直接执行 Utility

Menu→PlotCtrls→Animate 命令即可。建议用户首先通过后处理器输出相应的结果云图（如位移、应力和应变等），调整模型大小和位置后，再执行动画生成功能，便于获得较好的动画效果。

默认情况下，ANSYS 以自带的 ANIMATION 格式生成动画，存储信息量大，可以同时旋转、缩放、拖拉模型，按新的视角继续播放动画。但离开 ANSYS 播放器，则不能独立执行。ANSYS 还提供了制作并保存 AVI 格式动画的功能：执行 Utility Menu→PlotCtrls→Device Options 命令，弹出 Device Options 对话框。修改 Animation Mode 为 AVI file 即可，如图 25－36 所示。

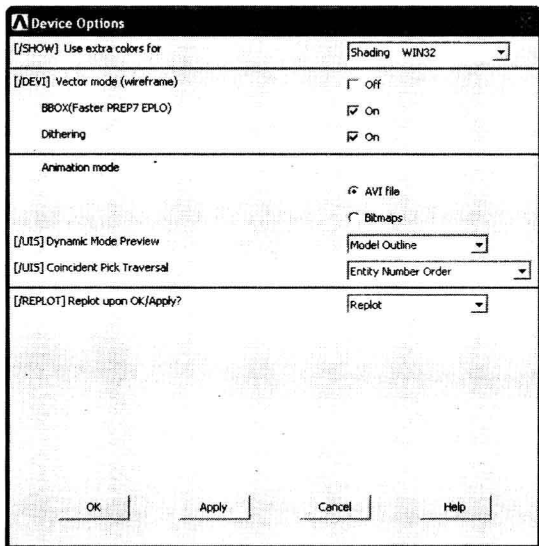


图 25－36　Device Options 对话框

一般的线性分析的变形和应力动画，可以直接执行 Utility Menu→PlotCtrls→Animate→Deformed Shape 或 Deformed Results 命令生成；对于瞬态分析和非线性分析，可以选择 Over Time 或 Over Results 命令；对于模态分析可以选择 Mode Shape 命令；对于谐响应分析可以使用 Time－harmonic 命令生成动画。

25.1.6　结果数据查询

ANSYS 为方便用户分析计算结果，提供了结果数据查询功能。在 POST1 中，可以直接在图形窗口中查询单元结果或节点结果，并通过有关设置生成数值标注。

1. 计算结果查询

（1）查询单元结果数据：执行 Main Menu→General Postproc→Query Results→Element Solu 命令，弹出 Query Element Solution Data 对话框，选择要查询的内容，如单元应变能查询，如图 25－37 所示。单击 OK 按钮确认，弹出单元拾取框，依次单击选择关心的单元，将显示单元的应变能数据，如图 25－38 所示。

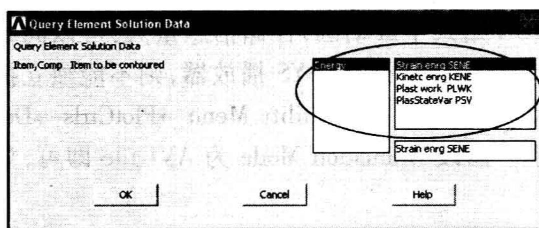


图 25－37　Query Element Solution Data 对话框

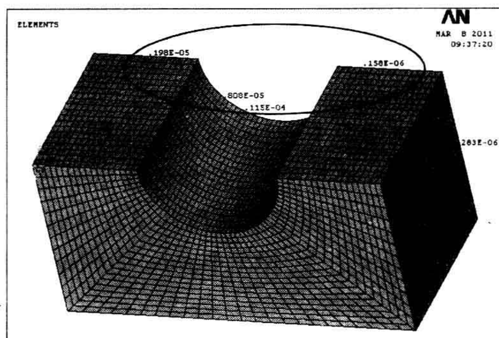


图 25－38　单元应变能结果查询效果图

(2) 查询节点结果数据：执行 Main Menu→General Postproc→Query Results→Subgrid Solu 命令，弹出 Query Subgrid Solution Data 对话框，选择要查询的内容，如节点当量应力查询，如图 25－39 所示。单击 OK 按钮确认，弹出节点拾取框，依次单击选择关心的节点，将显示节点的当量应力结果，如图 25－40 所示。

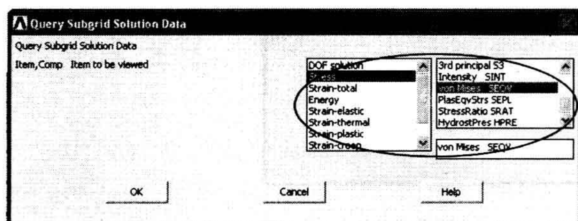


图 25－39　Query Subgrid Solution Data 对话框

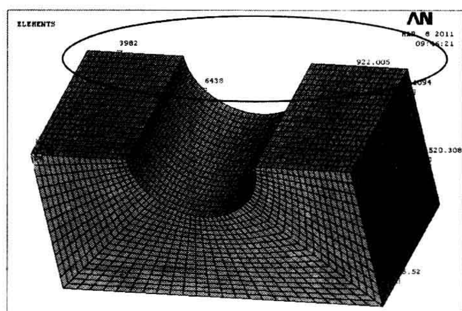


图 25－40　节点当量应力结果查询效果图

2. 其他信息查询

除结果数据外，用户还可以查询几何实体、载荷信息、单元编号、节点编号等信息。

执行 Main Menu→General Postproc→Query Results→Element Solu 命令，弹出 Model Query Picker 对话框，通过 Query Item 下拉框选择需要查询的内容，如面编号查询，如图 25－41所示。在视图窗口选择关心的面，在对话框中将显示面的编号信息，如图 25－42所示。

25.1.7　误差估计和显示

ANSYS 通用后处理器提供了计算结果误差估计功能，包括应力分析的能量百分比误差估计(SEPC)、单元应力偏差估计(SDSG)、单元能量误差估计(SERR)和应力上下限估计(SMAX/SMIN)，热分析的热能量百分比误差估计(TEPC)、单元热流密度偏差估计(TDSG)和单元热能量误差估计(TERR)等。误差估计依据单元内边界的应力或热流的不连续性进行计算，等于平均与未平均的节点应力或热流结果的差值。用户可通过计算结果的误差分布，确定需要细化的网格区域，进而改善计算效果。

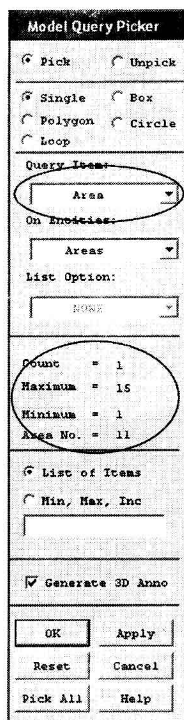


图 25－41　Model Query Picker 对话框

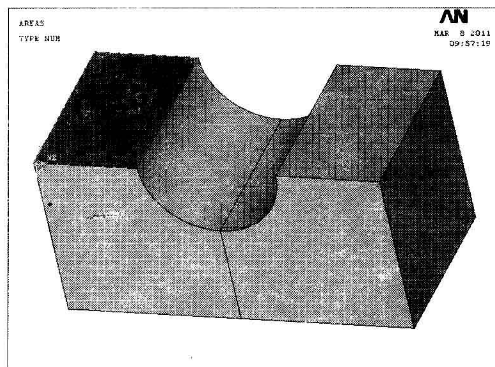


图 25－42　查询面编号效果图

默认情况下，误差估计功能处于激活状态，可通过 Utility Menu→List→Results→Options 或 Main Menu→General Postproc→Options for Output 命令控制，如图 25－43 所示。注意：误差估计前需关闭 PowerGraphics 显示方式。

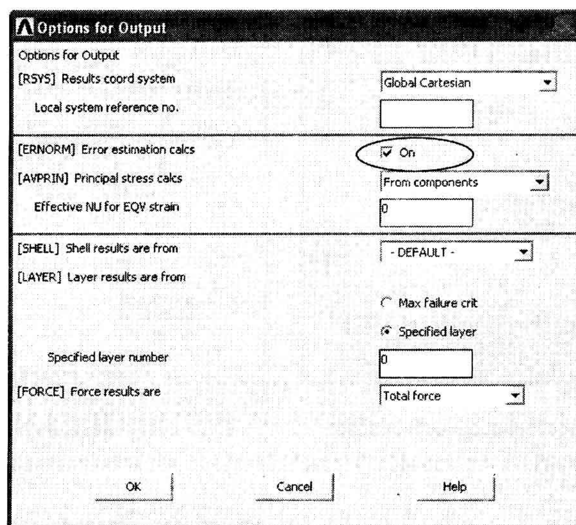


图 25－43　Options for Ouput 对话框

1. 图形方式显示误差结果

执行 Main Menu→General Postproc→Plot Results→Element Solu 命令，弹出 Contour Element Solution Data 对话框，选择显示内容，如能量误差估计，如图 25 – 44 所示。单击 OK 按钮确认，生成能量误差估计如图 25 – 45 所示。

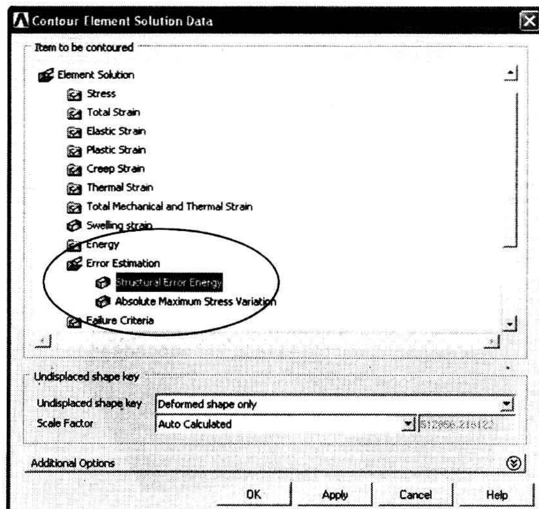


图 25 – 44　Contour Element Solution Data 对话框

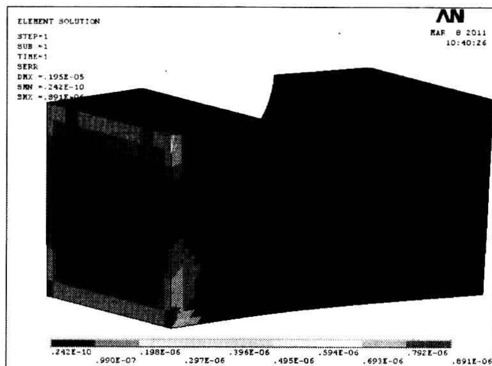


图 25 – 45　结构分析能量误差估计效果图

2. 列表方式显示误差结果

执行 Main Menu→General Postproc→List Results→Element Solu 命令，弹出 List Element Solution Data 对话框，选择显示内容，如能量误差估计，如图 25 – 46 所示。单击 OK 按钮确认，生成能量误差估计如图 25 – 47 所示。

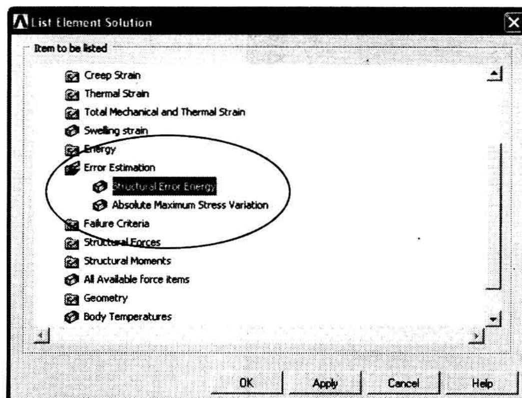


图 25 – 46　List Element Solution Data 对话框

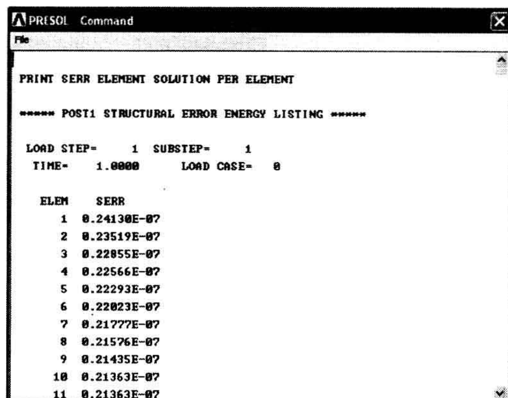


图 25 – 47　结构分析能量误差估计效果图

25.2　时间后处理器

时间历程后处理器（POST26）用于查看模型指定点的分析结果随时间、频率、载荷步等的变化情况，可以实现分析结果的图形显示、列表显示和相关的数学操作。执行 Main

Menu→TimeHist Postpro 命令，进入 ANSYS 的时间历程后处理器。

25.2.1 时间历程变量观察器

进入时间历程后处理器后，弹出如图 25－48 所示的时间历程变量观察器。

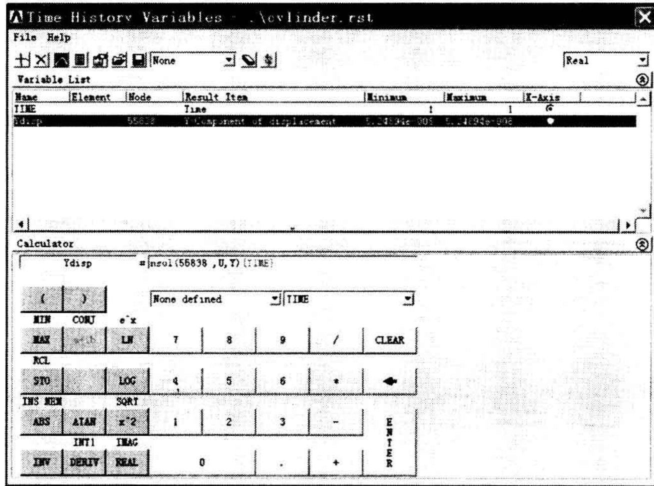


图 25－48　时间历程变量观察器

利用时间历程变量观察器的工具栏可控制大多数的时间历程后处理操作，各常用按钮的功能概括如下：

1. 工具条

Add Data：添加变量按钮，打开 Add Time－History Variable 对话框。

Delete Data：删除选定变量按钮。

Graph Data：由预先定义的属性，拟合数据曲线，最多可同时显示 10 个变量。

List Data：生成数据列表，最多可同时包含 6 个变量。

Properties：定义选定的变量和全局的某些属性。

Import Data：导入数据信息按钮，将已有信息导入变量空间。

Export Data：将数据输出到文件或 APDL 数据数组中。

Clear Time－History Data：删除所有定义的变量及其设置。

2. 变量列表区域

该区域显示了已定义的时间历程变量，用户可以从该列表中选择数据进行各种操作。变量列表区域如图 25－49 所示。

3. 计算区域

Ydisp 变量名输入区域：用于定义导出变量的名称。

nsol(55838 ,U,Y)(TIME) 表达式输入区域：用于定义导出变量的表达式。

None defined APDL 变量下拉菜单：在输入表达式时，选择预定义的 APDL 变量。

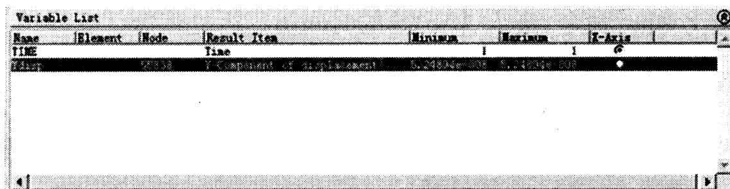


图 25－49　变量列表区域

TIME 时间历程变量下拉菜单：输入表达式时，选择已存储的变量。

计算器区域：定义了各种标准的数学函数和操作符，方便用户调用，如图 25－50 所示。

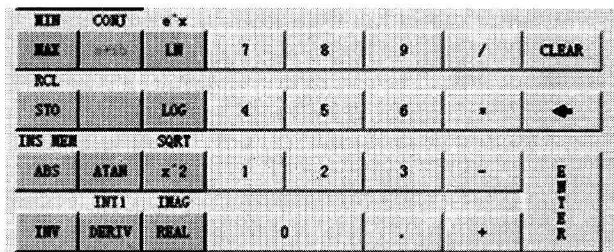


图 25－50　计算器区域

25.2.2　定义变量

在时间后处理器中，首先需要定义结果数据（节点解、单元解、反作用力解等）为一变量，进而得到时间历程曲线。

执行 Main Menu→TimeHist Postpro→Define Variables 命令，弹出 Defined Time－History Variables 对话框，显示了已经定义的所有变量，如图 25－51 所示。单击 Add 按钮，弹出 Add Time－History Variable 对话框，选择添加变量的内容，如节点自由度结果，如图 25－52所示。单击 OK 按钮确认，弹出节点拾取框，拾取查看的节点。单击 OK 按钮确认，弹出 Define Nodal Data 对话框，输入定义变量的名称（如 Ydisp），选择变量对应的结果（如 Y 方向的位移），如图 25－53 所示。单击 OK 按钮确认，完成变量的定义。

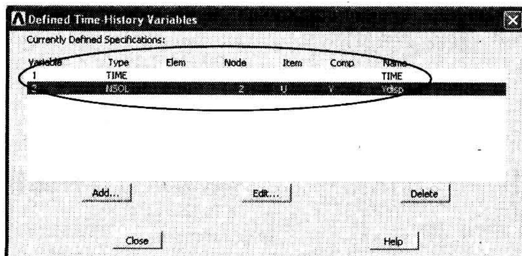


图 25－51　Defined Time－History Variables 对话框

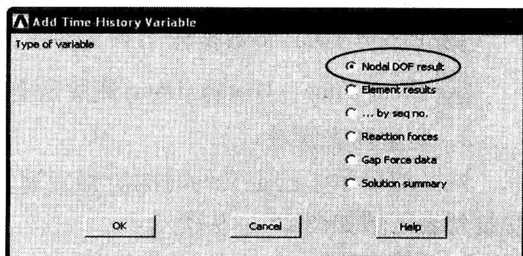


图 25－52　Add Time－History Variable 对话框

若要修改或删除变量，只需在 Defined Time－History Variables 对话框选中变量名称，单击 Edit 按钮或 Delete 按钮即可。

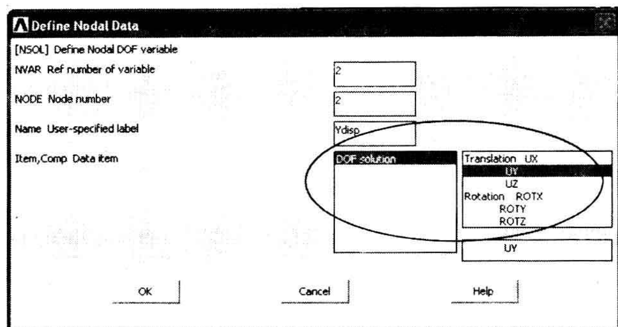


图 25 - 53　Define Nodal Data 对话框

25.2.3　变量运算

为了获取节点速度、加速度等结果随时间的变化,需要对位移结果进行求导运算。

执行 Main Menu→TimeHist Postpro→Variable Viewer 命令,弹出 Time History Variables 对话框,显示了已经定义的所有变量。在 Calculator 部分输入计算变量的名称(如 Yvelocity),单击 DERIV 函数按钮,在已有变量选择框中依次选择 Ydisp 和 TIME 项,如图 25 - 54所示。单击 ENTER 按钮确认,完成变量的运算,如图 25 - 55 所示。

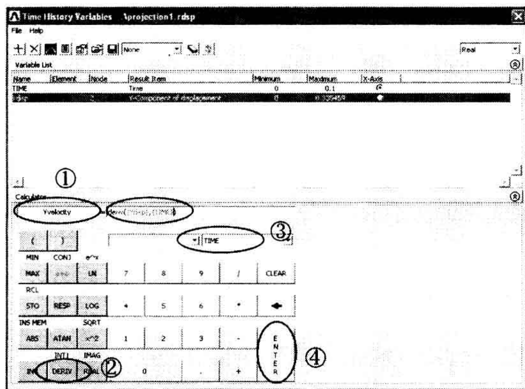


图 25 - 54　Time History Variables 对话框(变量定义前)

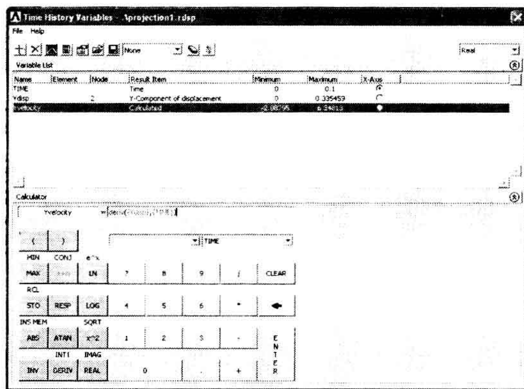


图 25 - 55　Time History Variables 对话框(变量定义后)

25.2.4　图形方式显示结果

在 Time History Variables 对话框中选择需要显示的变量,如 Ydisp 或 Yvelocity,单击 Graph Data(▲)按钮,即可显示 Y 方向的位移或速度随时间的变化过程,如图 25 - 56 和图 25 - 57 所示。

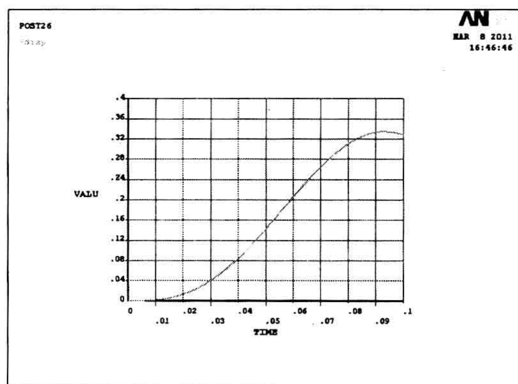


图 25 – 56　节点 Y 方向位移随时间变化曲线图

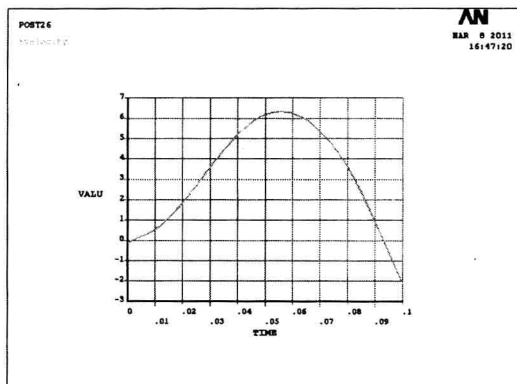


图 25 – 57　节点 Y 方向速度随时间变化曲线图

25.2.5　列表方式显示结果

在 Time History Variables 对话框中选择需要显示的变量，如 Ydisp 或 Yvelocity，单击 List Data（ ）按钮，即可列表显示 Y 方向的位移或速度随时间的变化过程，如图 25 – 58 和图 25 – 59 所示。

PRVAR　Command

File

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	2 UY Ydisp
0.0000	0.00000
0.40000E-02	0.164289E-03
0.80000E-02	0.973595E-03
0.12000E-01	0.383716E-02
0.16000E-01	0.689998E-02
0.20000E-01	0.130155E-01
0.24000E-01	0.217226E-01
0.28000E-01	0.332281E-01
0.32000E-01	0.475967E-01
0.36000E-01	0.647474E-01
0.40000E-01	0.844579E-01
0.44000E-01	0.106376
0.48000E-01	0.130036
0.52000E-01	0.154886

图 25 – 58　节点 Y 方向位移随时间变化数据表

PRVAR　Command

File

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

TIME	3 DERI Yvelocity
0.0000	-0.115720
0.40000E-02	0.121699
0.80000E-02	0.359119
0.12000E-01	0.740798
0.16000E-01	1.24729
0.20000E-01	1.85282
0.24000E-01	2.52657
0.28000E-01	3.23427
0.32000E-01	3.93992
0.36000E-01	4.60765
0.40000E-01	5.20352
0.44000E-01	5.69724
0.48000E-01	6.06375

图 25 – 59　节点 Y 方向速度随时间变化数据表

25.2.6　变量格式设置

1. 图形变量设置

执行 Main Menu→TimeHist Postpro→Settings→Graph 命令，弹出 Graph Settings 对话框，可以定义图形显示变量的范围、横轴坐标内容、复杂变量的显示方式等内容，如图 25 – 60所示。

2. 列表变量设置

执行 Main Menu→TimeHist Postpro→Settings→List 命令，弹出 List Settings 对话框，可以定义列表显示变量的名称、时间变化范围、列表变量数目、每页输出的行数等内容，如图 25 – 61 所示。

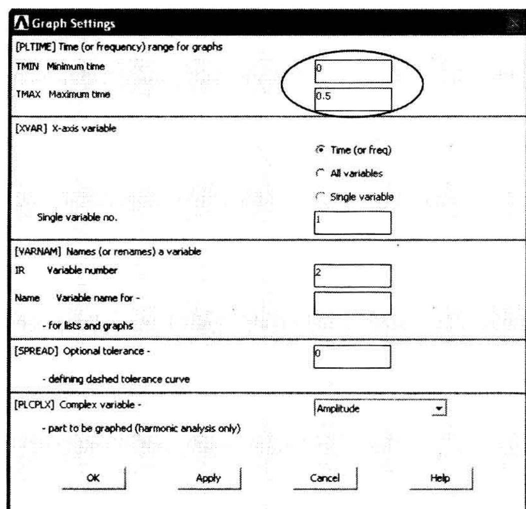


图 25－60　Graph Settings 对话框

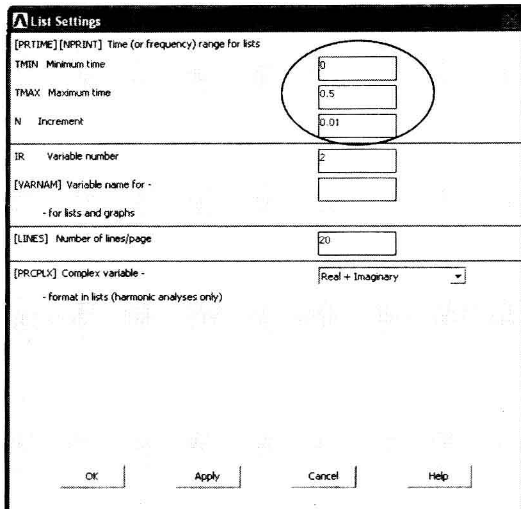


图 25－61　List Settings 对话框

25.2.7　动画方式显示结果

执行 Utility Menu→PlotCtrls→Animate→Over Time 命令，弹出 Animate Over Time 对话框。指定按时间范围生成动画，同时选择动画内容（如结构变形等），如图 25－62 所示。单击 OK 按钮确认，在视图窗口中生成随时间变化的动画。

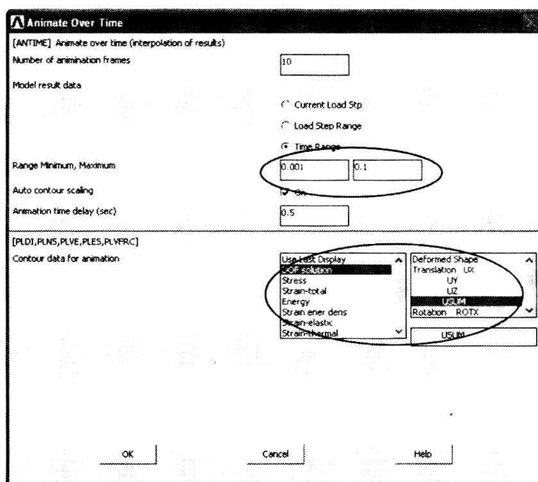


图 25－62　Animate Over Time 对话框

第 26 章　ANSYS 分析实例

本章通过静力分析和模态分析两个实例说明 ANSYS 的分析流程，同时在第 27 章利用 MATLAB 程序对 ANSYS 计算结果进行了验证。

26.1　ANSYS 静力分析实例

静力分析主要计算在固定不变或随时间变化非常缓慢的载荷作用下，结构的响应（如反力、位移、应变、应力等）。计算过程中，不考虑惯性和阻尼的影响。

26.1.1　问题描述

某支撑结构的简化模型及其几何尺寸如图 26－1 所示，单位均为 m。集中力 F_1 为 8kN，F_2 为 6kN。结构的弹性模量为 1.98×10^{11}Pa，泊松比为 0.3，密度为 7800kg/m^3。分析结构的最大应力和变形结果。

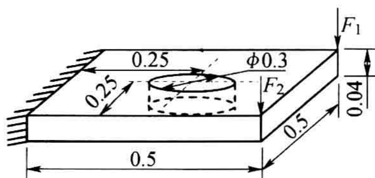


图 26－1　某支撑结构简化模型

26.1.2　模型特点分析

本部分内容重点分析结构的组成特点和加载情况确定后续分析的建模方法、单元选型、离散方法和加载策略等内容。

建模方法：由图 26－1 可知，该简化模型较为简单，可采用 ANSYS 的自顶向下方式建模。

单元选型：鉴于模型厚度尺寸较大，故选用实体单元进行分析。

离散方法：该模型通过工作平面切割，可分为四个较为规则的部分，进而采用映射网格划分，以保证较高的计算精度。

加载策略：模型仅受集中载荷，且位于模型角点上。因此，可通过关键点加载方式实现。

26.1.3　定义工作文件名和分析标题

1．定义工作文件名

执行 Utility Menu→File→Change Jobname 命令，在弹出的对话框中输入 Static Analysis，选中 New log and error files 复选框，单击 OK 按钮确认。

2. 定义分析标题

执行 Utility Menu→File→Change Title 命令，在弹出的对话框中输入 Deformation and stress calculation of support，单击 OK 按钮确认。

26.1.4 建立几何模型

1. 创建长方体

执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Volumes→Block→By Dimensions 命令，弹出 Create Block by Dimensions 对话框，如图 26－2 所示。在对话框中分别输入以下数据：X1 和 X2 输入框依次输入 0 和 0.5，Y1 和 Y2 输入框依次输入 0 和 0.5，Z1 和 Z2 输入框依次输入 0 和 0.04。单击 OK 按钮确认，生成模型如图 26－3 所示。

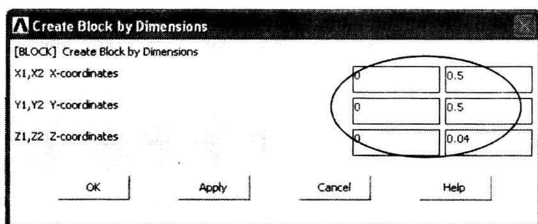


图 26－2 Create Block by Dimensions 对话框

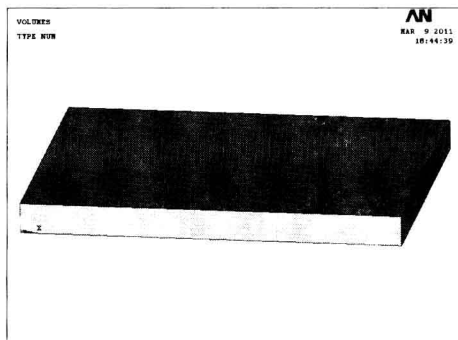


图 26－3 生成长方体效果图

2. 创建圆柱体

执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Create→Volumes→Cylinder→Solid Cylinder 命令，弹出 Create Block by Dimensions 对话框，如图 26－4 所示。在对话框中分别输入以下数据：WP X 和 Y 输入框中依次输入 0.25 和 0.25，即定义圆柱体中心位置；在 Radius 框中输入圆柱体半径为 0.15；在 Depth 框中输入圆柱体高度为 0.04。单击 OK 按钮确认，生成模型如图 26－5 所示。

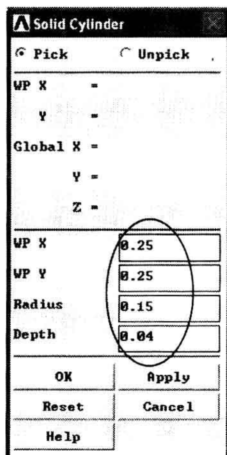


图 26－4 Solid Cylinder 拾取框

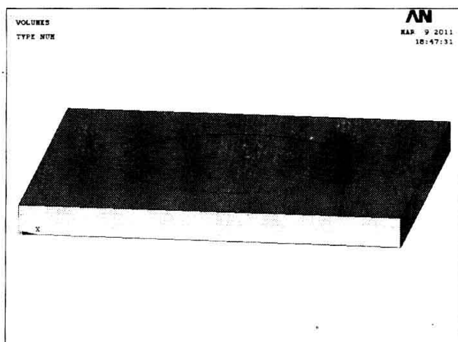


图 26－5 生成长方体和圆柱体效果图

3. 布尔运算生成几何模型

执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Operate→Booleans→Subtract→Volumes 命令，弹出 Subtract Volumes 拾取框。选择长方体，单击 OK 按钮确认；选择圆柱体，单击 OK 按钮，完成体相减操作。生成的几何模型如图 26－6 所示。

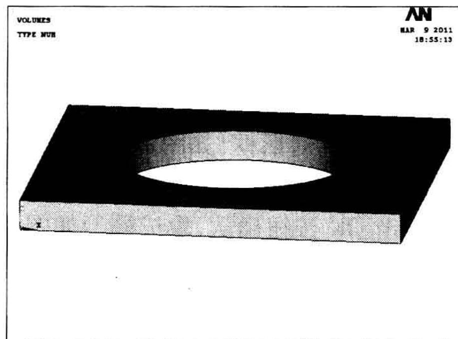


图 26－6　仿真模型效果图

26.1.5　定义材料属性

定义材料的弹性模量和泊松比：执行 Main Menu→Preprocessor→Material Props→Material Models 命令，弹出 Define Material Model Behavior 对话框，如图 26－7 所示。在 Material Models Available 栏中，依次选择 Structural→Linear→Elastic→Isotropic 命令弹出正交线弹性材料参数定义对话框，输入材料的弹性模量 EX $=1.93\times10^{11}$，泊松比 PRXY $=0.3$，如图 26－8 所示。

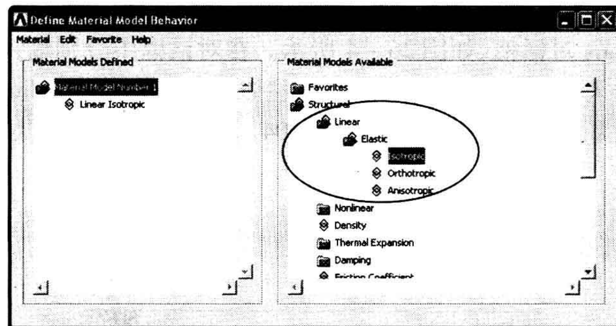


图 26－7　Define Material Model Behavior 对话框

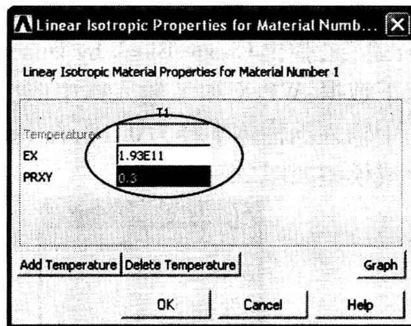


图 26－8　Linear Isotropic Properties for Material 对话框

26.1.6　定义单元类型

1. 定义单元类型为 SOLID45

执行 Main Menu→Preprocessor→Element Type→Add/Edit/Delete 命令，弹出 Element Type 对话框。单击 Add 按钮，弹出 Library of Element Types 对话框，选择 SOLID45 单元，如图 26－9 所示。单击 OK 按钮，完成单元类型定义。

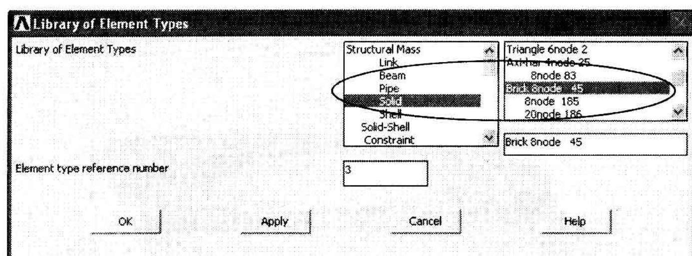


图 26 - 9 Library of Element Types 对话框

2. 修改单元形函数

为了与 MATLAB 计算结果进行对比，设置 SOLID45 单元的形函数中不包含附加函数。在 Element Types 对话框中，单击 Options 按钮。弹出 SOLID45 单元选项对话框，设置 Extra displacement shapes K1 为 Exclude，即不包含附加位移形函数，如图 26 - 10 所示。

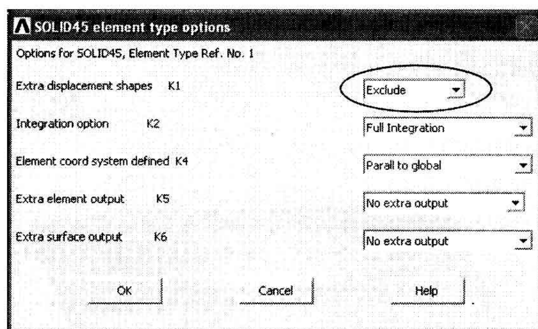


图 26 - 10 SOLID45 element type options 对话框

26.1.7 划分网格

通过工作平面切割模型为规则形状，进而完成映射网格划分。

1. 工作平面切割实体模型

(1) 移动工作平面至(0.25,0.25,0)处：执行 Utility Menu→WorkPlane→Offset WP to→XYZ Locations 命令，弹出位置拾取框，在输入栏中，输入坐标位置(0.25,0.25,0)，单击 OK 按钮确认。

(2) 旋转工作平面使 XY 工作平面垂直于被切割的实体：执行 Utility Menu→WorkPlane→Offset WP by Increments 命令，弹出工作平面偏移对话框，增加转角控制滑动块至 90°位置，单击正 Y 轴方向，即绕 Y 轴正方向旋转 90°，单击 OK 按钮确认。

(3) 使用工作平面切割实体：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Operate→Booleans→Divide→Volu by WrkPlane 命令，弹出实体拾取对话框，选择生成的实体，单击 OK 按钮确认，生成的模型如图 26 - 11 所示。

(4) 旋转工作平面：执行 Utility Menu→WorkPlane→Offset WP by Increments 命令，弹出工作平面偏移对话框，增加转角控制滑动块至 90°位置，单击正 X 轴方向，即绕 X 轴正方向旋转 90°，单击 OK 按钮确认。

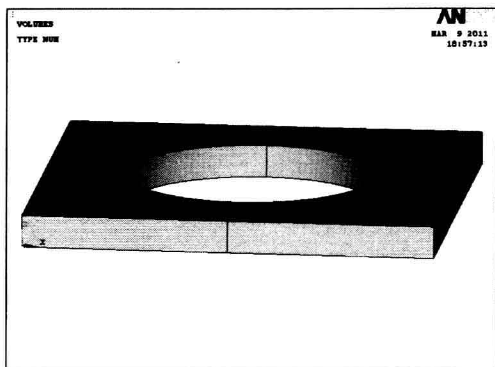


图 26 - 11　一次切割后模型效果图

（5）使用工作平面切割实体：执行 Main Menu→Preprocessor→Modeling→Operate→Booleans→Divide→Volu by WrkPlane 命令，弹出实体拾取对话框，选择生成的两个实体，单击 OK 按钮确认，生成的模型如图 26 - 12 所示。

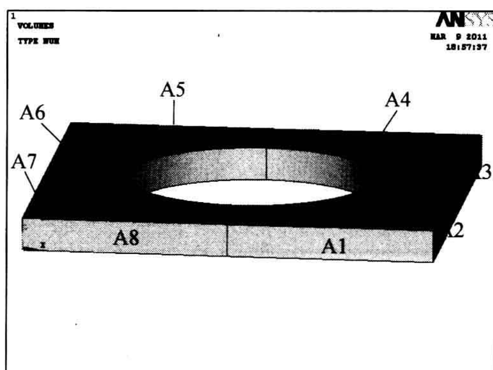


图 26 - 12　二次切割后模型效果图

（6）将工作平面恢复至整体笛卡尔坐标系位置：执行 Utility Menu→WorkPlane→Align WP with→Global Cartesian 命令。

（7）连接面使两个体分别构成规则形体：执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Concatenate→Areas 命令，弹出面拾取框，选择图 26 - 12 中的面 A1 和 A2，单击 Apply 按钮确认；选择面 A3 和 A4，单击 Apply 按钮确认；选择面 A5 和 A6，单击 Apply 按钮确认；选择面 A7 和 A8，单击 OK 按钮确认。

2. 定义单元大小

执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→Size Cntrls→ManulSize→Global→Size 命令，弹出 Global Element Sizes 对话框，输入单元边长为 0.04，如图 26 - 13 所示。

3. 映射网格划分

执行 Main Menu→Preprocessor→Meshing→MeshTool 命令，弹出 MeshTool 对话框。选择六面体单元和映射网格划分方法，如图 23 - 18 所示。单击 Mesh 按钮，弹出实体拾取框，选择生成的体，即可完成体的映射网格划分，如图 26 - 14 所示。

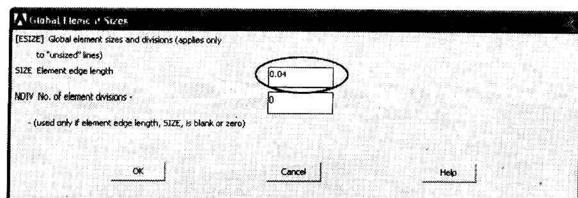


图 26－13　单元边长为 0.04

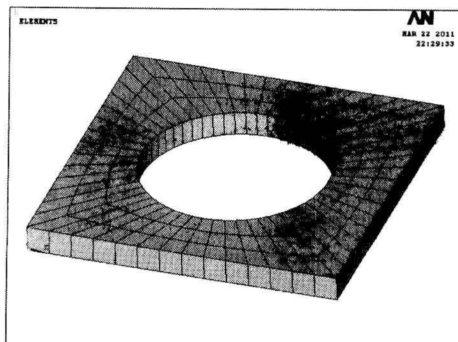


图 26－14　模型映射网格划分效果图

至此，完成了 ANSYS 对模型映射网格划分过程。

26.1.8　设置边界条件

该处选用节点加载方式施加固定边界条件。

1. 选择固定约束面上的所有节点

执行 Utility Menu→Select→Entities 命令，弹出 Select Entities 对话框。选择对象为 Nodes；方法为 By Location；根据 X 轴的坐标选取，指定 X 坐标为 -0.00001 ~ 0.00001，即 X=0 处的节点，如图 26－15 所示。通过指定较小变化范围方式选取对象可以更为有效地选择目标，避免因建模或离散过程中产生的误差，而导致无法选择合适对象的问题。单击 OK 按钮确认，完成节点选取过程。

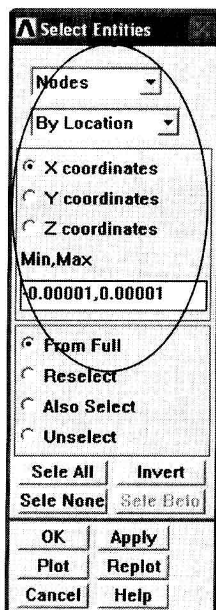


图 26－15　Select Entities 对话框

2. 在节点上定义位移全约束

执行 Main Menu→Solution→Define Loads→Apply→Structural→Displacement→On Nodes 命令，弹出节点拾取框，单击 Pick All 按钮确认，即选择所有已选中的节点。弹出 Apply U,ROT on Nodes 对话框，如图 26－16 所示。通过 Lab2 选择约束所有自由度，即 All DOF；通过 VALUE 定义自由度值为 0。单击 OK 按钮确认，完成位移约束的施加，如图 26－17 所示。

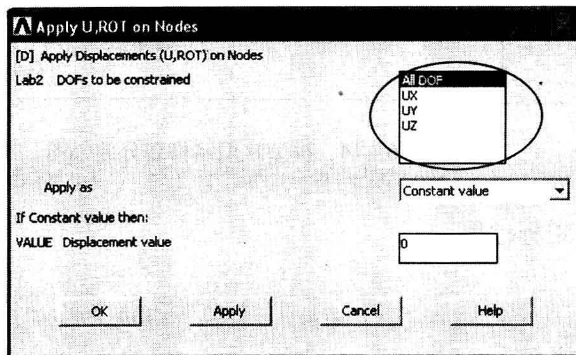


图 26－16 Apply U,ROT on Nodes 对话框

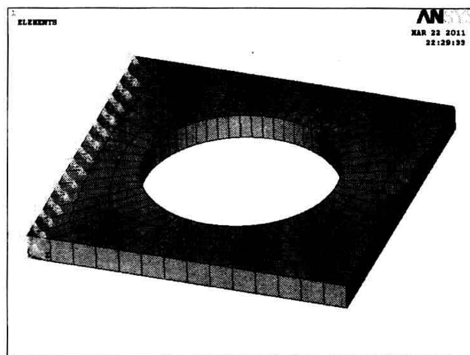


图 26－17 节点位移全约束效果图

3. 选择所有节点

执行 Utility Menu→Select→Everything 命令，保证后续操作的顺利进行。

26.1.9 求解设置和加载

1. 施加集中载荷 F_1

执行 Main Menu→Solution→Define Loads→Apply→Structural→Force/Moment→On Keypoints 命令，弹出关键点拾取框，拾取图 26－12 的关键点 KP1，单击 OK 按钮确认。同时，弹出 Apply F/M on KPs 对话框，选择施加 Z 方向的集中力，大小为 －8000，即沿 Z 轴负方向，如图 26－18 所示。

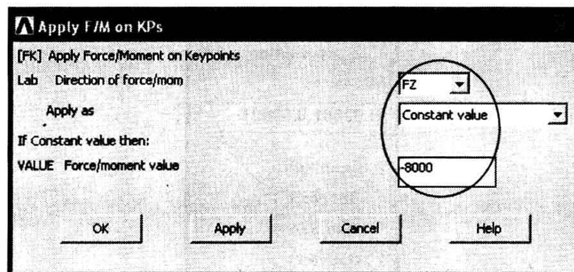


图 26－18 Apply F/M on KPs 对话框

2. 施加集中载荷 F_2

执行 Main Menu→Solution→Define Loads→Apply→Structural→Force/Moment→On Keypoints 命令，弹出关键点拾取框，拾取图 26－12 的关键点 KP2，单击 OK 按钮确认。同时，弹出 Apply F/M on KPs 对话框，选择施加 Z 方向的集中力，大小为 －6000。

3. 求解

执行 Main Menu→Solution→Solve→Current LS 命令，弹出模型信息检查窗口和 Solve Current Load Step 对话框。单击 Solve Current Load Step 对话框的 OK 按钮，开始求解。

26.1.10 结果查看和分析

1. 结构变形云图

执行 Main Menu→General Postproc→Plot Results→Deformed Shape 命令，弹出 Plot Deformed Shpae 对话框。选择显示变形后结果及变形前框架方式显示变形结果，如图 26-19所示。

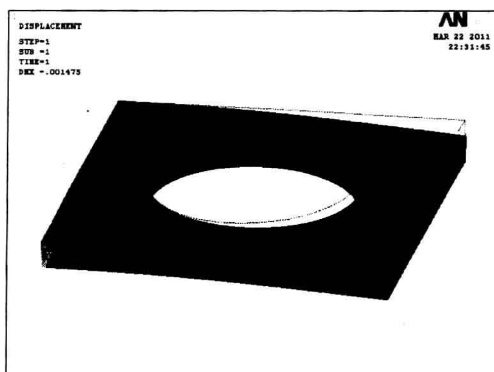


图 26-19 结构变形云图

2. 列表显示节点变形结果

执行 Main Menu→General Postproc→List Results→Nodal Solution 命令，弹出 List Nodal Solution 对话框。选择 Nodal Solution→DOF Solution→Displacement vector sum 命令，如图 26-20 所示。生成节点变形结果文件如图 26-21 所示。

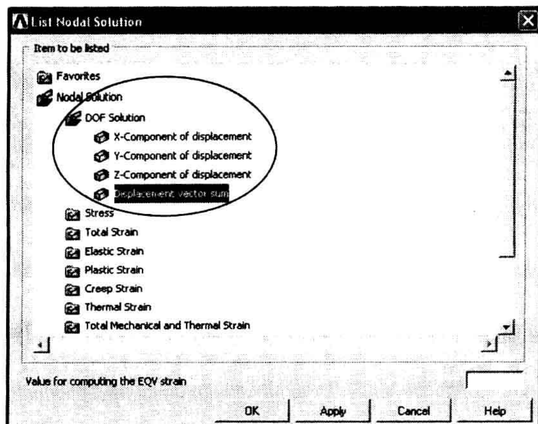


图 26-20 List Nodal Solution 对话框

```
PRNSOL Command
File

PRINT U    NODAL SOLUTION PER NODE

 ***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

 LOAD STEP=     1  SUBSTEP=     1
  TIME=    1.0000      LOAD CASE=   0

 THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL
COORDINATE SYSTEM

   NODE       UX           UY           UZ           USUM
      1 -0.31952E-05-0.17312E-06-0.10936E-04 0.11395E-04
      2  0.31951E-05 0.17313E-06-0.10936E-04 0.11395E-04
      3   0.0000       0.0000       0.0000       0.0000
      4  0.32240E-05 0.11093E-06-0.51344E-05 0.60638E-05
      5  0.17914E-05 0.35853E-07-0.98143E-06 0.20429E-05
      6   0.0000       0.0000       0.0000       0.0000
      7 -0.32241E-05-0.11092E-06-0.51345E-05 0.60638E-05
      8 -0.17914E-05-0.35848E-07-0.98146E-06 0.20430E-05
      9 -0.59589E-04 0.70149E-05-0.33533E-03 0.34066E-03
     10 -0.36183E-05 0.16784E-05-0.11943E-04 0.12591E-04
     11 -0.49934E-05 0.34693E-05-0.15326E-04 0.16400E-04
     12 -0.72513E-05 0.51692E-05-0.21247E-04 0.23038E-04
     13 -0.10302E-04 0.67323E-05-0.29988E-04 0.32415E-04
     14 -0.14033E-04 0.80933E-05-0.41911E-04 0.44933E-04
     15 -0.18298E-04 0.91803E-05-0.57398E-04 0.60940E-04
     16 -0.22895E-04 0.99272E-05-0.76702E-04 0.80735E-04
     17 -0.27622E-04 0.10449E-04-0.10020E-03 0.10446E-03
```

图 26-21 结构变形列表文件

3. 显示结构当量云图

执行 Main Menu→General Postproc→Plot Results→Contour Plot→Nodal Solu 命令，弹出 Contour Nodal Solution Data 对话框。选择显示当量应力(von Mises stress)云图，单击 OK 按钮确认，如图 26 - 22 所示。

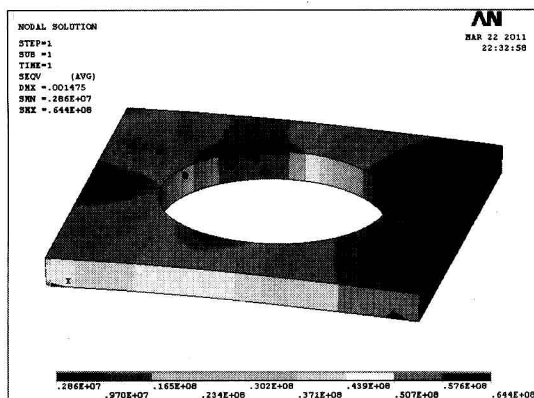


图 26 - 22. 结构当量应力云图

由图 26 - 19 和图 26 - 22 可知，结构的最大变形为 0.001475m，最大应力为64.4MPa。由于圆孔位置存在应力集中现象，故最大应力产生于圆孔下侧位置。在施加集中力位置(KP1 和 KP2)也产生了应力集中现象，故分析的应力结果稍大于端面其他位置。综上所述，上述分析结果合理。

26.2 ANSYS 模态分析实例

模态分析用于确定结构或部件的固有特性，即结构的固有频率和振型及模态参与系数等。它们是承受动态载荷的结构设计的重要参数，也是其他动力学问题(瞬态动力学问题、谐响应问题、随机振动问题等)分析的基础。

26.2.1 问题描述

实际应用过程中，图 26 - 1 所示的支撑结构常受到固定端的简谐振动。因此确定该支撑结构的固有频率和振型，对结构设计和布局优化有重要意义。模态分析过程简述如下：

26.2.2 定义文件名和工作标题

1. 定义工作文件名

执行 Utility Menu→File→Change Jobname 命令，在弹出的对话框中输入 Modal Analysis，选中 New log and error files 复选框，单击 OK 按钮。

2. 定义分析标题

执行 Utility Menu→File→Change Title 命令，在弹出的对话框中输入 Frequency and mode calculation of support，单击 OK 按钮。

26.2.3 建立几何模型

实现过程参见 26.1.4 分节。

26.2.4 材料属性定义

模态分析中需要形成模型的整体刚度矩阵和质量矩阵，因此，除定义材料的刚度信息外，还需要材料的密度信息。

1. 定义材料的弹性模量和泊松比

执行 Main Menu→Preprocessor→Material Props→Material Models 命令，弹出 Define Material Model Behavior 对话框，如图 26－7 所示。在 Material Models Available 栏中，依次选择 Structural→Linear→Elastic→Isotropic 命令，弹出正交线弹性材料参数定义对话框，输入材料的弹性模量 $EX = 1.93 \times 10^{11}$，泊松比 PRXY＝0.3，如图 26－8 所示。

2. 定义材料密度

执行 Main Menu→Preprocessor→Material Props→Material Models 命令，弹出 Define Material Model Behavior 对话框，如图 26－7 所示。在 Material Models Available 栏中，依次选择 Structural→Density 命令，弹出材料密度定义对话框，输入材料的密度为 7800，如图 26－23所示。

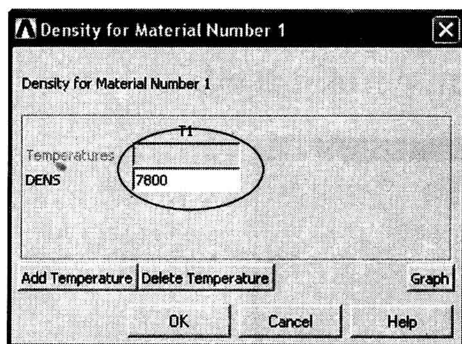


图 26－23　Density for Material 对话框

26.2.5 定义单元类型

实现过程参见 26.1.6 分节。

26.2.6 划分网格

实现过程参见 26.1.7 分节。

26.2.7 设置边界条件

实现过程参见 26.1.8 分节。

26.2.8 求解设置和加载

1. 选择分析类型

执行 Main Menu→Solution→Analysis Type→New Analysis 命令，弹出 NewAnalysis 对话

框，选择模态分析，如图 26－24 所示。

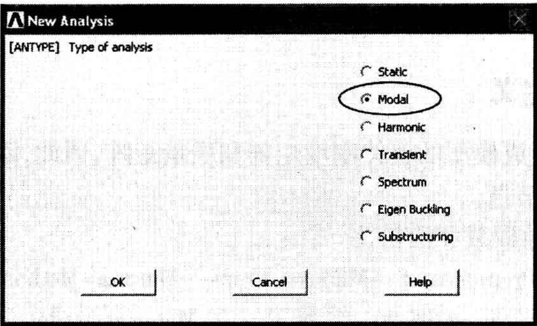


图 26－24　New Analysis 对话框

2. 求解器选择和求解参数设置

执行 Main Menu→Solution→Analysis Type→Analysis Options 命令，弹出 Modal Analysis 对话框，选择求解方法为 Block Lanczos，提取结构前五阶模态结果；选中 MXPAND 复选框，即进行模态扩展，以观察振型；指定模态扩展阶数为 5，如图 26－25 所示。单击 OK 按钮确认，弹出 Block Lanczos Method 对话框，可指定提取频率的起止范围和振型归一化方式。该处采用其默认设置，即起始频率为 0，对振型采用质量矩阵归一化方式，如图 26－26所示。设置完毕后，单击 OK 按钮确认。

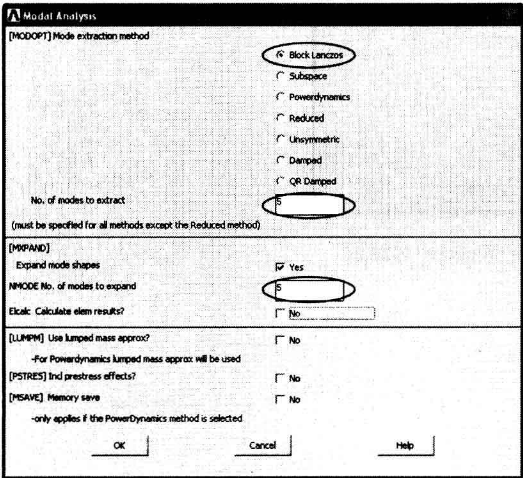


图 26－25　Modal Analysis 对话框

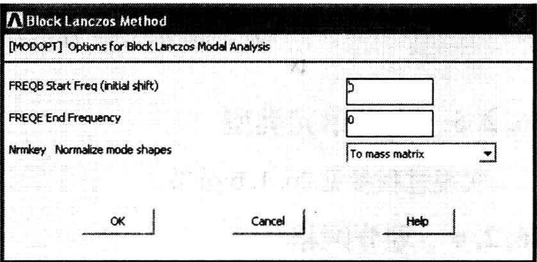


图 26－26　Block Lanczos Method 对话框

3. 加载

鉴于该处不考虑预应力效应，故加载过程可以忽略。

4. 求解

执行 Main Menu→Solution→Solve→Current LS 命令，弹出模型信息检查窗口和 Solve Current Load Step 对话框。单击 Solve Current Load Step 对话框的 OK 按钮，开始求解。

26.2.9 结果查看和分析

1. 列表显示结构固有频率结果

执行 Main Menu→General Postproc→Results Summary 命令，弹出分析的结果信息，包括固有频率、载荷步和子步等信息，如图 26-27 所示。

SET,LIST Command

File

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	131.51	1	1	1
2	297.15	1	2	2
3	692.68	1	3	3
4	828.34	1	4	4
5	1133.2	1	5	5

图 26-27 总体结果信息输出列表

2. 图形显示结构固有振型结果

(1) 读取振型阶次：执行 Main Menu→General Postproc→Read Results→"选择方式"命令，如单击 First Set 选择第一阶固有频率。

(2) 显示振型云图：执行 Main Menu→General Postproc→Plot Results→Deformed Shape 命令，弹出 Plot Deformed Shpae 对话框。选择显示变形后结果及变形前框架方式显示振型结果，如图 26-28 所示。

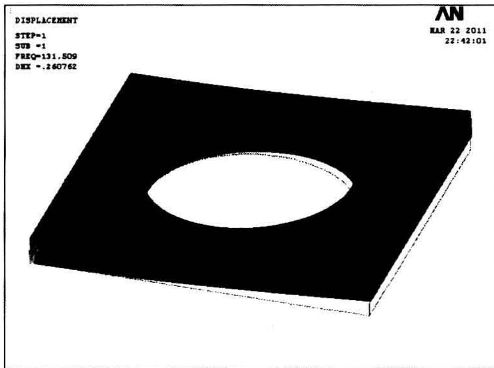


图 26-28 结构一阶振型云图

(3) 依次执行步骤(1)~(2)可显示结构各阶振型云图。结构的二阶和三阶振型如图 26-29 和图 26-30 所示。

3. 列表显示结构固有振型结果

(1) 读取振型阶次：执行 Main Menu→General Postproc→Read Results→"选择方式"命令，如单击 First Set 选择一阶固有频率。

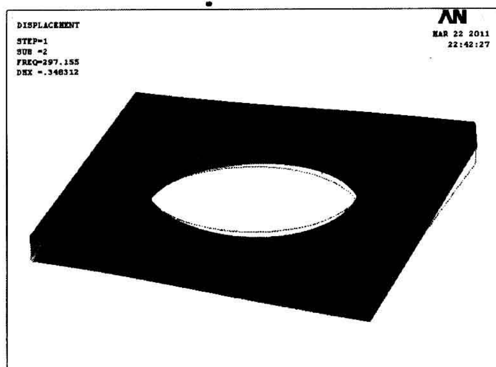


图 26－29　结构二阶振型云图

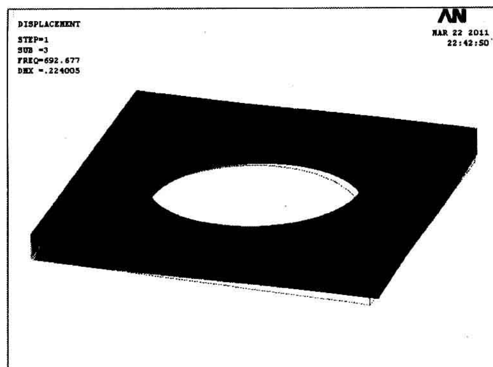


图 26－30　结构三阶振型云图

（2）列表显示振型结果：执行 Main Menu→General Postproc→List Results→Nodal Solution 命令，弹出 List Nodal Solution 对话框。选择 DOF Solution→Displacement vector sum 命令，即显示节点位移结果，如图 26－31 所示。单击 OK 按钮确认，生成振型结果列表如图 26－32 所示。

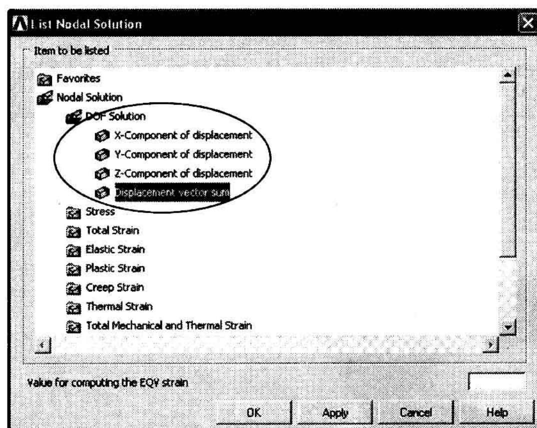


图 26－31　List Nodal Solution 对话框

```
PRNSOL  Command
File

PRINT U    NODAL SOLUTION PER NODE

 ****** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING ******

 LOAD STEP=     1  SUBSTEP=     1
  FREQ=    131.51      LOAD CASE=   0

 THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL
COORDINATE SYSTEM

   NODE       UX          UY          UZ          USUM
      1  0.74826E-03-0.15324E-12 0.26034E-02 0.27088E-02
      2 -0.74826E-03-0.90709E-14 0.26034E-02 0.27088E-02
      3   0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
      4 -0.74833E-03-0.36878E-13 0.12517E-02 0.14583E-02
      5 -0.42330E-03-0.40142E-13 0.26388E-03 0.49882E-03
      6   0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
      7  0.74833E-03-0.11895E-12 0.12517E-02 0.14583E-02
      8  0.42330E-03-0.52972E-13 0.26388E-03 0.49882E-03
      9  0.12133E-01-0.86949E-03 0.71850E-01 0.72873E-01
     10  0.85374E-03-0.39459E-03 0.28582E-02 0.30090E-02
     11  0.11647E-02-0.77923E-03 0.36355E-02 0.38962E-02
     12  0.16663E-02-0.11429E-02 0.49730E-02 0.53678E-02
     13  0.23367E-02-0.14719E-02 0.69304E-02 0.74604E-02
     14  0.31481E-02-0.17496E-02 0.95809E-02 0.10236E-01
     15  0.40637E-02-0.19590E-02 0.12998E-01 0.13759E-01
     16  0.50367E-02-0.20844E-02 0.17242E-01 0.18083E-01
     17  0.60214E-02-0.21492E-02 0.22335E-01 0.23232E-01
     18  0.70721E-02-0.21186E-02 0.28357E-01 0.29302E-01
     19  0.81554E-02-0.19883E-02 0.35325E-01 0.36309E-01
```

图 26－32　结构一阶振型数据列表

第27章　基于MATLAB的有限元分析实现方法

当研究某些新的物理现象和机理时,往往需要进行复杂的数值分析。商业软件提供了丰富的通用求解算法和显示方式等功能,但应用范围往往滞后于前沿研究。因此,基于商业软件的通用处理功能,自主开发应用程序,研究新物理现象的机理、仿真方法和应用,是从事科学研究的一个重要手段。本节通过MATLAB编写有限元程序验证第26章模型的静态和模态分析结果。

27.1　基于MATLAB的静力问题有限元分析程序

本节介绍基于MATLAB的静力问题有限元分析实现方法,以六面体单元为例介绍程序的实现过程。

27.1.1　有限元编程的关键技术

1.8节点正六面体单元

8节点正六面体单元每个节点包含3个移动自由度,如图27-1所示。

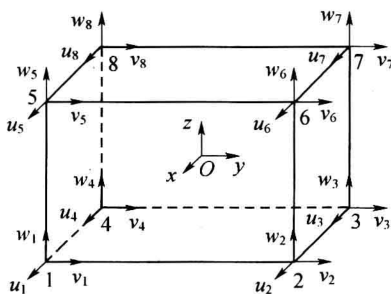


图27-1　8节点正面体单元

(1) 单元的几何和节点描述

每个8节点正六面体单元含有24个移动自由度(DOF),单元的节点位移列阵$\boldsymbol{u}^e$和节点力$\boldsymbol{f}^e$列阵可表示如下:

$$\underset{(24\times1)}{\boldsymbol{u}^e} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad | \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad | \quad \cdots \quad | \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8] \qquad (27-1)$$

$$\underset{(24\times1)}{\boldsymbol{f}^e} = [f_{1x} \quad f_{1y} \quad f_{1z} \quad | \quad f_{2x} \quad f_{2y} \quad f_{2z} \quad | \quad \cdots \quad | \quad f_{8x} \quad f_{8y} \quad f_{8z}] \qquad (27-2)$$

(2) 单元位移场描述

该单元有8个节点,每个方向的位移场可以设定8个待定系数。根据位移函数的选取原则(从低阶到高阶、位移确定性),选取单元的位移模式为

$$\begin{cases} u(x,y,z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5yz + a_6zx + a_7xyz \\ v(x,y,z) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4xy + b_5yz + b_6zx + b_7xyz \\ w(x,y,z) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5yz + c_6zx + c_7xyz \end{cases} \tag{27-3}$$

将节点自由度条件带入上式可求出待定系数(a_i, b_i, c_i)($i=0,1,2,\cdots,8$),进而可整理出单元的形函数矩阵为

$$\underset{(3\times1)}{\boldsymbol{u}}^{\text{point}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{array}\right] \cdot \underset{(24\times1)}{\boldsymbol{u}}^{e} = \underset{(3\times24)}{\boldsymbol{N}} \cdot \underset{(24\times1)}{\boldsymbol{u}}^{e} \tag{27-4}$$

得到单元形函数矩阵后,可以按照理论部分有限元分析的过程推导获得相应的几何矩阵、刚度矩阵、节点等效载荷列阵和刚度方程。

3) 单元应变/应变场描述

由弹性体几何方程可知,单元应变场可描述为

$$\underset{(6\times1)}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{point}} = \underset{6\times3}{[\partial]} \underset{(3\times1)}{\boldsymbol{u}}^{\text{point}} = \underset{6\times3}{[\partial]} \underset{(3\times24)}{\boldsymbol{N}} \underset{(24\times1)}{\boldsymbol{u}}^{e} = \underset{(6\times24)}{\boldsymbol{B}} \underset{(24\times1)}{\boldsymbol{u}}^{e} \tag{27-5}$$

式中:$\boldsymbol{B}$ 为几何函数矩阵;$\underset{6\times3}{[\partial]}$ 为几何方程的算子矩阵,可表示如下:

$$\underset{6\times3}{[\partial]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{27-6}$$

由弹性体物理方程可得单元应力场的表达式为

$$\underset{(6\times1)}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{point}} = \underset{(6\times6)}{\boldsymbol{D}} \underset{(6\times1)}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{point}} = \underset{(6\times6)}{\boldsymbol{D}} \underset{6\times3}{[\partial]} \underset{(3\times1)}{\boldsymbol{u}}^{\text{point}} = \underset{(6\times6)}{\boldsymbol{D}} \underset{6\times3}{[\partial]} \underset{(3\times24)}{\boldsymbol{N}} \underset{(24\times1)}{\boldsymbol{u}}^{e} = \underset{(6\times6)}{\boldsymbol{D}} \underset{(6\times24)}{\boldsymbol{B}} \underset{(24\times1)}{\boldsymbol{u}}^{e} \tag{27-7}$$

式中:$\boldsymbol{D}$ 为弹性系数矩阵。

(4) 单元刚度矩阵和节点等效载荷列阵

获得几何函数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 后,由刚度矩阵计算公式可得单元刚度矩阵为

$$\underset{(24\times24)}{\boldsymbol{K}}^{e} = \int_{\Omega^e} \underset{(24\times6)}{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \underset{(6\times6)}{\boldsymbol{D}} \underset{(6\times24)}{\boldsymbol{B}} \, \mathrm{d}\Omega^e \tag{27-8}$$

等效节点载荷列阵为

$$\underset{(24\times1)}{\boldsymbol{f}}^{e} = \int_{\Omega^e} \underset{(24\times3)}{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} \underset{(3\times1)}{\boldsymbol{b}} \, \mathrm{d}\Omega^e + \int_{S^e} \underset{(24\times3)}{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} \underset{(3\times1)}{\boldsymbol{p}} \, \mathrm{d}S^e \tag{27-9}$$

式中，$\underset{3\times1}{\boldsymbol{b}}$ 为体积力矢量；$\underset{3\times1}{\boldsymbol{p}}$ 为外力矢量。

(5) 整体刚度矩阵和平衡方程

组装上述单元刚度矩阵和等效节点载荷列阵，可得整体结构刚度矩阵和载荷列阵为

$$\boldsymbol{K} = \sum_{e=1}^{n} \underset{(24\times24)}{\boldsymbol{K}^{e}}$$

$$\boldsymbol{F} = \sum_{e=1}^{n} \underset{(24\times1)}{\boldsymbol{f}^{e}} \tag{27-10}$$

约束边界节点值，通过置 1 或置大数法处理相应的自由度，得到整体结构平衡方程为

$$\boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{F} \tag{27-11}$$

通过高斯消去法或其他迭代方法求解上述平衡方程，可得变形、应力和应变等结果。

2. 高斯积分方法

计算刚度矩阵时，往往需要计算复杂函数的定积分，且难以获得该积分函数的显示表达式。因此，有限元分析过程中，多采用数值积分方法来计算。

八节点正六面体单元的高斯积分形式可表示为

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_iA_jA_k f(x_i,y_j,z_k) \end{aligned} \tag{27-12}$$

式中：A_i，A_j 和 A_k 为一维高斯积分的权系数；x_i，y_j 和 z_k 为一维高斯积分的积分点位置参数。

常用高斯数值积分的参数见表 27－1。

表 27－1　常用高斯积分点位置和积分权系数表

积分点个数 n	积分点位置 x_i	积分权系数 A_i
1	0.000000000000000	2.000000000000000
2	±0.577350269189626	1.000000000000000
3	±0.774596669241483	0.555555555555556
	0.000000000000000	0.888888888888889
4	±0.861136311594053	0.347854845137454
	±0.339981043584856	0.652145154862546
5	±0.906179845938664	0.236926885056189
	±0.538469310105683	0.478628670499366
	0.000000000000000	0.568888888888889
6	±0.932469514203152	0.171324492379170
	±0.661209386466265	0.360761573048139
	±0.238619186083197	0.467913934572691

3. 边界条件处理方法

当给定边界条件位移值为 0 时，可以通过置 1 法进行矩阵处理。实现方法是：将刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中与位移为零的自由度对应的行和列的主对角元修改为 1，其他元素全部置零；同

时，将载荷矢量中与零位移的自由度对应的元素修改为0即可。

例如，存在自由度 $a_j=0$，在刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的第 j 行和第 j 列及载荷矢量的第 j 个元素做如下修改即可：

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & \cdots & n \end{array} \\
\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & \cdots & 0 & & \cdots & K_{1n} \\
K_{21} & K_{22} & \cdots & \vdots & & \cdots & K_{2n} \\
 & & & 0 & & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & & & \\
 & & & \vdots & & & \\
K_{n1} & K_{n2} & & 0 & & \cdots & K_{nn}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \end{array}
=
\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \end{array}
\qquad (27-13)
$$

若存在多个给定零位移约束，按照上述过程依次修改矩阵对应的元素即可。采用该方式引入强制边界条件较为简单，且不改变原有方程的阶数和节点未知量编号，但难以处理位移非零的情况。

27.1.2 程序原理及实现

该程序的原理如框图27－2所示。

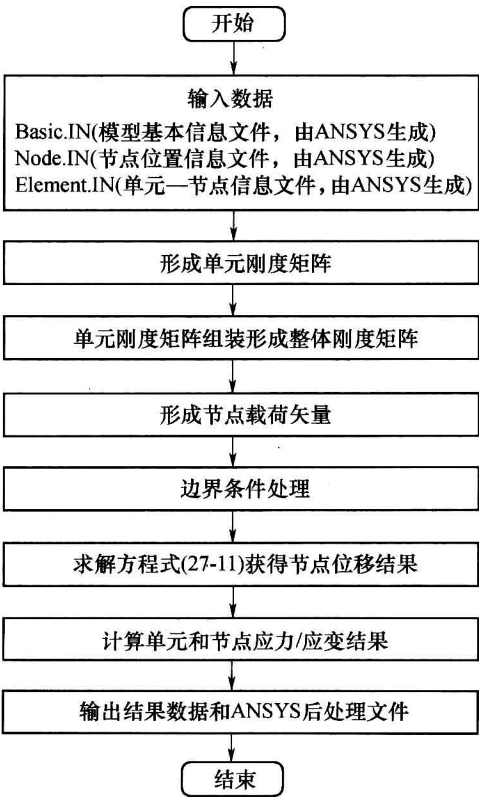


图27－2　MATLAB静力分析程序实现原理框图

其中，Basic. IN 文件主要存储模型的整体信息，如节点数量、单元数量、材料参数、约束位置和载荷参数等信息；Node. IN 文件用于存储节点编号和位置信息；Element. IN 文件用于存储单元—节点信息、单元材料特性参数等。上述 3 个文件的信息均可由 ANSYS 生成。

结果文件用于存储分析的位移、应力、应变等结果数据和供 ANSYS 后处理的数据文件，便于结果的图形显示。

1. 主要变量的含义

nel：单元总数。

nnel：单个单元包含的节点个数。

ndof：单个节点包含的自由度数。

nnode：节点总数。

sdof：模型总的自由度数。

edof：单个单元的自由度数。

emodule：材料弹性模量。

poisson：材料泊松比。

dist：模型偏移量，用于避开节点坐标值为 0 的位置，便于坐标数据读取。

k：单元刚度矩阵。

f：单元载荷矢量。

kk：模型总体刚度矩阵。

ff：模型总体载荷矢量。

disp：模型位移矢量。

eldisp：单元位移矢量。

stress：单元高斯积分点应力矩阵。

strain：单元高斯积分点应变矩阵。

wstress：全部单元的高斯积分点应力矩阵。

wstrain：全部单元的高斯积分点应变矩阵。

gcoord：节点—坐标信息矩阵。

nodes：单元—节点信息矩阵。

index：整体自由度—单元信息矢量。

point3：高斯积分点位置矢量。

weight3：高斯积分点权重系数矢量。

bcdof：约束自由度矢量。

bcval：约束自由度值矢量。

matmtx：材料弹性系数矩阵。

shape：形函数结果矢量。

dhdr、dhds、dhdt：形函数导数结果矢量。

nglx、ngly、nglz：存储 x、y 和 z 方向高斯积分点的个数。

jacob3：雅克比矩阵。

2. 子程序功能介绍

InputBasic:读取 BASIC. IN 文件中的模型基本信息和材料参数。

InputNode:读取 NODE. IN 文件中的节点—位置信息。

InputElement:读取 ELEMENT. IN 文件中的单元—节点信息。

fematiso:计算材料弹性系数矩阵。

feglqd3:获取高斯积分点位置和权重系数。

feisos8:计算形函数及其导数在高斯积分点的值。

fejacob3:计算单元的雅克比矩阵。

federiv3:计算各参数对整体坐标系的结果。

fekine3d:计算单元几何函数矩阵

feasmbl1:组装单元刚度矩阵到整体刚度矩阵。

feaplyc2:边界条件处理。

OutputDisp:输出静力分析的变形结果。

3. 程序使用方法和文件管理

MATLAB 静力分析程序的使用方法如下。

1) 由 ANSYS 生成模型数据文件

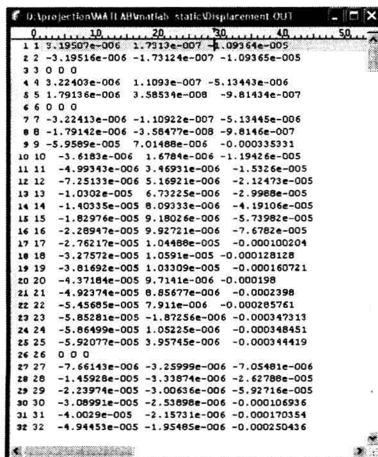
由 ANSYS 的 NWRITE、EWRITE 和 * VWRITE 命令生成模型信息文件(BASIC. IN、ELEMENT. IN 和 NODE. IN),具体的 APDL 文件见附录光盘。

2) 运行静力分析程序进行求解

将生成的模型数据文件(BASIC. IN、ELEMENT. IN 和 NODE. IN)拷贝到静力分析程序的文件夹中。启动静力分析主程序 Main _ Static. m,运行 MATLAB 即可开始求解。

3) 生成结果文件

运算结束后,将在静力分析程序的文件夹中生成结果文件(Displacement. OUT),内容如图 27-3 所示。同时,在 MATLAB 界面下显示模型变形结果文件,如图 27-4 所示。



```
1 1 3.19507e-006  1.7313e-007 -1.09364e-005
2 2 -3.19516e-006 -1.73124e-007 -1.09365e-005
3 3 0 0 0
4 4 3.22403e-006  1.1093e-007 -5.13443e-006
5 5 1.79136e-006  3.58534e-008  -9.81434e-007
6 6 0 0 0
7 7 -3.22413e-006 -1.10922e-007 -5.13445e-006
8 8 -1.79142e-006 -3.58477e-008 -9.8146e-007
9 9 -5.9589e-005  7.01488e-006  -0.000335331
10 10  -3.6183e-006  1.6784e-006 -1.19426e-005
11 11  -4.99343e-006 3.46931e-006  -1.5326e-005
12 12  -7.25133e-006 5.16921e-006  -2.12473e-005
13 13  -1.0302e-005  6.73225e-006  -2.9988e-005
14 14  -1.40335e-005 8.09333e-006  -4.19106e-005
15 15  -1.82976e-005 9.18026e-006  -5.73982e-005
16 16  -2.28947e-005 9.92721e-006  -7.6782e-005
17 17  -2.76217e-005 1.04488e-005  -0.000100204
18 18  -3.27572e-005 1.0591e-005 -0.000128128
19 19  -3.81692e-005 1.03309e-005  -0.000160721
20 20  -4.37184e-005 9.7141e-006 -0.000198
21 21  -4.92374e-005 8.85677e-006  -0.0002398
22 22  -5.45685e-005 7.911e-006  -0.000285761
23 23  -5.85281e-005 -1.87256e-006 -0.000347313
24 24  -5.86499e-005 1.05225e-006  -0.000348451
25 25  -5.92077e-005 3.95745e-006  -0.000344419
26 26  0 0 0
27 27  -7.66143e-006 -3.25999e-006 -7.05481e-006
28 28  -1.45928e-005 -3.33874e-006 -2.62788e-005
29 29  -2.23974e-005 -3.00636e-006 -5.92716e-005
30 30  -3.08991e-005 -2.53898e-006 -0.000106936
31 31  -4.0029e-005  -2.15731e-006 -0.000170354
32 32  -4.94453e-005 -1.95485e-006 -0.000250436
```

图 27-3 Displacement. OUT 文件效果图

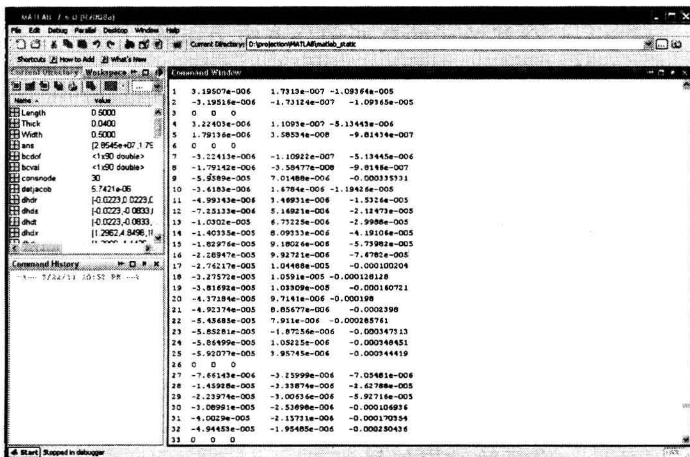


图 27-4 MATLAB 显示变形结果效果图

MATLAB 静力分析程序的文件管理过程如图 27－5 所示，具体实现代码见附录光盘。

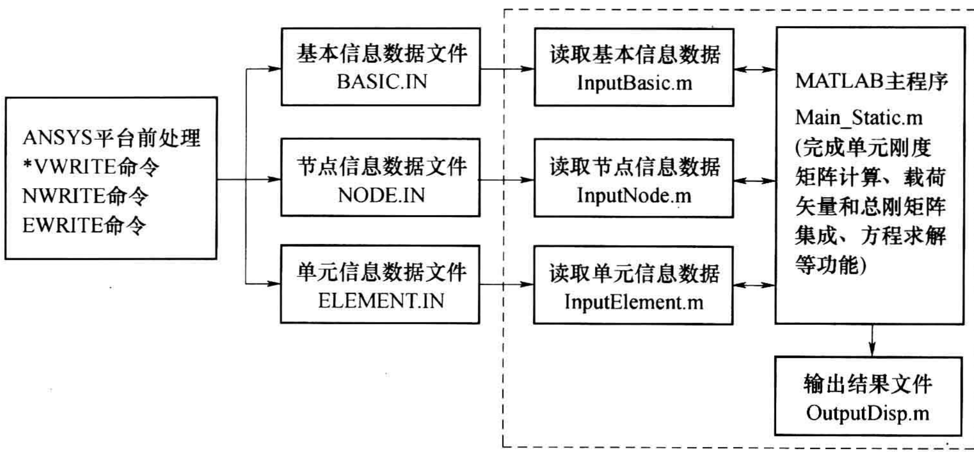


图 27－5　MATLAB 静力求解程序文件管理图

4. 文件数据格式

(1) BASIC. IN 文件数据格式

文件内容及其含义介绍如下：

168	模型单元数量
448	模型节点数量
193000000000	材料弹性模量
0.30	材料泊松比
0.500000	模型长度
0.500000	模型宽度
0.040000	模型厚度
0.1000	建模偏移量

(2) NODE. IN 文件数据格式

文件的内容及其含义介绍如下：

1	0.2000000000000	0.3500000000000	0.1400000000000
2	0.2000000000000	0.3500000000000	0.1000000000000
3	0.1000000000000	0.3500000000000	0.1400000000000
4	0.1666666666667	0.3500000000000	0.1400000000000
5	0.1333333333333	0.3500000000000	0.1400000000000
…	…	…	…
节点编号	x 坐标	y 坐标	z 坐标

(3) ELEMENT. IN 文件数据格式

文件的内容及其含义介绍如下：

2	1	4	7	10	82	96	39	1	1	1	1	0	1
7	4	5	8	39	96	95	40	1	1	1	1	0	2
8	5	3	6	40	95	78	38	1	1	1	1	0	3
10	82	96	39	11	83	98	41	1	1	1	1	0	4
39	96	95	40	41	98	97	42	1	1	1	1	0	5
40	95	78	38	42	97	77	37	1	1	1	1	0	6
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
节点编号								材料、截面、实常数等编号					单元编号

（4）Displacement. OUT 文件数据格式

文件的内容及其含义介绍如下：

1	3.19507e-006	1.7313e-007	-1.09364e-005
2	-3.19516e-006	-1.73124e-007	-1.09365e-005
3	0	0	0
4	3.22403e-006	1.1093e-007	-5.13443e-006
5	1.79136e-006	3.58534e-008	-9.81434e-007
…	…	…	…
节点编号	x 方向变形	y 方向变形	z 方向变形

27.1.3 计算结果及分析

ANSYS 列表输出的结构变形结果和 MATLAB 计算的结果如图 27-6 所示。

图 27-6 变形结果对比图

由图 27－6 的节点位移结果可知，MATLAB 求解结果与 ANSYS 计算结果完全一致，且符合实际情况，两者结果均可信。

27.2 基于 MATLAB 的模态问题有限元分析程序

该部分主要介绍基于 MATLAB 的模态问题有限元分析实现方法，仍以六面体单元为实例介绍程序的实现过程，单元介绍及关键实现技术见 27.1 节。

27.2.1 模态分析求解方程

由动态分析有限元法可知，结构无阻尼自由振动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{27-14}$$

式中：$\boldsymbol{M}$ 为模型质量矩阵；$\boldsymbol{K}$ 为模型刚度矩阵。两个矩阵可由单元矩阵组装获得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} &= \sum_{e=1}^{n} \underset{(24\times24)}{\boldsymbol{K}^{e}} \\ \boldsymbol{M} &= \sum_{e=1}^{n} \underset{(24\times24)}{\boldsymbol{M}^{e}}\end{aligned} \tag{27-15}$$

单元矩阵可进一步表达为

$$\begin{aligned}\underset{(24\times24)}{\boldsymbol{K}^{e}} &= \int_{\Omega^e} \underset{(24\times6)}{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}}\ \underset{(6\times6)}{\boldsymbol{D}}\ \underset{(6\times24)}{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}\Omega \\ \underset{(24\times24)}{\boldsymbol{M}^{e}} &= \int_{\Omega^e} \underset{(24\times3)}{\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}\rho\ \underset{(3\times24)}{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{27-16}$$

式中：ρ 为材料密度。

由于自由振动可分解为一系列简谐振动的叠加，因此，式(27－14)的解可设为

$$\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{27-17}$$

将式(27－17)代入式(27－14)，得

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M})\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \tag{27-18}$$

可见，结构模态分析即为求解广义特征值问题。由线性代数可知，该问题可以求出 n 个特征值 ω_1^2、ω_2^2、…、ω_n^2 和相对应的 n 个特征矢量 $\tilde{\boldsymbol{u}}_1$、$\tilde{\boldsymbol{u}}_2$、…、$\tilde{\boldsymbol{u}}_n$。其中，特征值的平方根 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 就是结构的 i 阶固有频率，特征矢量 $\tilde{\boldsymbol{u}}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 就是结构的 i 阶模态振型，简称振型。振型 $\tilde{\boldsymbol{u}}_i$ 是结构按频率 ω_i 振动时各自由度方向振幅间的相对比例关系，它反映了结构振动的形态，并不是振幅的绝对大小。

27.2.2 程序原理及实现

该程序的原理框图如图 27－7 所示。

其中，Basic. IN 文件主要存储模型的整体信息，如节点数量、单元数量、材料参数和约束位置等信息；Node. IN 文件用于存储节点编号和位置信息；Element. IN 文件用于存储单元—节点信息、单元材料特性参数等。上述 3 个文件的信息均由 ANSYS 输出。

1. 主要变量含义

nel：单元总数。

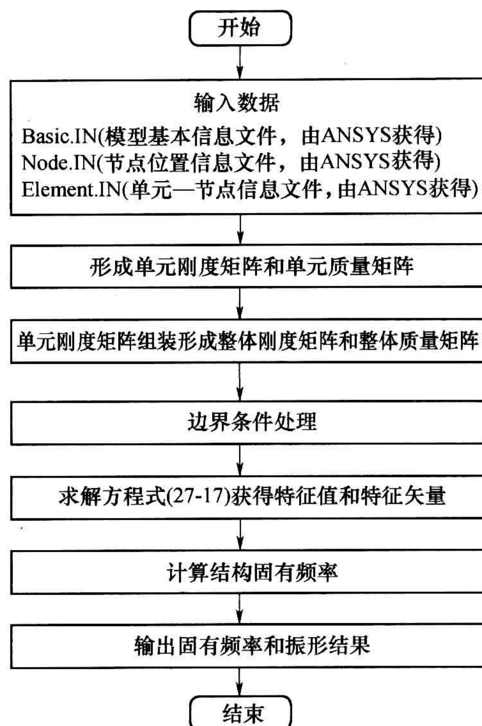


图 27－7　MATLAB 模态分析程序实现原理框图

nnel:单个单元包含的节点个数。

ndof:单个节点包含的自由度数。

nnode:节点总数。

sdof:模型总的自由度数。

edof:单个单元包含的自由度数。

emodule:材料弹性模量。

poisson:材料泊松比。

density:材料密度。

NumEigen:模态提取阶数。

dist:模型偏移量,用于避开节点坐标值为 0 的位置,便于坐标数据读取。

k:单元刚度矩阵。

m:单元质量矩阵。

kk:模型总体刚度矩阵。

mm:模型总体质量矩阵。

eigvalue:结果特征值矢量。

eigenval1:结构固有频率矢量。

displace:一阶振型结果矩阵。

eigvect:特征矢量(振型)矩阵。

gcoord:节点—坐标信息矩阵。

nodes:单元—节点信息矩阵。
index:整体自由度—单元信息矢量。
point3:高斯积分点位置矢量。
weight3:高斯积分点权重系数矢量。
bcdof:约束自由度矢量。
bcval:约束自由度值矢量。
matmtx:材料弹性系数矩阵。
shape:形函数结果矢量。
dhdr、dhds、dhdt:形函数导数矢量。
nglx、ngly、nglz:存储 x,y 和 z 方向高斯积分点的个数。
jacob3:雅克比矩阵。

2. 子程序功能介绍

InputBasic:读取 BASIC. IN 文件中的模型基本信息和材料参数。
InputNode:读取 NODE. IN 文件中的节点—位置信息。
InputElement:读取 ELEMENT. IN 文件中的单元—节点信息。
fematiso:计算材料弹性系数矩阵。
feglqd3:获取高斯积分点位置和权重系数。
feisos8:计算形函数及其导数在高斯积分点的值。
fejacob3:计算单元的雅克比矩阵。
federiv3:计算各参数对整体坐标系的结果。
fekine3d:计算单元几何函数矩阵。
feasmbl1:组装单元刚度矩阵到整体刚度矩阵。
feaplyc2:边界条件处理。
Lanczos:使用 Lanczos 算法求解特征值和特征矢量。
OutputDisp:输出模态分析的固有频率和振型结果。

3. 程序使用方法和文件管理

MATLAB 模态分析程序的使用方法如下。

1) 由 ANSYS 生成模型数据文件

由 ANSYS 的 NWRITE、EWRITE 和 * VWRITE 命令生成模型信息文件(BASIC. IN、ELEMENT. IN 和 NODE. IN),具体的 APDL 文件见附录光盘。

2) 运行模态分析程序求解

将生成的模型数据文件(BASIC. IN、ELEMENT. IN 和 NODE. IN)复制到模态分析程序的文件夹中。启动模态分析主程序 Main _ Dynamic. m,运行 MATLAB 即可开始求解。

3) 生成结果文件

运算结束后,将在模态分析程序的文件夹中生成结果文件(Frequency. OUT 和 FirstMode. OUT),内容如图 27 -8 所示。同时,在 MATLAB 界面下显示模型变形结果文件,如图 27 -9 所示。

MATLAB 模态分析程序的文件管理过程如图 27 - 10 所示,具体实现代码见附录光盘。

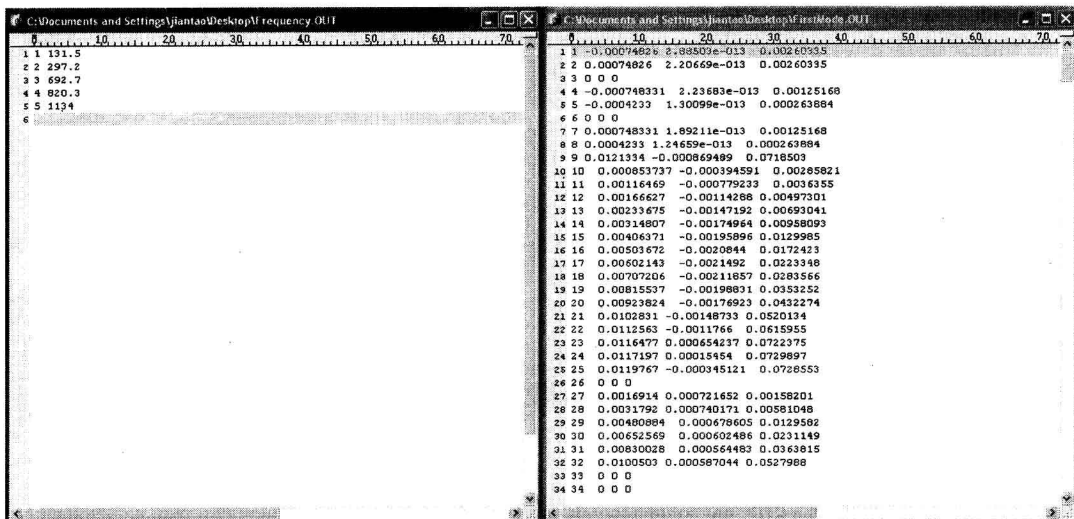


图 27-8　结果文件(Frequency. OUT 和 FirstMode. OUT)效果图

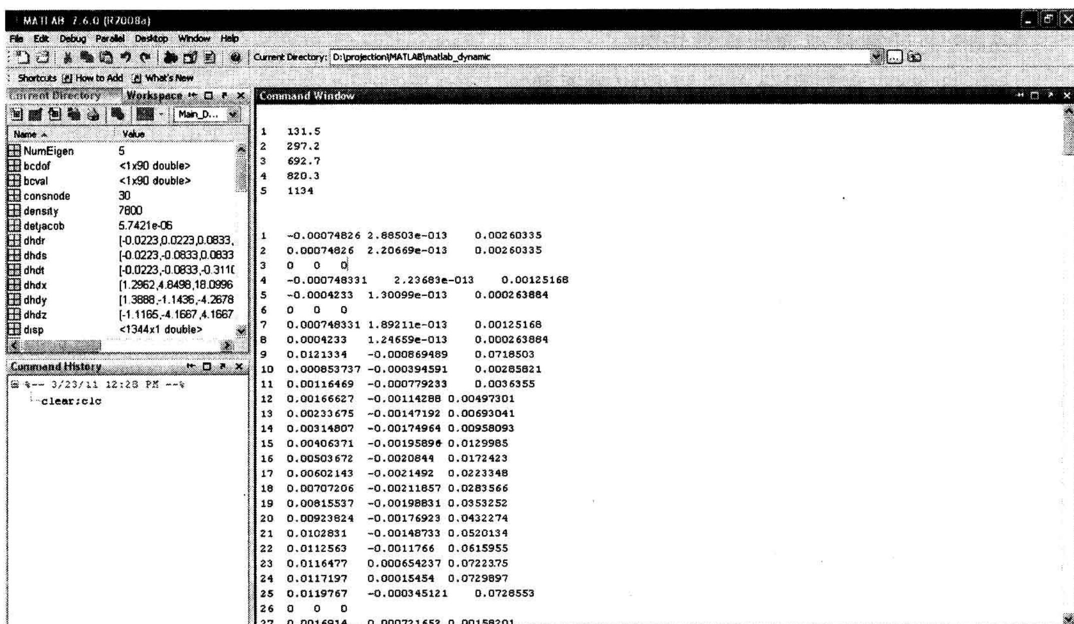


图 27-9　MATLAB 显示频率和振型结果效果图

4. 文件数据格式

1) BASIC. IN 文件数据格式

文件内容及其含义介绍如下：

168	模型单元数量
448	模型节点数量
193000000000	材料弹性模量
0.30	材料泊松比
7800	材料密度

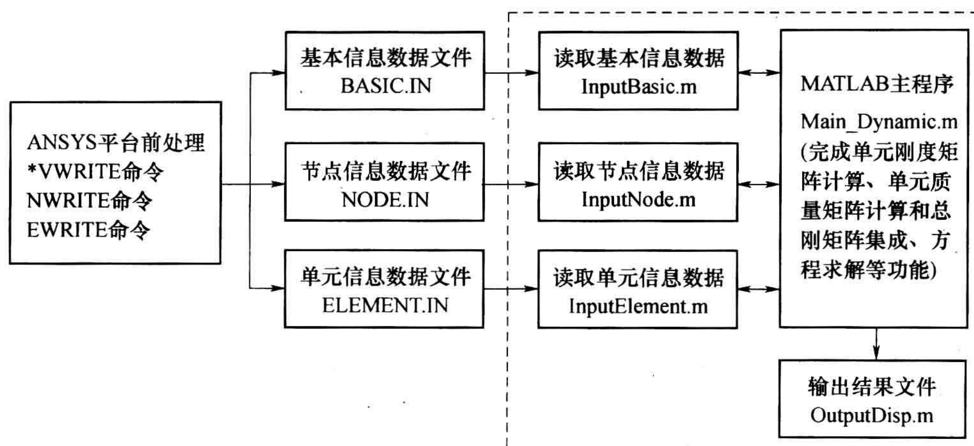


图 27－10　MATLAB 模态求解程序文件管理图

5.0	模态提取阶数
0.1000	建模偏移量

2）NODE. IN 和 ELEMENT. IN 文件数据格式(见 27.1 节)

3）结果文件数据格式

Frequency. OUT 文件用于输出结构的固有频率结果,文件的内容及其含义介绍如下:

1	131.5
2	297.2
3	692.7
4	820.3
5	1134
…	…
模态阶数	固有频率值

FirstMode. OUT 文件用于输出结构一阶振型的分布数据,文件的内容及其含义介绍如下:

1	－0.00074826	2.88503e－013	0.00260335
2	0.00074826	2.20669e－013	0.00260335
3	0	0	0
4	－0.000748331	2.23683e－013	0.00125168
5	－0.0004233	1.30099e－013	0.000263884
…	…	…	…
节点编号	振型 x 方向分量	振型 y 方向分量	振型 z 方向分量

27.2.3　计算结果及分析

ANSYS 列表输出的频率和振型结果及 MATLAB 计算的结果如图 27－11 和图 27－12 所示。

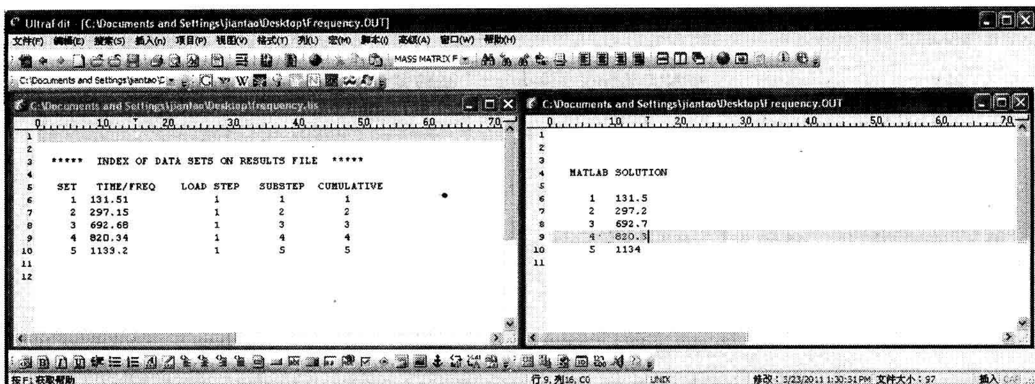


图 27 - 11　结构固有频率结果对比图

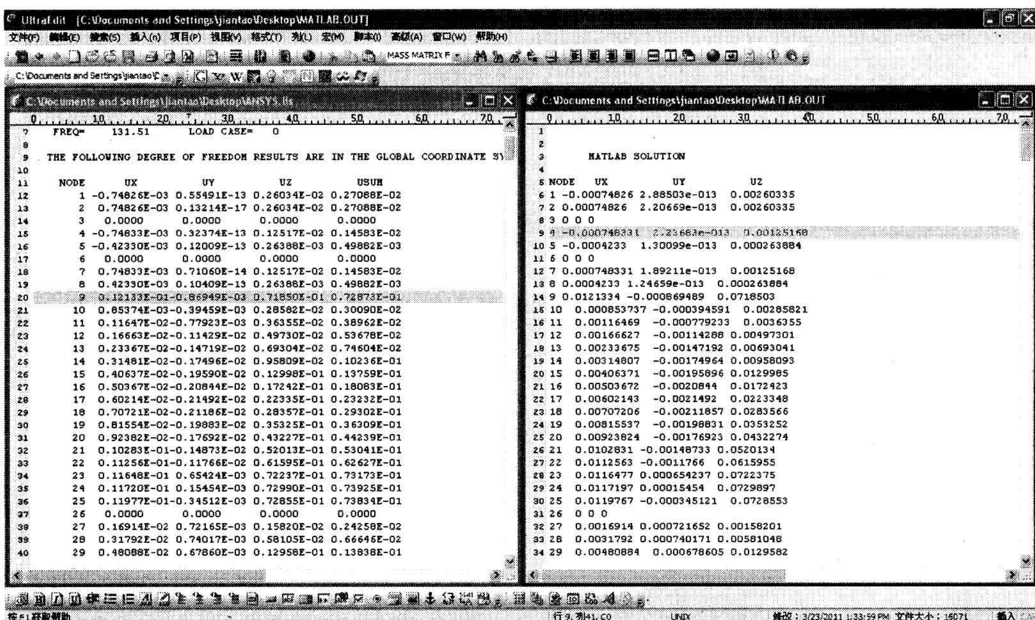


图 27 - 12　结构一阶振型结果对比图

由图 27 - 11 和图 27 - 12 的结构固有频率和振型结果对比可知，MATLAB 求解结果与 ANSYS 计算结果完全一致，两者结果均可信。由于存在数值误差，当振型在某个方向的分量很小（如 10^{-13} 量级）时，MATLAB 求解结果与 ANSYS 结果有一定的误差。

第28章　ANSYS参数化编程和二次开发技术

基于应用对象的结构特点、设计理论和有限元建模方法，定制用户专用的软件界面和开发专用的有限元仿真系统，可使设计人员更专注于产品改进和新产品的研发，提高设计效率，缩短设计周期，对实际应用具有重要价值。

28.1　ANSYS参数化编程概述

ANSYS参数化设计语言（ANSYS Parametric Design Language，APDL）是一种类似于FORTRAN的解释性语言，包括参数、函数、矢量和矩阵运算、循环、宏和用户程序等诸多特性，拓展了ANSYS有限元分析的能力。同时，还提供了简单的界面定制功能，实现参数的交互输入、消息提示和程序运行控制等功能。

ANSYS参数化编程以APDL语言为基础，通过定义参数化变量建立分析模型和控制整个分析流程，能够自动地完成灵敏度分析、优化设计、可靠性设计和自适应网格划分等功能。在参数化分析过程中，可以方便地修改部分或全部参数进行各种尺寸模型、加载方式和材料特性的设计方案或系列产品的反复分析，极大地提高了分析效率。

总之，参数化编程扩展了ANSYS有限元分析范围之外的能力，提供了建立标准零件库、序列化分析方法、大型复杂模型设计和优化、敏度分析和高级数据处理技术等的良好基础。

28.2　APDL语言

利用APDL语言和宏技术组织管理ANSYS的分析过程，可以实现参数化建模、参数化加载和求解、参数化后处理等有限元分析的全过程，极大地提高分析效率，降低成本。

28.2.1　APDL文件生成和运行

1. APDL文件的生成

在GUI方式下，用户每执行一次操作，ANSYS都会将对应于操作的命令写入到日志文件（jobname.log）中。因此，ANSYS的日志文件中包括了操作过程中所有的指令，该文件是生成APDL文件的基础。

生成APDL文件时，为提高建模和求解效率，可忽略某些不必要的操作，诸如改变视角、图形放缩、移动和旋转等操作。因此，完成GUI操作完成后，建议执行Utility Menu→File→Write DB log file命令，弹出Write Database Log对话框。在输入框中输入文件名字（如APDL），选择仅输出重要命令方式输出文件，如图28－1所示。在工作目录中生成apdl.lgw文件，仅保留了主要的建模和操作命令。通过修改文件中GUI方式的拾取操作为操作命令，即可转化为命令流文件。

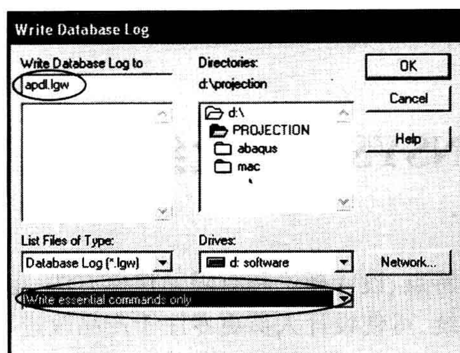


图 28 - 1　Write Database Log 对话框

将 GUI 方式下的拾取操作转换为操作命令的方式有两种:

1) 单一实体操作命令的转换

例如对一条标号为 10 的线指定分网的等分数为 8。采用 GUI 方式操作,在 LOG 文件中生成的命令流为:

```
FLST,5,1,4,ORDE,1
FITEM,5,10
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
!*
LESIZE,_Y1, , ,8, , , , ,1
!*
```

APDL 方式下,可将上述操作修改为:

```
LESIZE,10, , ,8, , , , ,1
```

2) 多个实体同时操作命令的转换

若需对多个实体同时进行操作时,可以采用多条命令逐个进行的方式,也可将选择操作与控制命令结合使用的方式。

如对编号为 1 ~ 7 的节点施加 Y 方向的约束。GUI 方式操作生成的命令如下:

```
FLST,2,7,1,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-7
!*
/GO
D,P51X, , , , , ,UY, , , , ,
```

此时,有两种方法可将上述操作转化为 APDL 命令。其一为循环使用单一操作命令,依次选取各个对象进行操作,适用于拾取对象较少的情况,例如:

```
D,1,UY,0, , , , , , , ,
```

```
D,2,UY,0, , , , , , , , ,
……
D,7,UY,0, , , , , , , , ,
```

当拾取的对象较多时,则需要采用选择操作与控制命令相结合的方式,例如:

```
NSEL,S,LOC,Y,0                  ! 根据位置、依附信息等选取需要操作的对象
D,ALL, , , , , ,UY, , , , ,     ! 对选取的对象进行操作(如约束、加载等)
ALLSEL,ALL                      ! 重新选取所有的对象,便于后续操作
```

APDL 命令流操作过程中,建议用户采用先选择后操作的方式,以便于提高效率和模型信息检查。

2. APDL 文件的运行

执行 Utility Menu→File→Read Input from 命令,弹出 Read File 对话框。选择需要读取的 APDL 文件,如图 28 -2 所示,单击 OK 按钮确认即可。

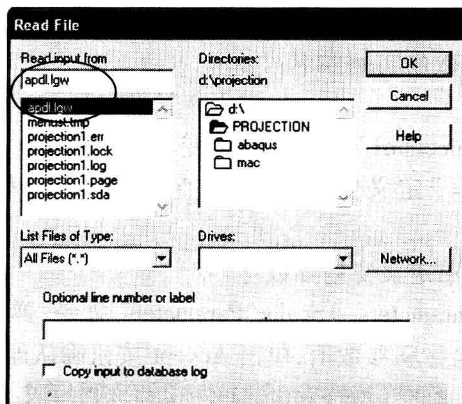


图 28 -2　Read File 对话框

28.2.2　APDL 的变量参数

APDL 的变量参数包括两种类型:数值型和字符型。在 APDL 中,任何参数都不需要单独声明参数的类型。数值型参数均按照双精度数进行存储,程序将未赋值的参数默认为接近于 0 的极小值(约为 2^{-100});字符型参数用于存储字符串,且长度不超过 8 个字符。

1. 变量参数的命名规则

APDL 定义的参数名称必须遵循以下的规则才能被 ANSYS 程序正确调用:

(1) 参数的名称必须以字母开头,可以包含数字和下划线符号,长度不超过 32 个字符。

(2) 不能使用宏专用的局部参数名:ARG1 ~ ARG9 和 AR1 ~ AR99。

(3) 不能使用 * ABBR 的缩写。

(4) 不能使用 ANSYS 的标识,包括自由度标识(TEMP, UX, PRES 等)、通用标识(ALL, PICK 等)、数组类型标识(CHAR、ARRAY、TABLE 等)等。

2. 变量参数的定义与赋值

常用变量参数的定义与赋值途径包括以下几种:

(1) 利用 * SET 命令定义变量参数

* SET 命令定义和赋值变量参数的格式如下：

    * SET, Par, Value, Val2, Val3, Val4, Val5, Val6, Val7, Val8, Val9, Val10

其中，Par 是变量参数的名称；Value 是参数的赋值，可以为数值或字符串；对于变量参数 Val2 ~ Val10 未使用。

利用 * SET 命令定义变量参数的实例如下：

    * SET, Width, 12   ! 定义变量 Width = 12
    * SET, Mu, 0.3   ! 定义变量 Mu = 0.3

(2) 利用赋值号“ = ”定义变量参数

“ = ”可以直接用于定义和赋值变量，标准格式为：

  Name = Value

其中，Name 是参数名；Value 是赋予参数的数值或字符。字符值必须放在一对单引号中，长度不超过 8 个字符。

利用“ = ”定义变量参数的实例如下：

    Width = 12   ! 定义变量 Width
    Job_name = 'projection1'   ! 定义变量 Job_name

通过 * SET 命令或“ = ”定义变量的指令，直接输入命令输入窗口，单击回车确认即可。

(3) 利用变量定义菜单定义变量参数

执行 Utility Menu→Parameters→Scalar Parameters 命令，弹出 Scalar Parameters 对话框，输入需要定义的参数名称和参数值，单击 Accept 按钮确认即可，如图 28 - 3 所示。

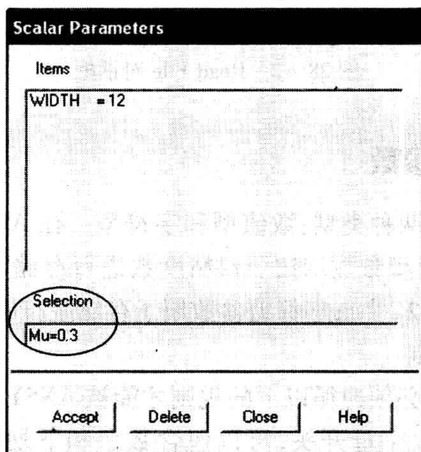


图 28 - 3 Scalar Parameters 对话框

(4) 利用 * GET 命令提取 ANSYS 数据库数据

* GET 命令的使用格式如下：

    * GET, Par, Entity, ENTNUM, Item1, IT1NUM, Item2, IT2NUM

其中，Par 是参数名；Entity 是被提取对象的关键字，包括 NODE、ELEM、KP 等；ENTNUM 为实体的编号（若为 0 表示全部实体）；Item1 是指定实体的特定结果。

利用 * GET 命令定义变量参数的实例如下：

```
*GET, V1, ELEM, 1, VOLU                    ! 定义参数 V1 = 单元 1 的体积
* GET, NUM_mat, ELEM, 5, ATTR, MAT         ! 定义参数 NUM_mat = 单元 5 的材料号
```

28.2.3 APDL 的数组参数

变量参数值能储存一个参数值，若要存储多个数据，则需要定义数组参数。ANSYS 的数组按照维数可以分为 3 类：

（1）一维数组：只有一列数据，相当于一个列矢量，可以直接用于矢量运算。

（2）二维数组：由行与列组成，每一列相当于一个矢量。二维数组可以看成由多个一维数组构成。

（3）三维数组：由行、列和面组成，每个面相当于一个二维数组。

ANSYS 允许定义的数组类型包括 3 种。

（1）ARRAY 数值型数组：ARRAY 数值型数组是缺省的数组类型，用于存储整型和实型数据。行、列和面的下标为从 1 开始的连续整数。

（2）CHAR 字符型数组：CHAR 字符型数组用于存储字符串，行、列和面的下标为从 1 开始的连续整数。

（3）TABLE 表：TABLE 表用于存储整数或实数，是一种特殊的数值型数组，可以实现数组元素间的线性插值算法。可以给每一行、列和面定义数组下标，且下标为实数，可以根据下标实现数据插值。

注意：这 3 种类型的数组长度都不能超过（$(2^{31}-1)/8$）个字节。

1. 数组参数的定义

定义数组参数的途径有两种：* DIM 命令定义方式和界面交互定义方式。定义数组后，如果是 ARRAY 和 TABLE 类型的数组，元素将被初始化为 0（除 TABLE 类型的 0 行和 0 列数据，它们将被初始化为“极小值”）；如果是 CHAR 型的数组，元素将被初始化为空值。

（1）* DIM 命令方式定义数组

* DIM 命令定义数组的格式如下：

```
*DIM, Par, Type, IMAX, JMAX, KMAX, Var1, Var2, Var3, CSYSID
```

其中，Par 是数组名称；Type 是数组类型，标识字有 ARRAY（缺省）、CHAR、TABLE 和 STRING；IMAX，JMAX，KMAX 分别是数组下标（I，J，K）的最大值；Var1，Var2，Var3，为 Type = TABLE 时对应的行、列和面的变量名。

* DIM 命令定义数组的实例如下：

```
*DIM, A, ,4,3,3                  ! 定义一维 ARRAY 数组，维数为 4×3×3
*DIM, Str_Name, CHAR,5,2,2       ! 定义 CHAR 字符数组，维数为 5×2×2
*DIM, Force, TABLE,5             ! 定义一维 Table 表，维数为 5×1×1
```

(2) 界面交互方式定义数组

执行 Utility Menu→Parameters→Array Parameters→Define/Edit 命令，弹出 Array Parameters 定义对话框，如图 28－4 所示。单击 Add 按钮，弹出 Add New Array Parmeter 对话框，输入数组名称，选择需要的数组类型并输入数组大小，如图 28－5 所示。单击 OK 按钮确认，完成数组的定义。

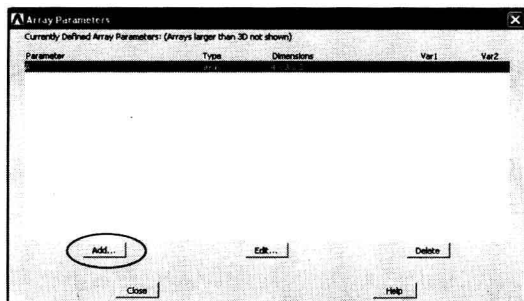


图 28－4　Array Parameters 对话框

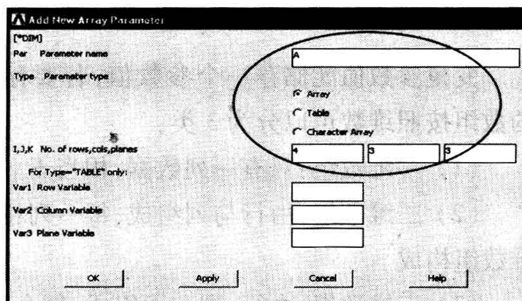


图 28－5　Add New Array Parmeter 对话框

2. 数组参数的赋值

常用的数组参数赋值方式如下：

(1) 利用 * SET 命令或"＝"给单个或多个数组元素赋值

利用 * SET 命令或"＝"可以同时给单个或多个数组的元素赋值。赋值对象为第 1 个数组元素名，赋值数据是一个列矢量。赋值结果是按列下标递增顺序，从第 1 个赋值的数组元素依次赋值。一次最多只能给 10 个连续的数组元素赋值。

实例：定义一个二维 4×3 的数组 B，并给数组赋予下列值：

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \\ 41 & 42 & 43 \end{bmatrix}$$

实现命令如下：

```
*DIM, B, ,4,3,1
B(1,1) =11,21,31,41          ! 定义第 1 列的 4 个元素
B(1,2) =12,22,32,42          ! 定义第 2 列的 4 个元素
B(1,3) =13,23,33,43          ! 定义第 3 列的 4 个元素
```

(2) 利用 * VEDIT 命令或其等价菜单方式编辑数组

利用 * VEDIT 命令或执行 Utility Menu→Parameters→Array Parameters→Define/Edit 命令以交互方式编辑数组元素。这种方式只能编辑 ARRAY 或 TABLE 类型的数组，不能编辑 CHAR 类型的数组。

实例：创建上述二维 4×3 的数组 B。

执行 Utility Menu→Parameters→Array Parameters→Define/Edit 命令，弹出如图 28－4 所示的对话框。单击 Add 按钮，弹出 Add New Array Parmeter 对话框，输入数组名称为 B，选择需要的数组类型为 Array，并输入数组大小为 4×3，如图 28－6 所示。单击 OK 按钮确认，完成数组的定义。

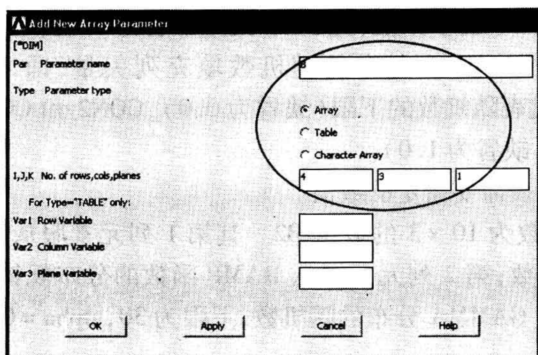


图 28 - 6 Add New Array Parmeter 对话框

在 Array Parameters 对话框中,选中 B 数组,单击 Edit 按钮。弹出如图 28 - 7 所示的数组参数 B 编辑对话框,按图中各元素给数组 B 赋值。最后,选择对话框菜单 File→Apply/Quit 完成参数的定义。

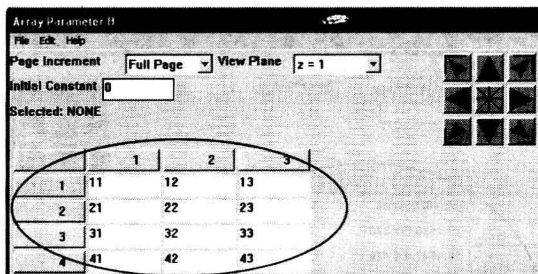


图 28 - 7 Array Parameter B 编辑对话框

(3) 利用 * VFILL 命令或其等价菜单方式填充数组

使用 * VFILL 命令或执行 Utility Menu→Parameters→Array Parameters→Fill 命令填充 ARRAY 或 TABLE 类型数组参数的列矢量,填充的数据必须服从某种分布规律或者是一系列的随机数。

* VFILL 命令的格式如下:

* VFILL, ParR, Func, CON1, CON2, CON3, CON4, CON5, CON6, CON7, CON8, CON9, CON10

其中,ParR 是参数列矢量名,代表二维或三维数组中的某列矢量;Func 是填充数据服从的函数分布规律,包括以下几种:

1) DATA:将指定的 CON1 ~ CON10 数据填充到列矢量中。

2) RAMP:按 CON1 + ((*n* - 1) * CON2)规律填充列矢量。

3) RAND:以均匀分布的随机数填充列矢量,即 RAND(CON1,CON2),其中 CON1 代表均值(缺省为 0.0),CON2 代表标准方差(缺省为 1.0)。

4) TRIA:以三角分布的随机数填充列矢量,即 TRIA(CON1,CON2,CON3)。其中,CON1 代表随机数的下限(缺省为 0.0),CON2 代表峰值位置,CON3 代表随机数的上限。

5) BETA:以基于 BETA 分布的随机数填充列矢量,即 BETA(CON1,CON2,CON3,CON4)。其中,CON1 代表随机数的下限(缺省为 0.0),CON2 代表随机数的上限,CON3

和 CON4 代表 alpha 与 beta 的参数值,且必须为正(缺省为 1.0)。

6) GAMM:以基于 GAMMA 分布的随机数填充列矢量,即 GAMM(CON1,CON2,CON3)。其中,CON1 代表随机数的下限(缺省为 0.0),CON2 和 CON3 代表 alpha 与 beta 的参数值,且必须为正(缺省为 1.0)。

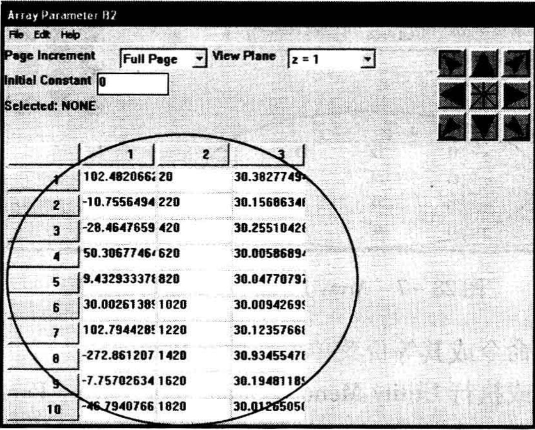
CON1 ~ CON10 代表需要指定的数值。

实例:定义一个维数为 10 ×3 的数组 B2。其第 1 列元素服从均值为 0,标准方差为 100 的正态分布的随机数;第 2 列元素服从 RAMP 函数的分布规律且下限为 10,上限为 200;第 3 列元素为服从 GAMMA 分布的随机数,下限为 30,alpha =0.3,beta =3.2。

实现的命令如下:

```
*DIM, B2, ARRAY,10,3                      ! 定义维数为 10×3 的数值型数组
*VFILL, B2(1,1), GDIS,0,100               ! 填充数组的第 1 列矢量
*VFILL, B2(1,2), RAMP,20,200              ! 填充数组的第 2 列矢量
*VFILL, B2(1,3), GAMM,30,0.3,3.2          ! 填充数组的第 3 列矢量
```

生成的 B2 数组如图 28 -8 所示。



	1	2	3
1	102.482066	20	30.3827749
2	-10.7556494	220	30.1568634
3	-28.4647659	420	30.2551042
4	50.3067746	620	30.0058689
5	9.43293337	820	30.0477079
6	30.0026138	1020	30.0094269
7	102.794428	1220	30.1235766
8	-272.861207	1420	30.9345547
9	-7.75702634	1620	30.1948118
10	-46.7940766	1820	30.0126505

图 28 -8　B2 数组效果图

28.2.4　APDL 的循环与控制

当执行一个输入文件时,正常情况下,ANSYS 会严格按照顺序方式执行。实际应用中,常遇到某些条件关系,要求程序流向可以根据具体要求进行转向。因此,APDL 提供了一系列的命令,使用户能够方便地控制程序的流向。

1. 调用子程序方式

APDL 最多允许 20 层的宏相互嵌套,最多能够将 19 个变量传递给宏。每个嵌套的宏执行结束后,返回到调用宏的这一层。下面是个简单的宏调用实例,一个宏文件(maincode.mac)调用 myblock.mac 文件生成一个长方体。

maincode.mac 文件内容:

```
/PREP7
/VIEW,,1,2,3
myblock, 10, 20, 50
```

FINISH
/EOF

myblock. mac 文件内容:
BLOCK,0,ARG1,0, ARG2,0, ARG3
/EOF

2. 无条件分支命令(* GO)与重复执行命令(* REPEAT)

(1) 无条件分支命令(* GO)

最简单的分支命令“ * GO”能够引导程序流向某个指定的标号,而不执行它们之间的所有命令。程序将从这个标号开始往下执行,例如:

```
*GO, :BRANCH1
……                          ! 该部分命令将被忽略
:BRANCH1
……                          ! 程序从该部分代码继续执行
```

注意:由 * GO 命令指定的标号必须以冒号“:”开头,字符个数不能超过 8 个(包括冒号)。这个标号可以放在同一个文件里的任何位置。

(2) 重复执行命令(* REPEAT)

命令 * REPEAT 是一个最简单的循环功能命令。它按照指定的次数反复地执行某个操作。例如:

```
E, 1, 2
*REPEAT, 5, 0, 1
```

其中,E 命令用于连接节点 1 和节点 2 生成一个单元。 * REPEAT 命令指定了 5 次 E 指令循环(包含第 1 次执行的 E 命令);每次循环时,第 1 个节点编号不变,第 2 个节点的编号增加 1。执行完毕后,生成 5 个单元,每个单元的节点组成依次为 1 -2、1 -3、1 -4、1 -5和 1 -6。

3. * DO 命令控制方式

* DO 命令控制循环方式包括两种: * DO… * ENDDO 方式和 * DOWHILE 方式。

(1) * DO… * ENDDO 循环方式

该方式下, * DO 循环能够按照给定的次数重复地执行连续的命令块。其中, * DO 标识循环的开始, * ENDDO 标识循环的结束。 * DO 命令的格式如下:

```
*DO, par, ival, fval, inc
```

其中,par 为循环控制变量,只能是数值型变量;ival 为循环控制变量的起始值;fval 为循环控制变量的终止值;inc 为循环控制变量的增量步长,默认值为 1。

* DO… * ENDDO 循环的一般流程如下:

```
*DO, I, I_intial, I_end, I_inc          ! 循环控制信息
    Code block                          ! 循环语句块
*ENDDO                                  ! 循环结束
```

此外, * DO… * ENDDO 循环还可以结合 * IF… * THEN … * ELSE …: * ENDIF 条件结构使用,利用 * EXIT 与 * CYCLE 命令跳出循环和跳入下一次循环,以实现大型程序的

求解。

（2） * DOWHILE 循环方式

当循环次数不确定，只有满足某个条件时才终止，可选用 * DOWHILE 命令控制循环过程。该循环功能重复执行循环体，直到外部控制参数为假结束。命令格式如下：

* DOWHILE, parm

其中，parm 为循环判断条件。如果 parm 为真，则继续执行循环体；如果 parm 为假，终止循环。

4. 有条件分支（ * IF）方式

APDL 允许通过比较两个参数的逻辑值，有选择地执行多个程序块中的某个程序。 * IF 语句的控制格式如下：

* IF, val1, oper1, val2, base1 [, val3, oper2, val4, base2]

其中，val1 和 val2 分别为比较的两个数值；oper1 为比较运算符，包括以下几种：

EQ：$val1 = val2$；

NE：$val1 \neq val2$；

LT：$val1 < val2$；

GT：$val1 > val2$；

LE：$val1 \leqslant val2$；

GE：$val1 \geqslant val2$；

ABLT：$|val1| < |val2|$；

ABGT：$|val1| > |val2|$。

base1 为第一个条件（oper1）为真时执行的操作，如果后面没有第二个条件（oper2），则 base1 = then；如果后面有第二个条件（oper2），则 base1 取逻辑关系运算符，将两个条件组成一个更复杂的条件。逻辑关系运算符如下：

AND：表示 oper1 与 oper2 条件同时为真时，结果为真；

OR：表示 oper1 与 oper2 条件至少一个为真时，结果为真；

XOR：表示 oper1 与 oper2 条件有一个为真时，结果为真。

图 28 - 9 为一个简单的条件控制结构。

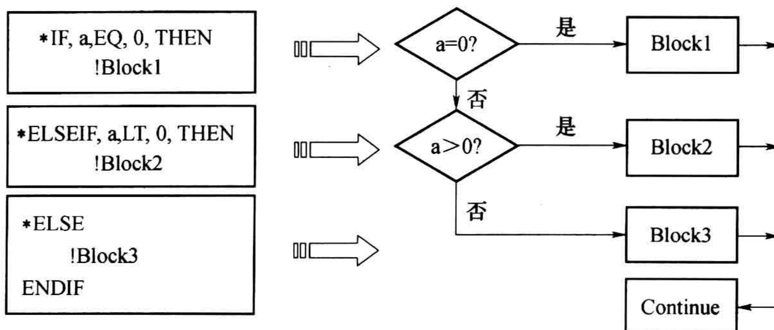


图 28 - 9 * IF 命令控制流程图

28.2.5 宏命令定义和使用

APDL 宏就是一个 ANSYS 的命令序列，能够自动完成一定任务的命令流文件。宏文件名最多支持 32 个字符，且不能以数字开头；宏文件的扩展名不能超过 8 个字符，如果为可执行的宏，扩展名应为. mac。文件名或扩展名不能包含空格和当前文件系统禁止使用的字符。

1. ANSYS 宏的搜索路径

存放于 ANSYS 搜索路径文件夹中的宏可被自动执行，常用的搜索路径包括：

（1）ANSYS 的 docu 子目录：.. \Ansys Inc\v90\ANSYS\apdl。

（2）ANSYS – MACROLIB 环境变量指定的路径。

（3）/PSEARCH 指定的路径。

（4）当前工作目录等。

2. ANSYS 生成宏文件的方法

ANSYS 中提供了 4 种方式来定制宏文件，即命令行输入方式、GUI 界面操作方式、文件操作方式（ * CFOPEN、* CFWRITE 和 * CFCLOS 命令控制）和指定文件输出方式（/TEE 命令控制）。此处仅介绍前两者的实现过程。

（1）命令行输入方式

在命令输入行中执行 * CREATE 命令，依次输入相关的命令流。完成后，执行 * END 命令，生成宏文件。例如生成 Matprop. mac 宏文件，用于自动定义材料参数，在命令输入行中依次输入以下命令流即可：

```
* CREATE, Matprop, mac,
MP, EX, 1, 1.93E11
MP, NUXY, 1, 0.3
MP, DENS, 1, 7800
* END
```

执行完毕后，在当前工作文件夹中生成 Matprop. mac 宏文件，内容如图 28 – 10 所示。

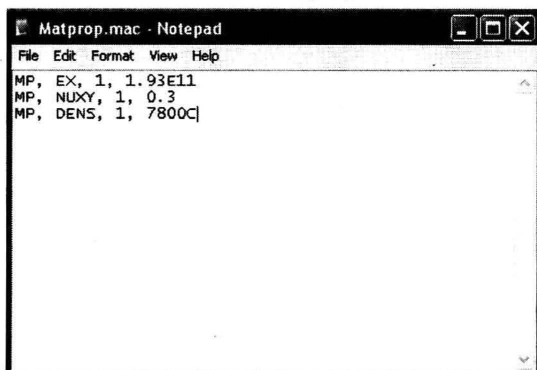


图 28 – 10 Matprop. mac 文件内容

（2）GUI 界面操作方式

执行 Utility Menu→Macro→Create Macro 命令，弹出 Create Macro 对话框。输入宏的文件名为 Matprop. mac，命令行中输入以下命令：

```
MP, EX, 1, 1.93E11
```

MP, NUXY, 1, 0.3

MP, DENS, 1, 7800

如图 28 - 11 所示,单击 OK 按钮确认,完成宏的定义。同时在当前工作文件夹中生成 Matprop. mac 宏文件。

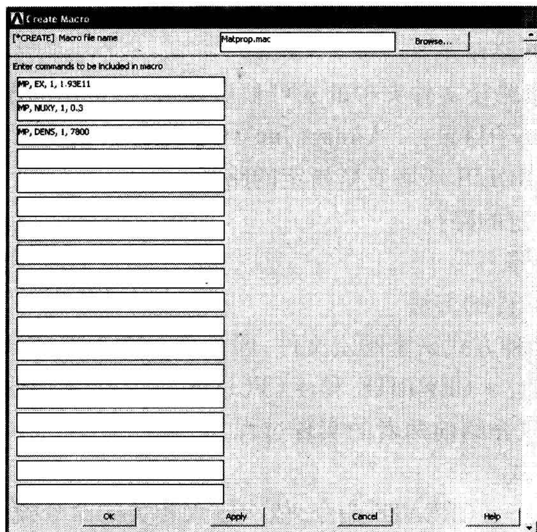


图 28 - 11 Create Macro 对话框

3. 宏的执行

ANSYS 执行宏的方法包括以下 3 种:

(1) 使用 * USE 命令:在命令提示行窗口中输入 * USE,macro _ name 即可。

(2) 执行菜单命令:Utility Menu→Macro→Execute Macro,弹出宏执行对话框。输入宏文件名,单击 OK 按钮确认即可。

(3) 使用 * ULIB 命令:用于执行宏库中的文件,如 * ULIB, mymacro, mlib, /myaccount/macros/…。

28.3 基于 UIDL 的常用功能模块和专用系统开发方法

UIDL(User Interface Design Language)是 ANSYS 提供给用户的简单界面设计语言,可以定制各类信息提示框、单行数据输入框、多行数据输入框等功能。

28.3.1 单行参数输入

1. 命令介绍

在 ANSYS 宏文件中填加 * ASK 命令,可弹出提示输入单行变量的对话框。用户可输入字符串(1 个 ~8 个字符)、数值、字符变量或数值表达式。命令格式为:

* ASK,Par,Query,DVAL

其中,Par 为参数名称,用于存储用户输入的信息;Query 为参数提示信息,用户最多可以输入包含 32 个字符的提示信息,方便参数的正确输入;DVAL 为参数的默认值。参

数输入时，若用户敲击空格，则表示删除该参数。

2. 实现方法

（1）定义宏文件：执 Utility Menu→Macro→Create Macro 命令，弹出 Create Macro 对话框。输入宏的文件名为 Rinput. mac；命令行中输入：* ASK，RADIUS，'Input the radius of sphere'，0.2。如图 28－12 所示，单击 OK 按钮确认，完成宏定义。在当前工作目录中，生成 Rinput. mac。

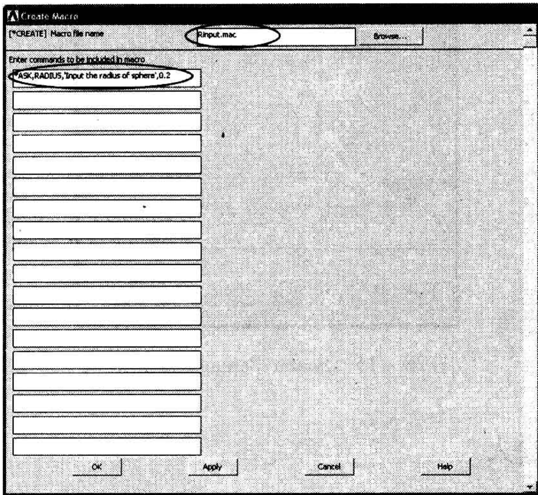


图 28－12　Create Macro 对话框

（2）执行宏文件：执 Utility Menu→Macro→Execute Macro 命令，弹出 Execute Macro 对话框。输入宏的文件名 Rinput，如图 28－13 所示，单击 OK 按钮确认，弹出单行参数输入框，输入半径值为 0.5，如图 28－14 所示。

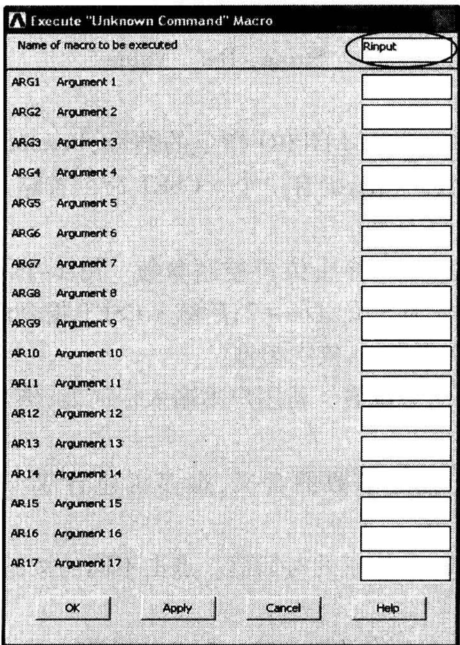


图 28－13　Execute Macro 对话框

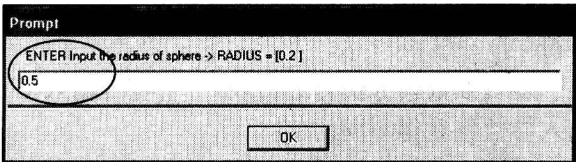


图 28－14　单行参数输入框

3. 参数查看

参数信息读入后,可通过参数列表查看各参数的内容:执 Utility Menu→Parameters→Scalar Parameters 命令,弹出 Scalar Parameters 列表框,如图 28 - 15 所示,单击 Accept 按钮确认。

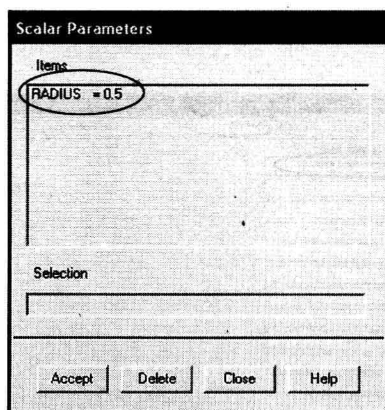


图 28 - 15 Scalar Parameters 列表框

28.3.2 多行参数输入

1. 命令介绍

当用户需要输入多个参数时,需要借助 MULTIPRO 指令构建一个多行输入对话框,一次最多可以输入 10 个参数。该命令允许执行 UIDL 中的 * CSET 命令来产生提示,并为每个变量提供默认值。命令格式为:

MULTIPRO, 'start', Prompt _ Num

* CSET, Strt _ Loc, End _ Loc, Param _ Name, Prompt _ String, Def _ Value

MULTIPRO,'end'

其中,start 标识 MULTIPRO 指令的开始;end 标识 MULTIPRO 指令的结束;Prompt _ Num 为一整数,等于 * CSET 参数输入提示行的个数。当至少有一个 * CSET 命令省略了 Def _ Value 参数或 Def _ Value 为 0 时,才必须用到该参数。

Strt _ Loc 和 End _ Loc 为初始化提示信息的起始和终止位置控制参数。第 1 个 * CSET 指令的 Strt _ Loc 参数设置为 1,End _ Loc 参数为 Strt _ Loc +2;后续 * CSET 指令的 Strt _ Loc 参数为前一个 * CSET 指令的 End _ Loc 参数加 1,依次类推。

Param _ Name 为输入变量名称,用于存储输入的参数值。若用户不输入任何值,则采用默认值。

Prompt _ String 为参数信息提示字符串,用于描述参数的含义,最多可包含 32 个字符。

多行参数指令执行后,弹出一个包含输入框和确认按钮的对话框。点击不同的按钮,输入参数将获得不同的值:

单击 OK 按钮,状态返回值_ BUTTON =0,输入变量将设置为输入框中的参数;

单击 Cancel 按钮,状态返回值_ BUTTON =1,输入变量将设置为其默认值。

利用_ BUTTON 值的逻辑特性可编写选择不同按钮时，程序做出的不同响应，从而实现不同的流程。

2. 实现方法

(1) 定义宏文件：执 Utility Menu→Macro→Create Macro 命令，弹出 Create Macro 对话框。输入宏的文件名为：MPinput. mac，在命令行中输入如下信息：

```
MULTIPRO,'start',3
*CSET,1,3,Ex,'Young Modulus(MPa)',1.93E5
*CSET,4,6,Mu,'Poisson Ratio',0.3
*CSET,7,9,Density,'Density(Kg/m^3)',7800
*CSET,61,62,'Enter the material attributes:',''
MULTIPRO,'end'
```

如图 28－16 所示，单击 OK 按钮确认，完成宏定义。在当前工作目录中，生成 MPinput. mac。

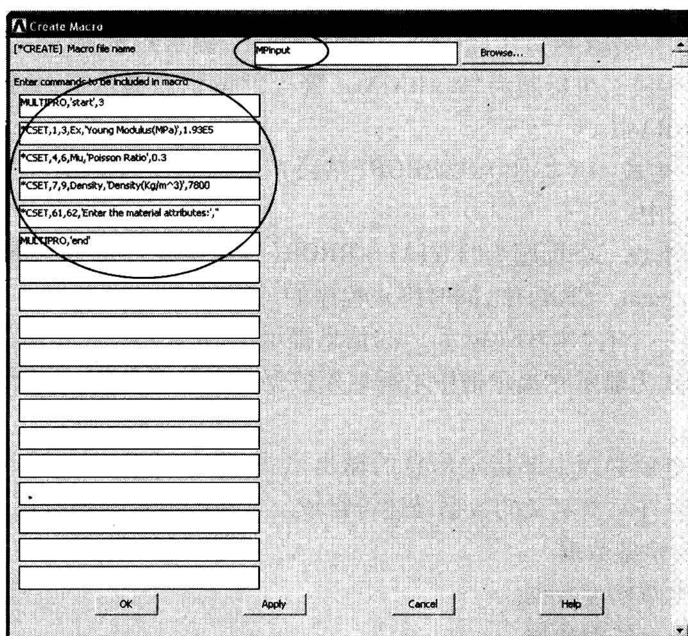


图 28－16 Create Macro 对话框

(2) 执行宏文件：执行 Utility Menu→Macro→Execute Macro 命令，弹出 Execute Macro 对话框。输入宏的文件名 MPinput，单击 OK 按钮确认，弹出多行参数输入对话框，用户根据自己的需要输入相应参数即可，如图 28－17 所示。

28.3.3 生成信息提示框

1. 命令介绍

在 ANSYS 宏文件中填加 *MSG 命令，可弹出信息提示框，显示用户定制的输出信息。命令格式为

*MSG,Lab,VAL1,VAL2,VAL3,VAL4,VAL5,VAL6,VAL7,VAL8

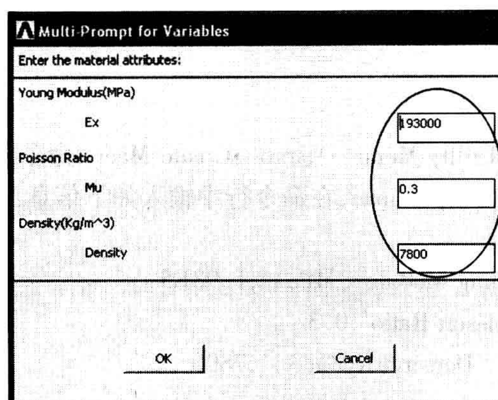


图 28 - 17　多行参数输入框

其中,Lab 为用户提示框的标题信息类型,有以下几种:

(1) INFO:在 Output 窗口生成一个没有标题的提示信息。

(2) NOTE:在 Output 窗口生成一个标题为"NOTE(提示)"的提示信息。

(3) WARN:生成一个标题为"WARNING(警告)"的信息提示框,并把它写入到错误文件(Jobname. ERR)中。

(4) ERROR:生成一个标题为"ERROR(错误)"的信息提示框,并把它写入到错误文件(Jobname. ERR)中。

(5) FATAL:生成一个标题为"FATAL ERROR(致命错误)"的信息提示框,并把它写入到错误文件(Jobname. ERR)中,同时终止程序的运行。

(6) UI:生成一个有"NOTE(提示)"的信息提示框,并显示在一个对话框里。

VAL1 ~ VAL8 为显示在提示框中求解结果数据或字符型常值,所有数值均默认为双精度数据。

在 * MSG 命令后必须立即指定信息的输出格式,最多可以容纳 80 个字符。该信息由文本字符串和字符间预定义的数据描述符组成。常用的数据描述符包括:

%i:用于输出整型数据。

%g:用于输出双精度数据。

%c:用于输出字符型数据。

%/:用于换行显示结果。

2. 实现方法

(1) 定义宏文件:执 Utility Menu→Macro→Create Macro 命令,弹出 Create Macro 对话框。输入宏的文件名为 MSG1. mac,命令行中输入:

```
*MSG, WARN, 20, 140.0, 2.4
Length = %I, Width = %G, Height = %G/&
```

如图 28 - 18 所示,单击 OK 按钮确认,完成宏定义。在当前工作目录中,生成 MSG1. mac。

(2) 执行宏文件:执 Utility Menu→Macro→Execute Macro 命令,弹出 Execute Macro 对话框。输入宏的文件名 MSG1,单击 OK 按钮确认。弹出信息提示框,如图 28 - 19 所示。

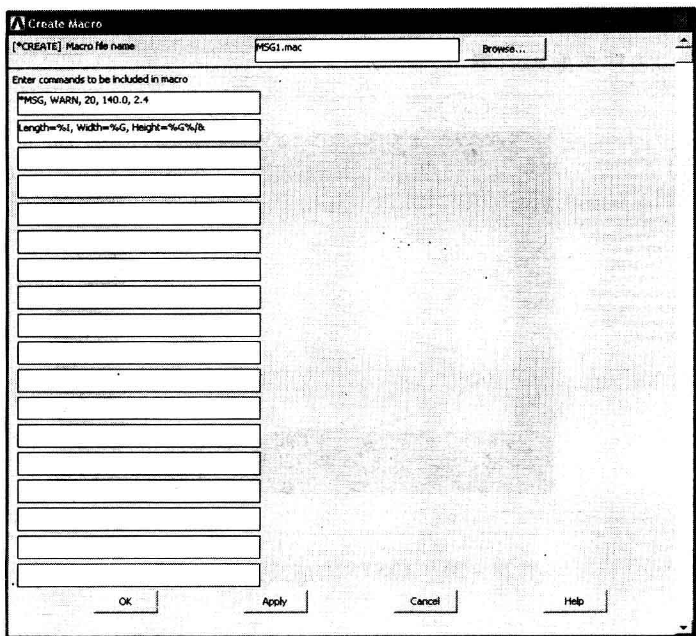


图 28－18　Create Macro 对话框

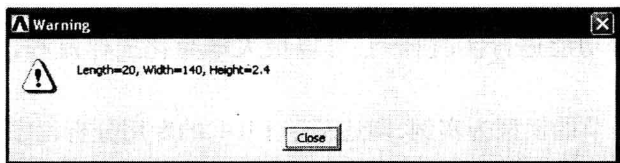


图 28－19　NOTE 信息提示框

28.3.4　ANSYS 工具按钮添加方法

通过添加 * ABBR 命令修改 ANSYS 的启动项设置，可实现工具条按钮的添加。具体实现方法如下：

（1）查找 start90. ans 文件：该文件一般在安装目录中，如 D:\Program Files\Ansys Inc\v90\ANSYS\apdl\start90. ans。

（2）用文本编辑器打开 start90. ans 文件，并在最后添加如下代码：

```
!! ******************************
/psearch,D:\projection      ! 宏文件保存路径
*ABBR,MP,MPinput            ! 即在工具条上添加 MP 按钮，对应于 MPinput 宏的操作
!! ******************************
```

保存 start90. ans 文件，并退出。

（3）启动 ANSYS，在工具条上出现新的 MP 按钮。单击该按钮将弹出多行数据输入对话框，如图 28－20 所示。

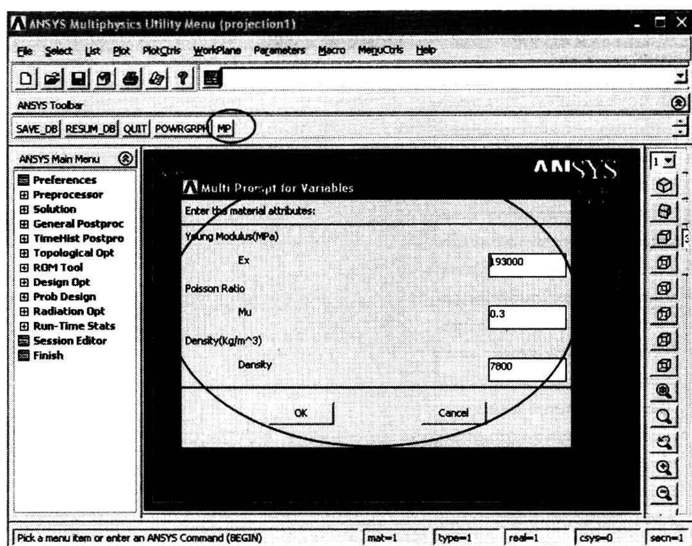


图 28 - 20　ANSYS 添加按钮后效果图

28.3.5　基于 UIDL 的专用程序开发实例

实际应用中，经常需要对有限元软件进行二次开发，以满足特殊需求。在 ANSYS 中，通过 APDL 编写一系列的宏文件，同时通过 UIDL 编写控制界面，对参数输入、模型选取、网格划分、后处理等功能进行实时控制，可以极大地简化工作流程，实现类似分析的流程化。

该处选择 26.2 节的模型为实例，阐述基于 UIDL 的专用分析程序开发流程。

1. 程序框架及功能介绍

该处专用分析程序的宏文件及其功能概述如下：

Myconfig. mac：	配置工作环境和操作界面；
Mymp. mac：	材料参数输入对话框；
Mymodel. mac：	建立有限元模型；
Mymesh. mac：	网格划分参数输入对话框；
Myoption. mac：	模态分析参数设置；
Mysolve. mac：	进行有限元求解；
Mypostpro：	振型选择和显示。

2. 宏文件内容

（1）Myconfig. mac 宏文件的命令流如下：

```
!! * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
! 修改视图背景色为白色
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/COLOR,PBAK,OFF
```

```
/RGB,INDEX,100,100,100, 0
/RGB,INDEX, 80, 80, 80,13
/RGB,INDEX, 60, 60, 60,14
/RGB,INDEX, 0, 0, 0,15
/REPLOT
! 字体大小设置
/DEV,FONT,1,COURIER*NEW,400,0,-19,0,0,,,
/DEV,FONT,2,COURIER*NEW,400,0,-19,0,0,,,
! 云图颜色设置
/COLOR,SMIN,DGRA
/COLOR,CNTR,GREE,1
/COLOR,CNTR,GCYA,2
/COLOR,CNTR,CYAN,3
/COLOR,CNTR,GCYA,4
/COLOR,CNTR,ORAN,5
/COLOR,CNTR,YGRE,6
/COLOR,CNTR,YELL,7
/COLOR,CNTR,BMAG,8
/COLOR,CNTR,WHIT,9
/COLOR,SMAX,DGRA
/REPLOT
!! ************************************
```

(2) Mymp. mac 宏文件的命令流如下：

```
!! ************************************
MULTIPRO,'start',3
*CSET,1,3,Ex1,'Young Modulus(Pa)',1.93E11
*CSET,4,6,Mu1,'Poisson Ratio',0.3
*CSET,7,9,Dens1,'Density(Kg/m^3)',7800
*CSET,61,62,'Enter the material attributes:',''
MULTIPRO,'end'
!! ************************************
```

(3) Mymodel. mac 宏文件的命令流如下：

```
!! ************************************
! 输入工作文件名
*ASK, JBNAME, 'Input the Jobname', 'Proj1'
/FILNAME, JBNAME
/PREP7
! 读入长方体的模型参数
MULTIPRO,'start',3
```

```
* CSET,1,3,Length1,'Input the length of the block(m)',0.5
* CSET,4,6,Width1,' Input the width of the block(m)',0.5
* CSET,7,9,Thick1,' Input the thickness of the block(m)',0.04
* CSET,61,62,'Enter the block dimensions:',''
MULTIPRO,'end'
! 读入孔的模型参数
* ASK, Radius, 'Input the Radius of the hole(m)',0.15
! 建立几何模型
BLOCK,0, Length1,0, Width1,0, Thick1,
CYL4,0.25,0.25, Radius, , , , Thick1
VSBV, 1, 2
FINISH
!! ************************************
```

(4) Mymesh.mac 宏文件的命令流如下：

```
!! *************************************
/PREP7
! 定义单元类型为 SOLID45 单元
ET,1,SOLID45
! 定义材料特性参数
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,Ex1
MPDATA,PRXY,1,,mu1
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,dens1
! 模型切割以适应于映射网格划分
WPAVE,0.25,0.25,0
wpro,,,90.000000
VSBW, 3
wpro,,90.000000,
VSBW, ALL
WPCSYS, -1,0
! 连接指定面
ACCAT,17,24
ACCAT,18,28
ACCAT,2,11
ACCAT,1,3
! 定义单元大小
```

```
*ASK,Elesize,'Input the element size',0.02
ESIZE,Elesize,0,
! 划分网格
VMESH,ALL
FINISH
!! ***********************************
```

(5) Myoption.mac 宏文件的命令流如下：

```
!! ***********************************
/SOLU
MULTIPRO,'start',3
*CSET,1,3,NumFreq,'Input the number of frequencies',5
*CSET,4,6,StartFreq,'Input the start frequency(Hz)',0
*CSET,7,9,EndFreq,'Input the end frequency(Hz)',100000
*CSET,61,62,'Enter the modal options:',''
MULTIPRO,'end'

! 定义分析类型为模态分析,提取并扩展前 NumFreq 阶振型
ANTYPE,2
MODOPT,LANB,NumFreq,StartFreq,EndFreq,,OFF
EQSLV,SPAR
MXPAND,NumFreq,,,1
FINISH
!!! ***********************************
```

(6) Mysolve.mac 宏文件的命令流如下：

```
!! ***********************************
/SOLU
! 定义约束
NSEL,S,LOC,X,-0.00001,0.00001
D,ALL,,0,,,,ALL,,,,
allsel

! 开始模型求解
SOLVE
Finish
!! ***********************************
```

(7) Mypostpro.mac 宏文件的命令流如下：

```
!! ***********************************
/POST1
! 读取振型的阶数
```

```
*ASK,nthmode,'Input the order of frequency', 1
! 提取指定阶振型
SET,,, ,,, , nthmode
/VIEW,1,5, -150,90
/VUP,1,Y
/REPLOT
/AUTO,1
/REP,FAST
PLDISP,2
Finish
!! * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

3. 定义 ANSYS 工具按钮

用文本文件打开 start90. ans 文件,并在最后添加如下代码:

```
!! * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
/psearch,D:\projection       ! 宏文件保存路径
*ABBR, Config, Myconfig      ! 即在工具条上添加 Config 按钮,用于 Mconfig 宏的操作
*ABBR, MP, Mymp
*ABBR, Model, Mymodel
*ABBR, Mesh, Mymesh
*ABBR, Options, Myoption
*ABBR, MSolve, Mysolve
*ABBR, Postpro, Mypostpro
!! * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

保存 start90. ans 文件,并退出。

4. 使用 UIDL 开发的分析流程进行有限元分析

启动 ANSYS,在工具条上将显示新添加的各项功能按钮,如图 28 -21 所示。

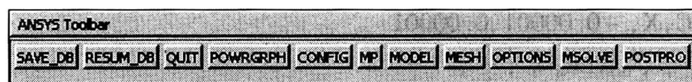


图 28 -21　ANSYS 添加按钮后效果图

依次执行添加的按钮,并输入相应的参数,可自动完成模型的模态分析过程,并查看振型的分布情况。至此,完成了采用 UIDL 方式对 ANSYS 的二次开发。

28.4　基于 VC 语言的专用软件开发方法

APDL 语言通过引入循环、分支、宏等功能,提供了一种高效的参数化建模和求解方法,为灵敏度分析、优化设计、可靠性设计和自适应网格划分等诸多高级功能奠定了良好的基础。然而,APDL 语言也存在一定的不足,诸如难以控制程序的进程;界面参数输入

功能不强，交互性不够流畅；程序流程控制较为简单，难以编写结构清晰的程序等。为了开发更为实用的专用有限元仿真系统，可考虑采用 VC 对 ANSYS 进行二次开发。借助于 VC 语言开发友好、易用的人机界面，将 ANSYS 的求解功能进行后台封装。用户只需要在前台界面的引导下输入必需的尺寸、材料和载荷参数，即可调用 ANSYS 进行后台计算，求解完毕后，将结果返回给用户，进行后处理。具体实现过程介绍如下：

28.4.1 VC 封装 ANSYS 二次开发实现流程

VC 封装 ANSYS 进行二次开发的简单实现流程如图 28－22 所示，具体实现过程描述如下：

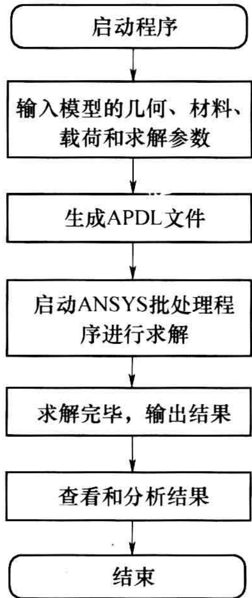


图 28－22 VC 封装 ANSYS 进行二次开发的实现流程

（1）通过 VC 语言建立启动程序和良好的人机交互界面，包括确定界面的布局、功能选择方法、流程控制方式、模型显示方法等。图 28－23 为某零件专用仿真软件的界面。

（2）建立模型几何、材料、载荷和求解等参数的输入框及其对应变量，为后续生成 APDL 文件提供支撑条件。

（3）根据输入参数和模型特点确定结构的几何建模方法、网格划分方法、加载和约束方式及结果输出内容和方法，同时，生成相应的 APDL 命令流文件，并存放于指定路径。

（4）启动 ANSYS 进程，读取指定的 APDL 文件进行求解，并输出结果数据。

（5）读取并显示结果数据（如最大应力、最大变形、固有频率、振型等），供用户分析和查看。

28.4.2 VC 封装 ANSYS 二次开发的关键技术

1．程序通用性设置方法

鉴于不同系统的 ANSYS 版本、安装路径和工作路径各不相同。为了增强专用系统的

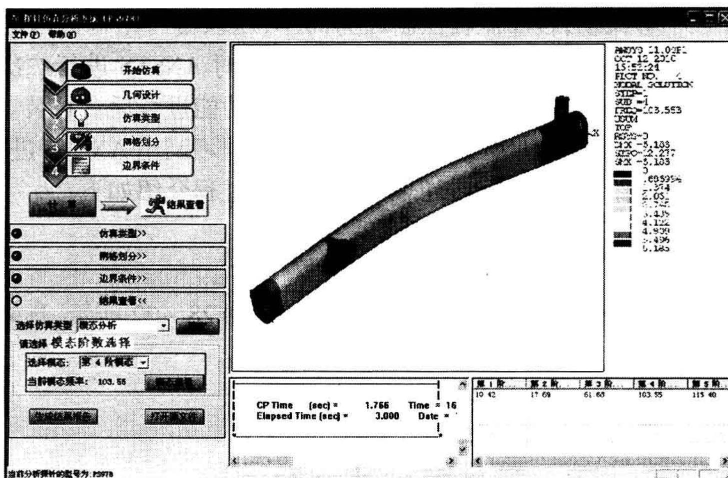


图 28 - 23　发动机探针专用仿真软件界面

通用性和可扩展性,二次开发过程中应保证用户可根据自己的实际情况,选择 ANSYS 可执行文件的存放位置、设置命令流文件的存放路径及实际工作的路径。

1) ANSYS 可执行文件存放位置选择方法

通过对话框方式选择 ANSYS 可执行文件的存放位置,实现代码如下:

```
GetDlgItem(IDC_ANSYS)->GetWindowText(m_ANSYSpath);
CFileDialog dlg(true,"exe",m_ANSYSpath, OFN_NOCHANGEDIR|OFN_HIDEREADONLY, "exe File(*.exe)|*.exe|All Files (*.*)|*.*||");
    if (dlg.DoModal()==IDOK)
    {
        m_ANSYSpath=dlg.GetPathName();
        //显示 ANSYS 可执行文件的保存路径
        GetDlgItem(IDC_ANSYS)->SetWindowText(m_ANSYSpath);
    }
```

通过执行上述代码,弹出文件选择对话框,选择 ANSYS 的可执行文件即可,如图 28 - 24所示。

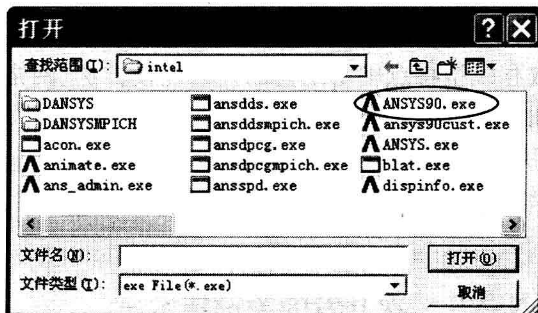


图 28 - 24　ANSYS 可执行文件选择对话框

2) APDL 文件和工作文件保存路径选择方法

通过对话框方式选择 APDL 文件和工作文件的保存路径,实现代码如下:

```
CString strYourCaption(_T("文件夹选择对话框"));
CString strYourTitle(_T("请选择工作文件保存路径:"));
GetDlgItem(IDC_WORKING)->GetWindowText(m_WORKpath);
CPathDialog dlg(strYourCaption, strYourTitle, m_WORKpath);
if(dlg.DoModal()==IDOK)
{
    GetDlgItem(IDC_WORKING)->SetWindowText(dlg.GetPathName());
}
//显示工作路径
GetDlgItem(IDC_WORKING)->GetWindowText(m_WORKpath);
```

通过执行上述代码,弹出文件夹选择对话框,选择 APDL 文件或工作文件的保存路径即可,如图 28-25 所示。



图 28-25 APDL 文件或工作文件保存路径选择对话框

2. 多进程编程

采用 VC 封装 ANSYS 方式进行软件的二次开发,希望前台处理系统与用户进行信息交互,同时调用 ANSYS 进行后台计算,这就要求系统具有并发性。因此,引入多进程编程机制。通过创建和销毁进程,实现 ANSYS 计算的控制。

在 VC 中,可以通过 CreateProcess 函数来创建一个进程去执行其他程序。该处创建的 CreateProcess 函数如下:

```
PROCESS_INFORMATION pi;
m_strInputFile = "model.txt";          //待读取的命令流文件名
m_strOutFile = "result.txt";           //结果输出的文件名
//存储 ANSYS 启动文件路径的变量
CString m_ANSYSpath;
char cCommandLine[1000];
```

```
//初始化结构变量 si
STARTUPINFO si;
ZeroMemory(&si,sizeof(STARTUPINFO));          //定义其所有成员为 0
si.cb = sizeof(STARTUPINFO);                  //设置结构体大小
//设置 ANSYS 批处理程序以窗口方式运行
si.dwFlags = STARTF_USESHOWWINDOW;
//设置批处理窗口以最大化方式显示
si.wShowWindow = SW_SHOWMAXIMIZED;
//设置 ANSYS 启动文件的保存路径和批处理参数
sCommandLine = m_ANSYSpath + " -b - Pane3fl -i " + m_strInputFile + " -o "
+ m_strOutFile;
::strcpy(cCommandLine,sCommandLine);

//创建进程
BOOL ret = CreateProcess(NULL, cCommandLine, NULL, NULL, FALSE, 0, NULL,
NULL,&si,&pi);
//创建失败时,返回错误信息
if(! ret)
{
    AfxMessageBox("Create Process Error!");
    GetLastError();
}
```

3. 进程终止的判断

有 4 种方式可以终止一个进程:①主线程的进入点函数返回;②进程中的一个线程调用 ExitProcess 函数;③另一个进程中的线程调用 TerminateProcess 函数;④ 所有进程中的线程自动终止运行(一般不会发生)。ANSYS 求解完毕后,该处采用第一种方式终止创建的进程,进而提示用户查看和分析计算结果。实现的代码如下:

```
// 等待主线程进入点函数返回
WaitForSingleObject( pi.hProcess, INFINITE );
//进程结束,关闭句柄
CloseHandle( pi.hProcess );
CloseHandle( pi.hThread );
AfxMessageBox("ANSYS 求解完成,请查看结果!");
```

4. APDL 文件的组织和管理

为了便于 APDL 文件的组织和管理,使专用分析程序可以拓展至不同结构和不同分析类型的仿真计算,可将命令流文件分为 3 个部分:模型参数文件(parameters.txt)、模型分析文件(calculation.txt)和结果输出控制文件(output.txt)。

模型参数文件由 VC 根据用户输入参数和设置自动生成,主要用于存储用户输入的模型几何信息、材料参数信息、网格离散信息和加载信息等。

模型分析文件根据专用分析对象的特点和用户输入信息,建立几何模型,定义材料信息和网格划分,设置求解选项和进行求解。

结果输出控制文件用于控制输出结果信息,包括输出结果的数据格式、存储文件信息等。

每次求解前,通过 VC 命令将 3 个文件的内容依次复制到 ANSYS 批处理文件夹的 APDL 文件(该处定义为 model. txt)中。然后,调用 ANSYS 的后台批处理程序进行计算。

28.4.3 分析实例

该处选择 26.2 节的模型为实例,阐述基于 VC + +6.0 的专用分析程序开发流程。

1. APDL 文件格式

(1) 模型参数文件:由 VC 程序产生,部分实现代码如下:

```
!! 模型参数
Length1 =0.5
Width1 =0.5
Thick1 =0.04
Radius =0.15
!! 材料参数
Ex1 =1.93E11
Mu1 =0.3
Dens1 =7800
Elesize =0.02
!! 求解参数
NumFreq =5
NumMODE =5
StartFreq =0
EndFreq =100000
```

(2) 模型分析文件:为参数化的模型文件,部分实现代码如下:

```
!! * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
……
/PREP7
! 定义单元类型为 SOLID45 单元
ET,1,SOLID45
! 定义材料特性参数
……
MPDATA,EX,1,,Ex1
MPDATA,PRXY,1,,mu1
……
MPDATA,DENS,1,,dens1
```

```
! 建立几何模型
BLOCK,0, Length1,0, Width1,0, Thick1,
CYL4,Length1/2,Width1/2, Radius, , , , Thick1
VSBV, 1, 2
! 模型切割以适应于映射网格划分
WPAVE,Length1/2,Width1/2,0
wpro,,,90.000000
VSBW, 3
wpro,,90.000000,
VSBW, ALL
……
ESIZE, Elesize,0,
! 划分网格
VMESH,ALL
FINISH

/SOLU
! 定义分析类型为模态分析,提取并扩展前 NumFreq 阶固有振型
ANTYPE,2
MODOPT,LANB,NumFreq,StartFreq,EndFreq, ,OFF
EQSLV,SPAR
MXPAND, NumMODE, , , 1
! 定义约束
NSEL,S,LOC,X, -0.00001,0.00001
D,ALL, ,0, , , ,ALL, , , , ,
allsel
! 开始模型求解
SOLVE
Finish
!! * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

(3) 结果输出控制文件:主要用于控制输出结果的内容和格式,具体格式如下:

```
!! * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
/POST1
! 提取单元数量
*GET, ECOUNT, ELEM, 0, COUNT
! 提取节点数量
*GET, NCOUNT, NODE, 0, COUNT
! 提取各阶频率值
*DIM,RFreq,,NumFreq
```

```
*DIM,RSeq,,NumFreq
*DO,I,1,NumFreq
      *GET,RFreq(I),MODE, I, FREQ,
      RSeq(I) =I
*ENDDO
! 输出结果到指定文件中
*CFOPEN,Results,out
    *VWRITE,ECOUNT,NCOUNT
    (F10.0,/F10.0)
    *VWRITE,RSeq(1),RFreq(1)
    ('f',F2.0,'=',F9.4)
*CFCLOS
! 保存振型图
/DEV,PSFN,NINC
/VIEW,1,5,-150,90
/VUP,1,Y
/REPLOT
/AUTO,1
/REP,FAST

count =0
*DO,I,1,NumMODE
    count = count +1
    SET,,, ,,, , count
    /SHOW, JPEG
    PLDISP,2
    /SHOW,CLOSE
    /COPY,file,jpg,,mode _%count%,
*ENDDO
Finish
!! ***********************************
```

2. 用户界面

通过 VC 建立一个基于对话框框架的应用程序,如图 28 -26 所示。

在上述界面中,通过选择 ANSYS 可执行文件的位置、APDL 文件存放文件夹和工作文件夹,输入模型的几何参数、材料参数和求解参数,单击"开始计算"按钮,弹出开始求解提示对话框,如图 28 -27 所示。单击"确定"按钮,即可调用 ANSYS 进行模型计算。求解完毕后,弹出如图 28 -28 所示的信息提示对话框。

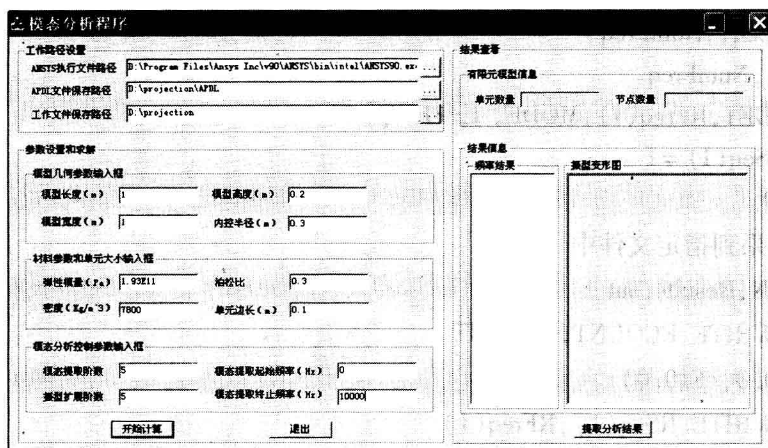


图 28－26　实例界面和输入参数效果图

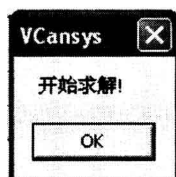


图 28－27　开始求解提示对话框

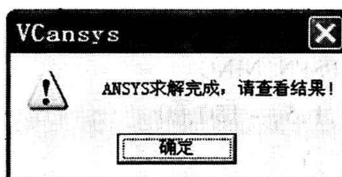


图 28－28　求解完毕提示框

单击图 28－26 中的“提取分析结果”按钮，将显示有限元模型的信息和 ANSYS 分析的结果，如图 28－29 所示。

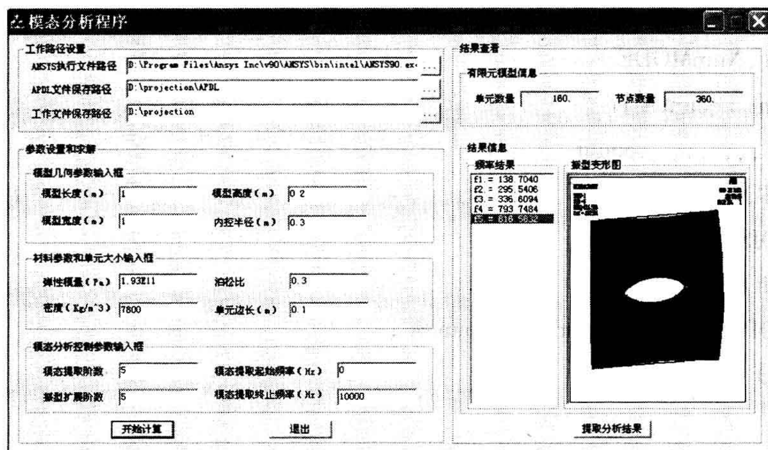


图 28－29　VC 封装 ANSYS 二次开发计算结果效果图

3．实现代码

具体实现代码见附录光盘（随书所附）。

参考文献

[1] 杜平安,甘娥忠,于亚婷. 有限元法原理、建模及应用. 北京:国防工业出版社,2004.

[2] Zienkiewicz O C,Taylor R L and Zhu J Z . The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals(Six - edition), Oxford:McGraw - Hill, 2005.

[3] 曾攀. 有限元分析及应用. 北京:清华大学出版社,2006.

[4] 胡于进,王璋奇. 有限元分析及应用. 北京:清华大学出版社,2009.

[5] 刘树堂. 杆系结构有限元分析与 Matlab 应用. 北京:中国水利水电出版社,2007.

[6] 杜平安. 结构有限元分析建模方法. 北京:机械工业出版社,1998.

[7] 王勖成,邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法. 北京:清华大学出版社,1988.

[8] 张榴晨,徐松. 有限元法在电磁计算中的应用. 北京:中国铁道出版社,1996.

[9] 吕和祥,蒋和洋. 非线性有限元法. 北京:化学工业出版社,1992.

[10] JeffreyM Steele. Applied Finite Element Modeling. New York: Eastman Kodak Company Rochester,1989.

[11] 杜平安. 计算机辅助机械工程 MCAE. 北京:机械工业出版社,1996.

[12] 许尚贤. 机械结构中的有限元法. 北京:高等教育出版社,1992.

[13] 孔祥谦. 有限单元法在传热学中的应用. 北京:科学出版社,1986.

[14] 张国瑞. 有限元法. 北京:机械工业出版社,1991.

[15] 刘涛,杨凤鹏. 精通 ANSYS. 北京:清华大学出版社,2002.

[16] 小飒工作室. 最新经典 AYSNS 及 Workbench 教程. 北京:电子工业出版社,2004.

[17] Kwon Yong W, Bang Hyochoong. The finite element method using MATLAB. Florida: CRC Press, 1997.

[18] 孙鑫,余安萍. VC + + 深入详解. 北京:电子工业出版社,2006.

[General Information]
书名=有限元法：原理、建模及应用
作者=杜平安
页数=385
SS号=12888978
DX号=
出版日期=2011.08
出版社=国防工业出版社